ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
протокол від 12 вересня 2024 р.
№ 5

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних (лабораторних) робіт з дисципліни
«ІНФОРМАТИКА»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 274 «Автомобільний транспорт»
освітньо-професійна програма «Автомобільний транспорт»
Факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій,
мехатроніки і робототехніки
Кафедра автомобілів і транспортних технологій

Рекомендовано на засіданні
кафедри робототехніки,
електроенергетики та
автоматизації ім. проф.
Б.Б.Самотокіна
27 серпня 2024 р., протокол № 7

Розробники: к.т.н, доцент, зав. каф. робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б.Самотокіна Олексій ГРОМОВИЙ
к.т.н., доцент інженерії програмного забезпечення Андрій МОРОЗОВ

Житомир
2024

Методичні вказівки до практичних (лабораторних) робіт з дисципліни «Інформатика» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності 274 «Автомобільний транспорт» освітньо-професійна програма «Автомобільний транспорт» [Електронне видання]. – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2024. – 65 с.

Розробники: к.т.н, доцент, зав. каф. робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б.Самотокіна Олексій ГРОМОВИЙ, к.т.н., доцент інженерії програмного забезпечення Андрій МОРОЗОВ

Рецензенти:

Олександр ДОБРЖАНСЬКИЙ – кандидат технічних наук, доцент кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б.Самотокіна.

Андрій ТКАЧУК – кандидат технічних наук, доцент кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б.Самотокіна

Затверджено Вченою радою факультету комп’ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки

(протокол № 6 від «28» серпня 2024 р.)

Методичні рекомендації призначені для забезпечення підготовки, виконання та захисту практичних (лабораторних) з дисципліни «Інформатика» студентами освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності 274 «Автомобільний транспорт» освітньо-професійна програма «Автомобільний транспорт».

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1

Тема: Робота з текстовим редактором Microsoft Word. Запуск програми, структура вікна, меню, панелі інструментів, операції з файлами: створення нового документа, збереження документа, загрузка документа для редагування та ін.

Мета: навчитися оформлювати в текстовому редакторі Microsoft Word текстові документи, рисунки, діаграми, таблиці, формули.

Мета роботи – навчитися оформлювати в текстовому редакторі Microsoft Word текстові документи, рисунки, діаграми, таблиці, формули.

Вимоги до оформлення роботи

Робота оформлюється з вказаним номером варіанту завдання. Для підготовки роботи застосовувати текстовий редактор Microsoft Word. Робота оформлюється на аркушах формату А4 (210 x 297 мм).

Орієнтація книжкова.

Поля: 2,5см зліва, 1,5 см справа, 2 см зверху, 1,7 см знизу.

Міжрядковий інтервал – 1,5.

Шрифт – Times New Roman розміром 14 пт.

Відступ першого рядка (абзац) – 1,0 см.

Вирівнювання – по ширині сторінки.

Всі сторінки роботи мають бути пронумеровані. Номер сторінки – внизу по центру.

Таблиці мають бути набрані у редакторі Microsoft Word, шрифт Times New Roman розміром 14 пт.

Назва таблиці – вирівнювання по центру, шрифт напівжирний Times New Roman розміром 14 пт.

Формули мають бути написані у редакторі Equation Editor (цей редактор є внутрішнім редактором формул у Microsoft Word); функція «Вставка – Об'єкт – Microsoft Equation 3.0». Шрифт Times New Roman розміром 14 пт.

Пояснення символів та числових коефіцієнтів формул слід наводити безпосередньо під формулами, в тій самій послідовності, у якій вони подані в формулі. Перший рядок пояснення починають зі слова «де» без двокрапки. Пояснення кожного символу необхідно починати з нового рядка. Формула входить до речення як його рівноправний елемент, тому в кінці формул і в тексті перед ними розділові знаки ставлять відповідно до правил пунктуації.

Змінні математичні величини у тексті відповідно до формул набирають курсивом.

Рисунки необхідно виконувати у редакторі Microsoft Word, за допомогою функції «Вставка – Рисунок – Створити рисунок». Рисунок має бути розташований по центру, без обтікання текстом. Шрифт Times New Roman розміром 14 пт.

Назву рисунка розміщують під рисунком по центру.

Діаграми та графіки виконувати у редакторі Microsoft Word, за допомогою функції «Вставка – Об’єкт – Діаграма Microsoft Word». шрифт Times New Roman розміром 14 пт.

Назву рисунка розміщують під рисунком по центру.

Літери грецького алфавіту набирають у редакторі Microsoft Word за допомогою функції «Вставка – Символ – Вставити».

Між текстом і рисунками зверху і знизу повинен бути пропущений рядок.

Між текстом і формулами зверху і знизу повинен бути пропущений рядок.

Між текстом і таблицями зверху і знизу повинен бути пропущений рядок.

Після назви розділу, підрозділу повинен бути пропущений рядок.

Заголовки розділів необхідно розміщувати на середині рядка і друкувати прописними літерами без крапки в кінці.

Заголовки підрозділів, пунктів і підпунктів необхідно починати з абзацу. Відстань між заголовком та наступним або попереднім рядком – один рядок.

Розділи, підрозділи і пункти нумеруються арабськими цифрами. Номер підрозділу складається з номеру розділу та порядкового номеру підрозділу, розділених крапкою, наприклад, 1.1, 1.2.

Формули та рівняння наводять безпосередньо після тексту, у якому вони згадуються, посередині рядка, з полями зверху та знизу – один рядок. Номер формули складається з номера розділу та порядкового номера, розділених крапкою. Номер проставляється в круглих дужках на рівні формули в крайньому правому положенні на рядку. Нумерувати слід лише ті формули, на які є посилання в подальшому тексті.

На сторінках не повинно залишатися внизу чисте поле (заповнювати текстом з інших сторінок матеріалів для набору тексту).

Варіанти завдань:

Варіант 1

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 1 повністю з таблицею 1.1.
2. Виконати рисунок 1.2.
3. Виконати рисунок 1.4.
4. Виконати формулу 1.1 з поясненням алгебраїчних величин, які входять в формулу.

Варіант 2

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 2 повністю з рисунком 1.1, з таблицею 1.2.
2. Виконати рисунок 1.4.

Варіант 3

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 3 повністю з рисунком 1.2.
2. Виконати рисунок 1.5.
3. Виконати таблицю 1.2.

Варіант 4

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 4 повністю з рисунком 1.3.
2. Виконати таблицю 1.3.
3. Виконати рисунок 1.5.

Варіант 5

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 5 повністю з таблицями 1.3 та 1.4.
2. Виконати рисунок 1.1.
3. Виконати рисунок 1.5).

Варіант 6

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 6 повністю з рисунком 1.4.
2. Виконати таблицю 1.3.
3. Виконати рисунок 1.2.

Варіант 7

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 4 повністю з таблицею 1.5.
2. Виконати рисунок таблицю 1.4.
3. Виконати рисунок 1.4.

Варіант 8

Дано: матеріал для набору тексту.

1. Друкувати текст блоку 4 повністю з рисунком 1.5.
2. Виконати таблицю 1.5.
3. Виконати рисунок 1.3.
4. Виконати формулу 1.3 з поясненням алгебраїчних величин, які входять в формулу.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 2

Знайомство з електронними таблицями Microsoft Excel. Виконання розрахунків в пакеті Microsoft Excel. Робота з функціями і формулами. Майстри діаграм і функцій. Аналіз даних у середовищі MS Excel. Статистичний аналіз даних.

Мета роботи – виконання обчислень в Microsoft Excel за допомогою вбудованого апарату формул та функцій.

Теоретичні дані

Зварювання є прогресивним і високопродуктивним методом обробки металів. У ремонтному виробництві широке розповсюдження мають як механізовані види електродугового зварювання і наплавлення (автоматичне і напівавтоматичне зварювання і наплавлення під флюсом і у захисних газах), так і ручне зварювання будь-якими електродами, у тому числі при зварюванні сталі, чавуну і алюмінієвих сплавів.

Порядок виконання роботи

1. Знайти суму елементів строки
2. Знайти середньоарифметичне значення елементів строки
3. Знайти модуль одного із значень, яке менше 0
4. Знайти косинус 5-го елемента строки
5. Знайти натуральний логарифм 1-го елемента строки
6. Знайти корінь квадратний від любого елемента строки
7. Знайти максимальний елемент строки

8. Знайти мінімальний елемент строки
9. Перемножити всі елементи строки
10. Знайти 4-ту степінь 6-го елемента строки
11. За даними строки побудувати графік
12. Побудувати лінію тренда і вивести на екран рівняння функції, яка дає найбільший коефіцієнт достовірності апроксимації.

13. В кожній комірці, в якій виконувались розрахунки, створити примітки, що пояснюють проведені розрахунки.

Варіант	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
1	0	-1	6	0	-1	1	-4	-3	-2
2	0	0	-2	0	0	-1	-6	-4	-4
3	0	2	-3	0	0	1	-3	-2	-1
4	-2	3	0	4	-1	3	-5	-2	1
5	0	5	-3	0	0	1	-6	-4	0
6	0	4	-1	0	-1	2	-7	-3	-1
7	2	2	-3	2	0	2	-6	-5	-3
8	0	0	-2	1	-1	4	-3	-3	-2
9	2	1	-3	0	-1	2	-4	-2	-3
10	2	3	-2	2	-2	0	-7	-3	-4
11	1	4	0	3	0	1	-7	-1	-2
12	2	2	-1	3	0	4	-6	-4	-1
13	0	1	-1	1	-1	4	-4	-3	-1
14	-1	1	-3	0	-3	3	-2	0	-3
15	0	3	-2	0	-2	1	-5	-2	4
16	0	3	0	3	-2	3	-4	-4	-4
17	1	2	0	4	0	4	-2	-5	-2

18	2	0	-1	3	0	2	-4	-3	-3
19	0	2	0	2	-1	2	-3	-2	-2
20	-1	1	1	2	-1	2	-3	-2	-4
21	2	1	-3	0	-1	2	-4	-2	-3
22	2	3	-2	2	-2	0	-7	-3	-4
23	1	4	0	3	0	1	-7	-1	-2
24	2	2	-1	3	0	4	-6	-4	-1
25	0	1	-1	1	-1	4	-4	-3	-1

Зміст звіту

1. Тема роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання на виконання роботи.
4. Роздрукована таблиця з виконаними розрахунками.
5. Висновки.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 3

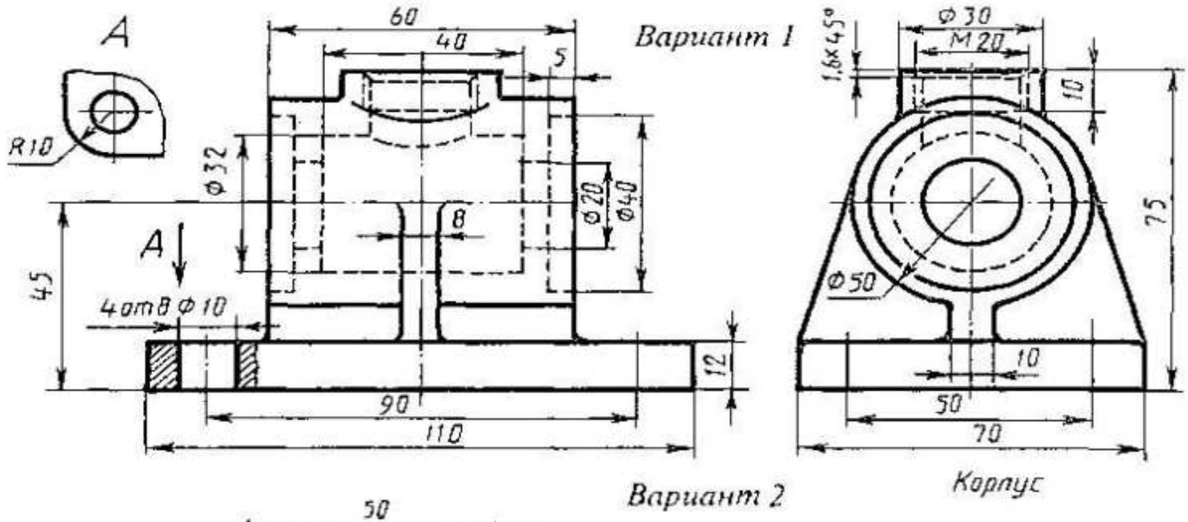
Знайомство з системою автоматизації проектно-конструкторських робот в машинобудуванні – SOLIDWORKS. Розробка 3D-моделей деталей з використанням САПР Solidworks. Деталь 1.

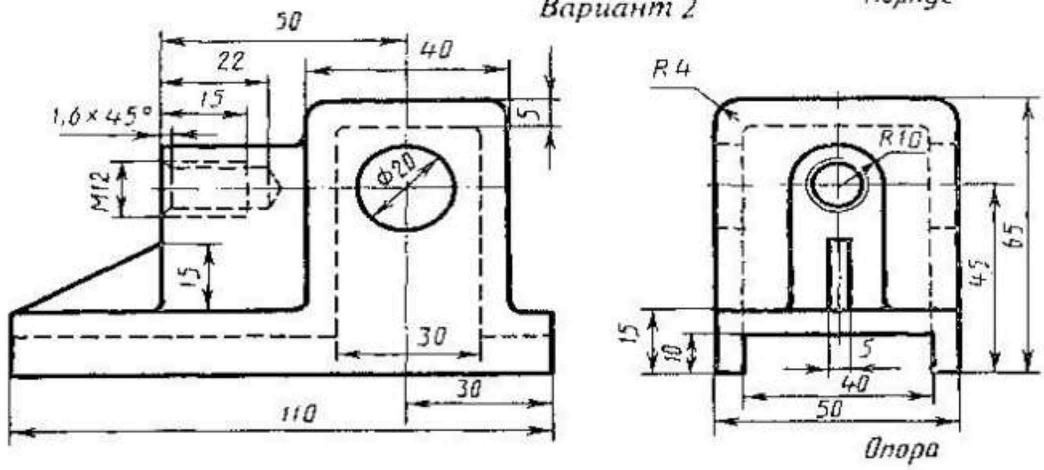
Мета роботи – продовжити формування умінь і навичок створення 3D моделей деталей з використанням Solidworks, створення креслень деталей.

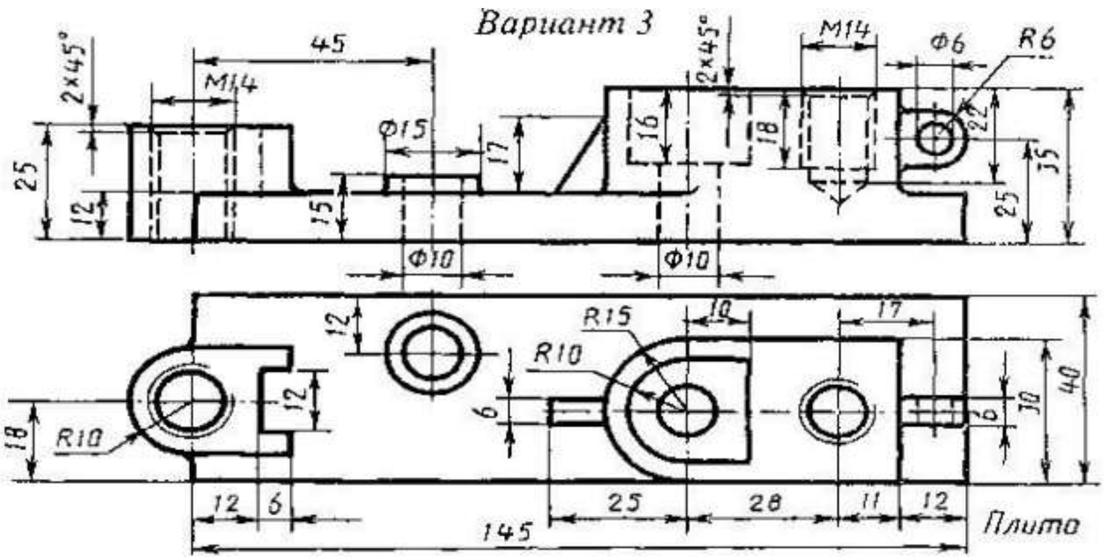
Виконання роботи:

1. На основі одержаного завдання створити 3D модель деталі.
2. Згідно створеної 3D моделі на форматі А3 виконати креслення деталі згідно одержаного завдання.

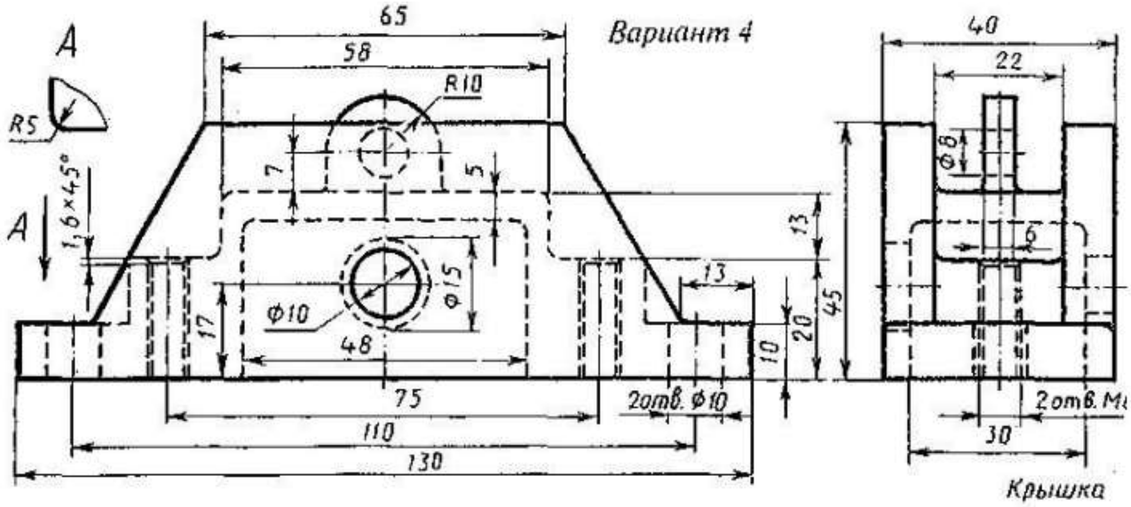
Номери варіантів завдань знаходяться в списку групи Перелік завдань:

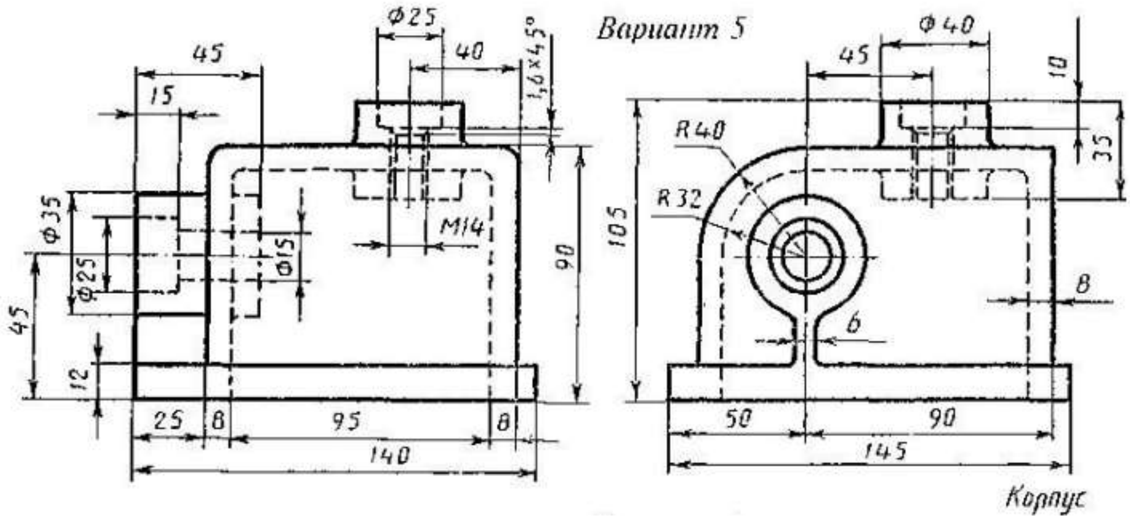


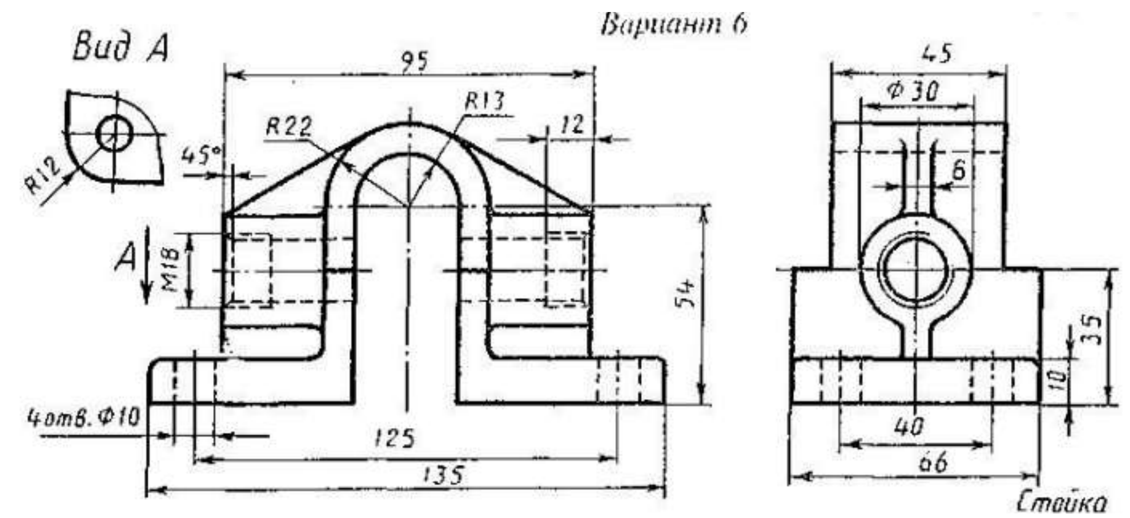




Варіанти 1 і 2. По даним зображенням деталі побудувати вид зверху і виконати необхідні розрізи. Варіант 3. По даним зображенням деталі побудувати вид зліва і виконати необхідні розрізи.

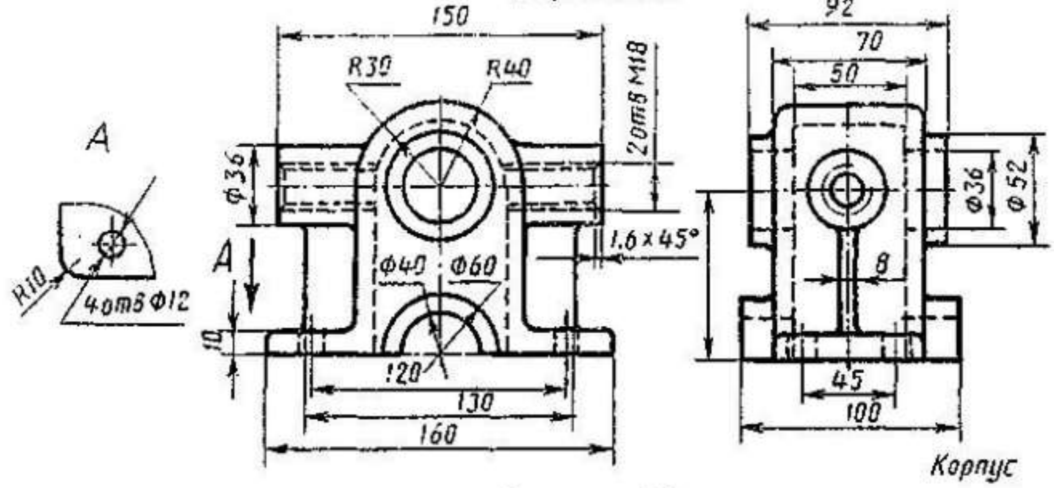






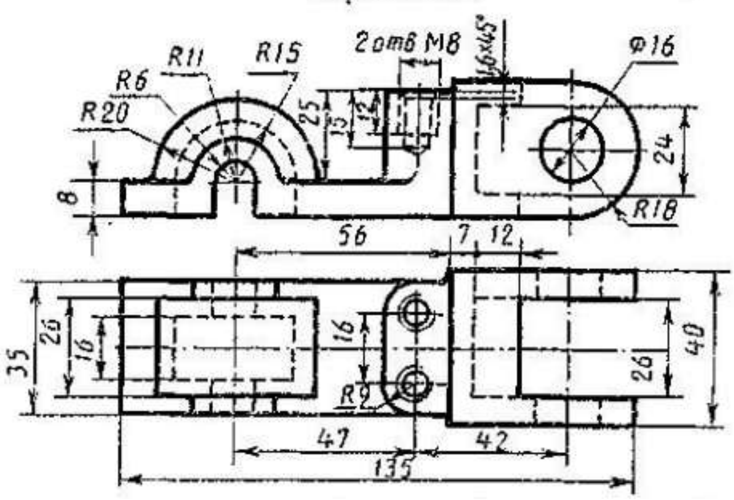
Варіанти 4,5 і 6. По даним зображенням деталі побудувати вид зверху і виконати необхідні розрізи.

Вариант 22

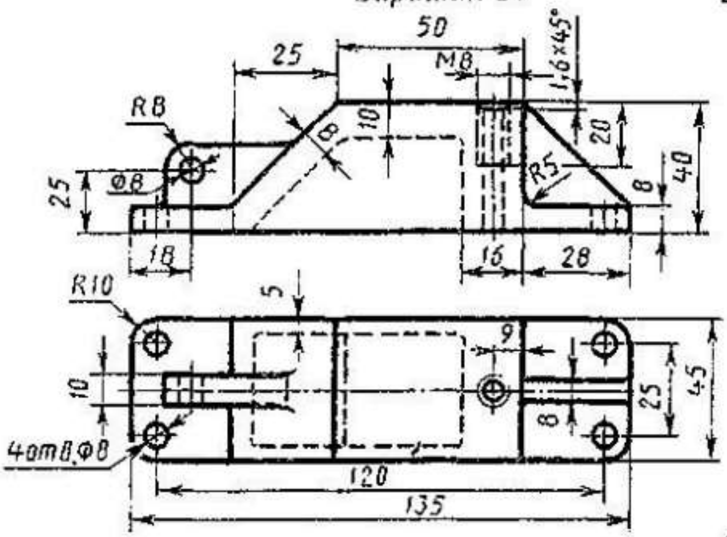


Корпус

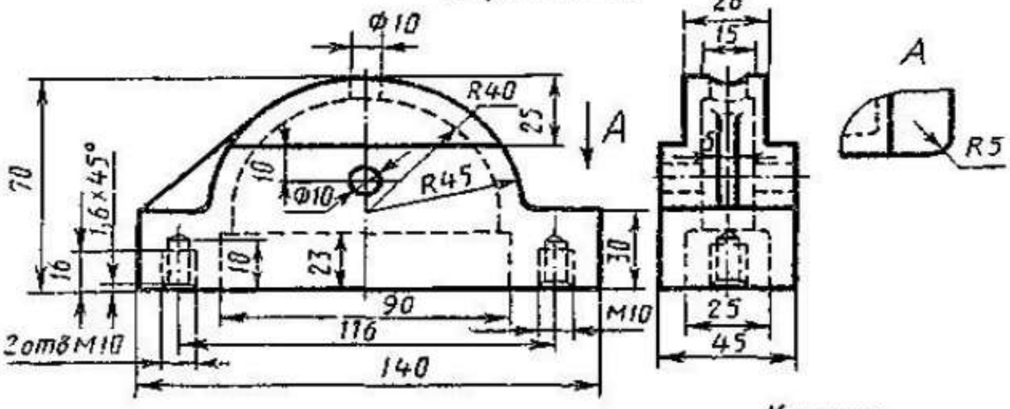
Вариант 23



Вариант 24 *Вилка*

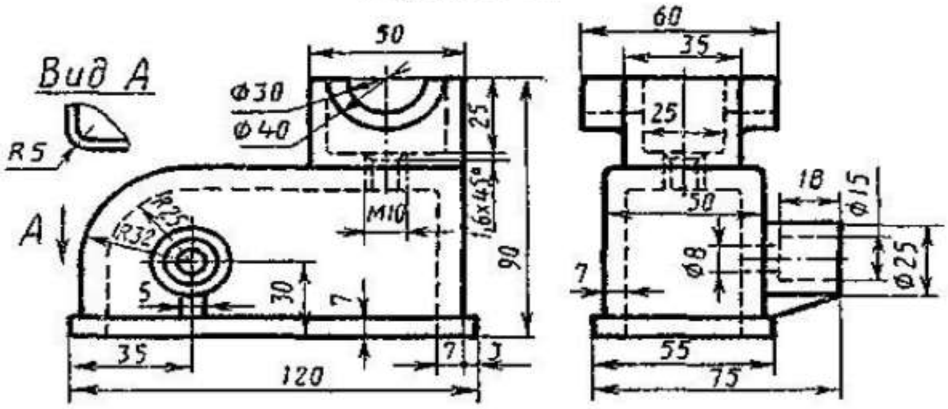


Вариант 25



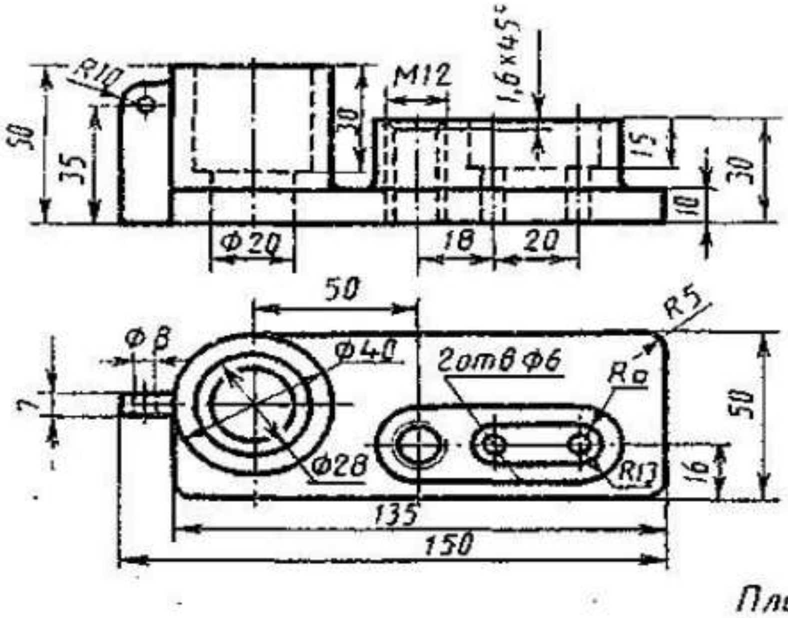
Крышка

Вариант 26



Корпус

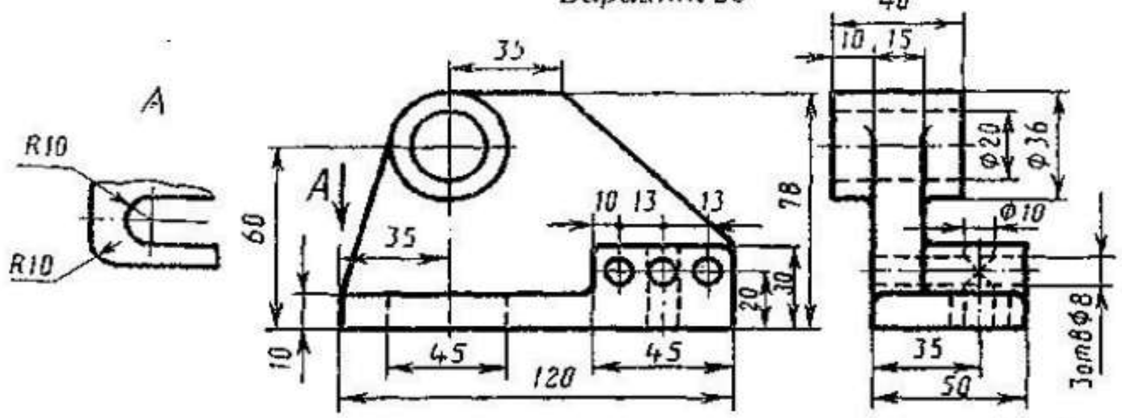
Вариант 27



Плита

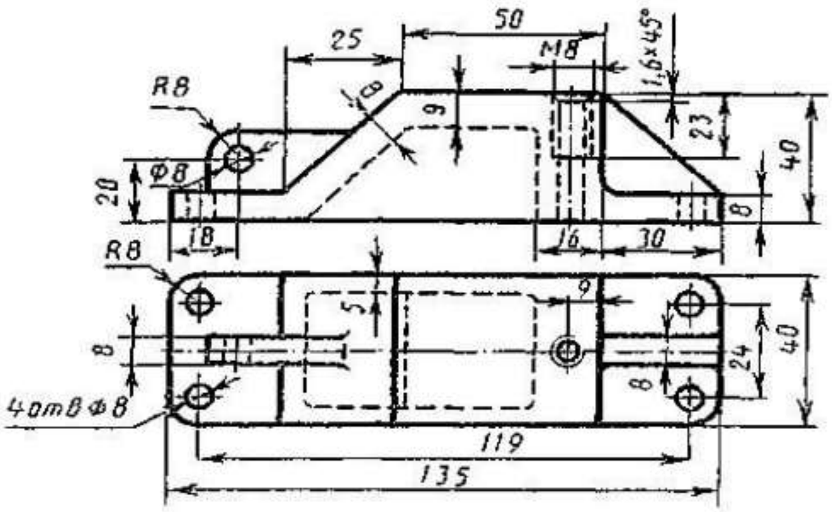
Варіанти 25 і 26. По даним зображенням деталі побудувати вид зверху і виконати необхідні розрізи. Варіант 27. По даним зображенням деталі побудувати вид зліва і виконати необхідні розрізи.

Вариант 28

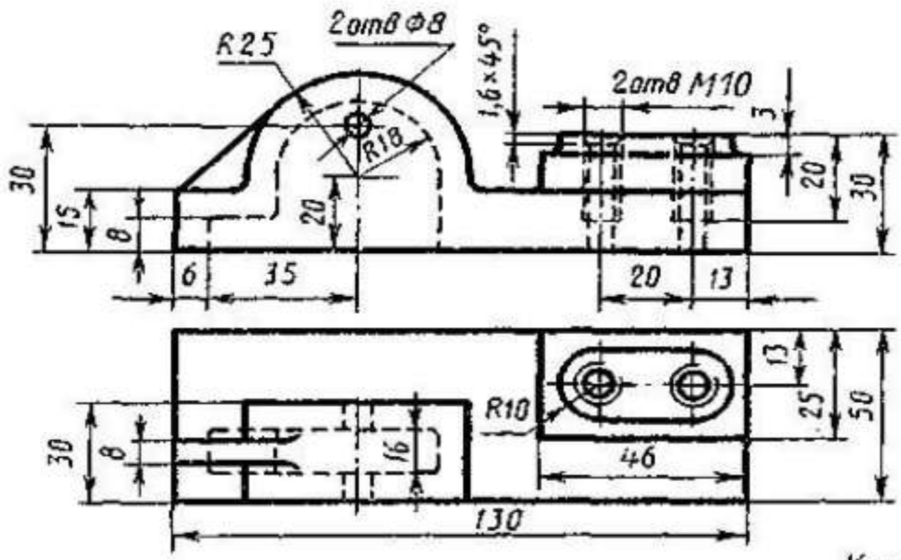


Стойка

Вариант 29



Вариант 30



Корпус

Варіант 28. По даним зображенням деталі побудувати вид зверху і виконати необхідні розрізи. Варіанти 29 і 30. По даним зображенням деталі побудувати вид зліва і виконати необхідні розрізи.

ПРАКТИЧНА РОБОТА 4

Розробка 3D-моделей деталей з використанням САПР Solidworks.

Деталь 2.

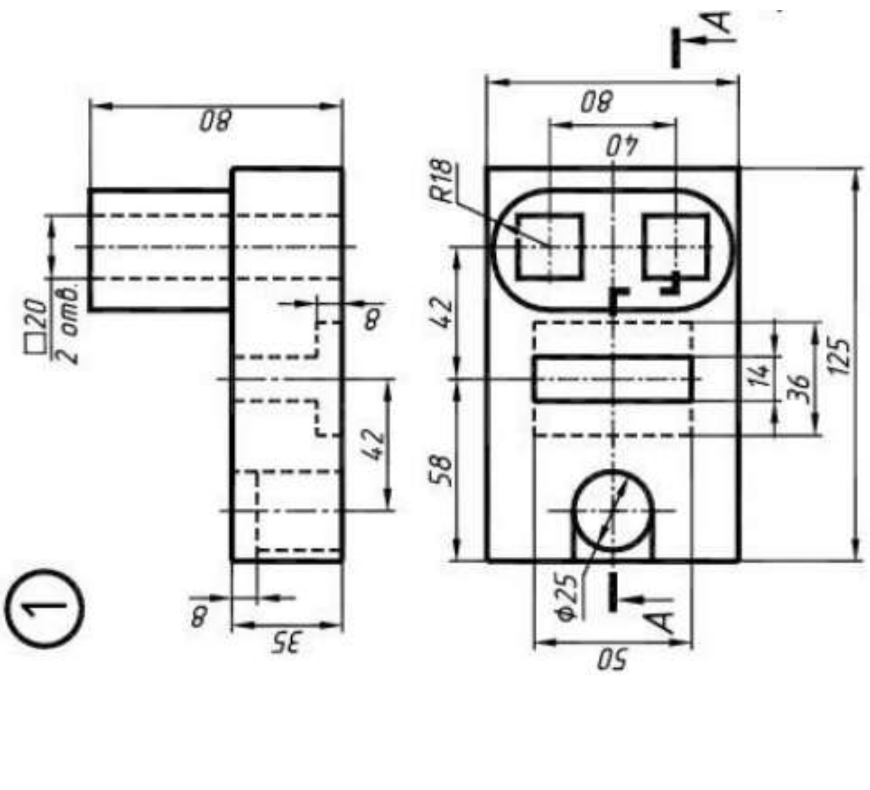
Мета роботи: Продовжити формування умінь і навичок створення 3D моделей деталей з використанням SolidWorks, створення креслень деталей.

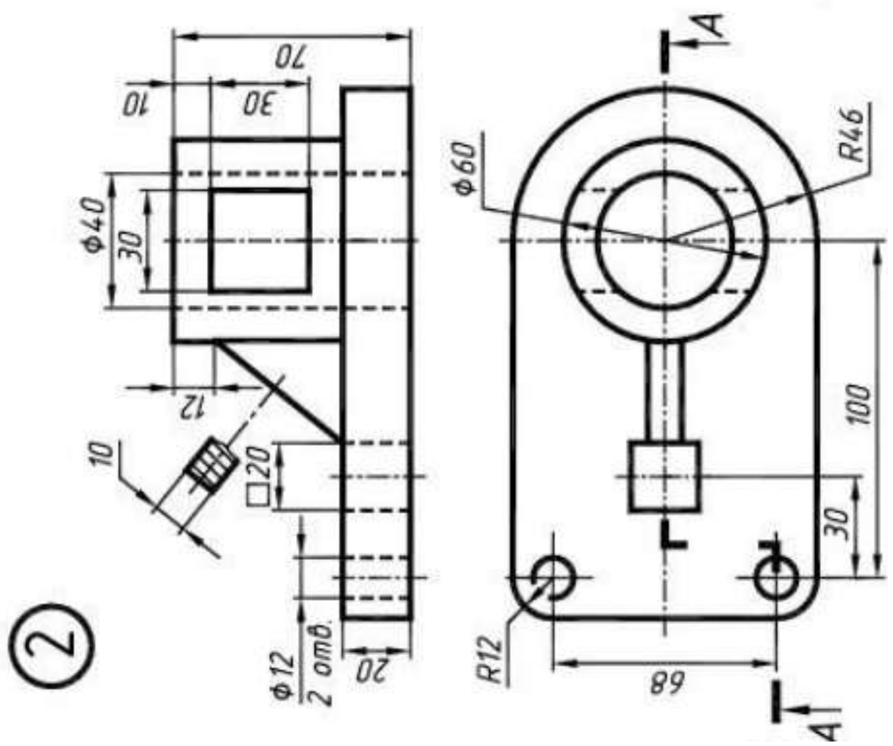
Завдання

1. На основі одержаного завдання створити 3D модель деталі.
2. Створити креслення деталі. На місці головного виду виконати ступінчастий розріз згідно індивідуального завдання. На місці виду зліва виконати або половину виду зліва з профільним розрізом, або ступінчастий розріз.
3. Нанести розміри.

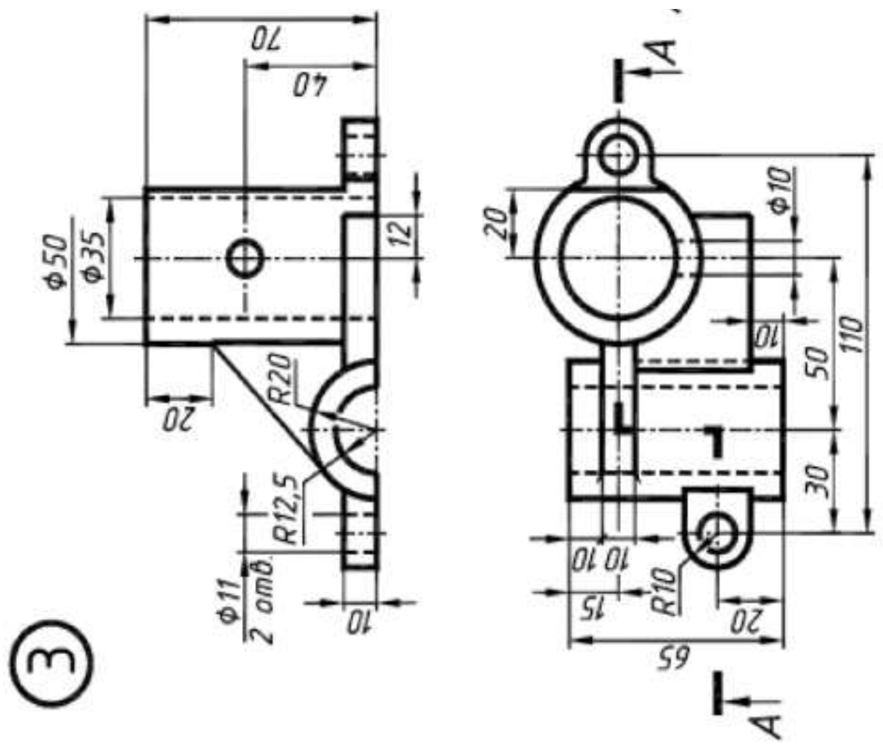
Виконання роботи

1. Уважно ознайомтесь з конструкцією деталі по двох заданих проекціях і визначте основні геометричні тіла з яких вона складається. Виконайте 3D модель деталі використовуючи SolidWorks.
2. Виконайте креслення деталі.
3. На місці головного виду виконайте ступінчастий розріз згідно індивідуального завдання.
4. На місці виду зліва виконайте або половину виду зліва з профільним розрізом, або ступінчастий розріз.
5. Нанесіть розміри.

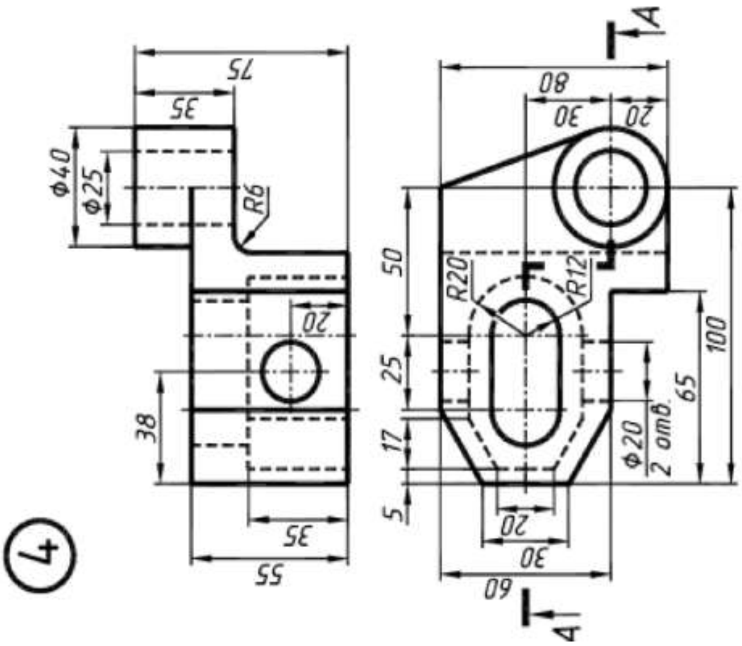


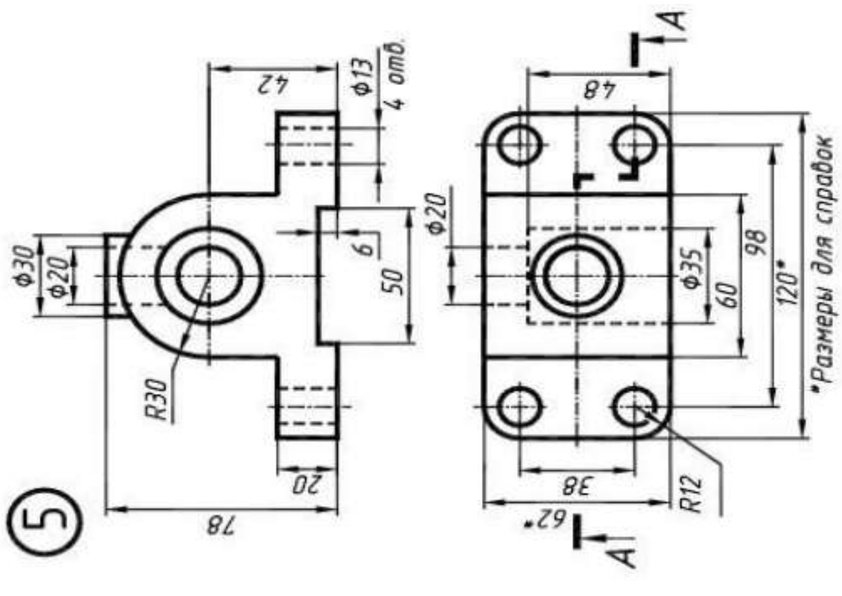


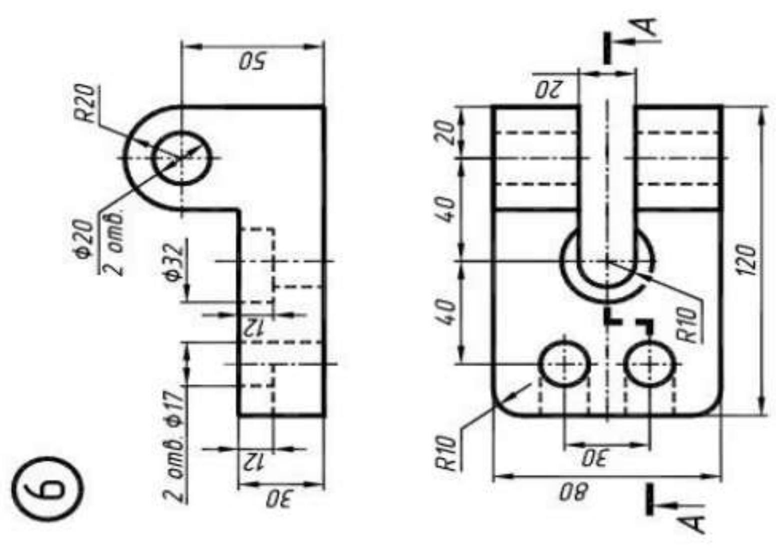
2
70
10
30
Ф40
30
12
10
□20
Ф12
2 отв.
20
Ф60
R46
100
30
R12
89
A
A

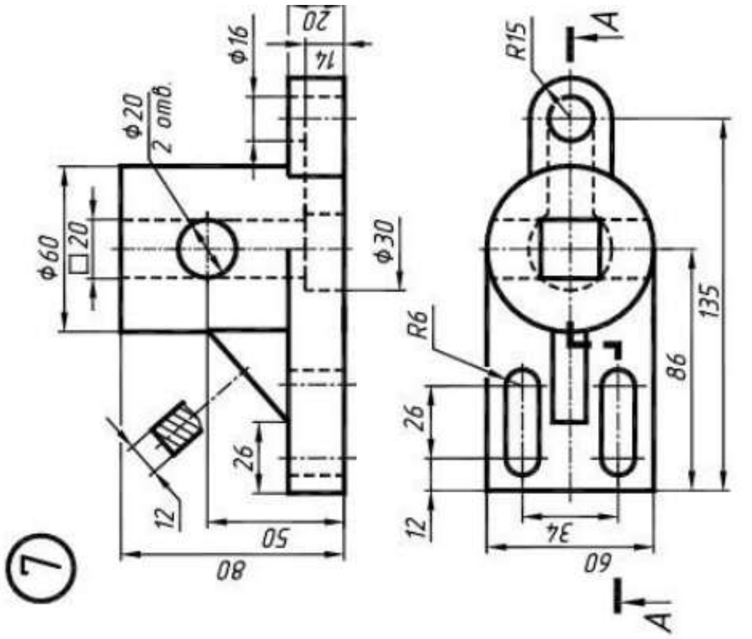


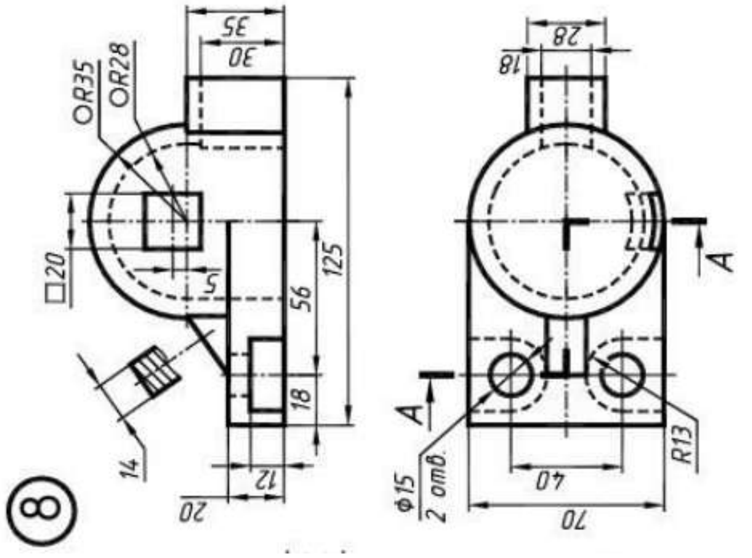
3
70
40
Ф50
Ф35
12
20
R20
R12,5
Ф11
2 отв.
10
20
Ф10
10
50
110
30
10 10
15
R10
20
65
A
A

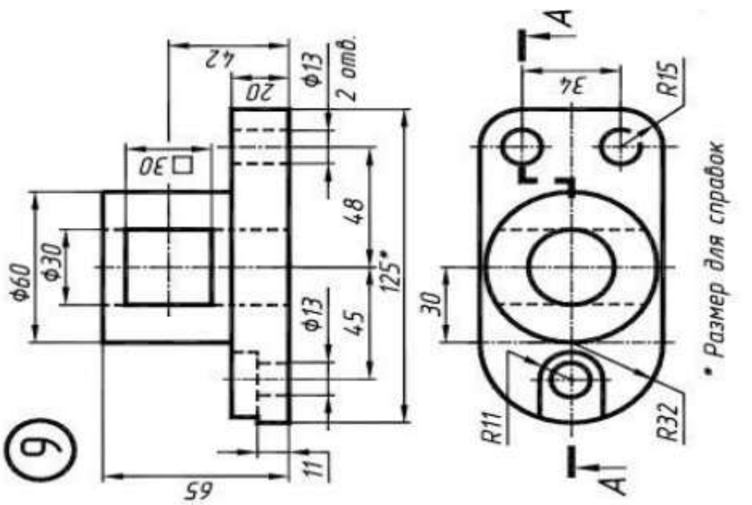

4
75
35
Φ40
Φ25
R6
80
30
20
50
R20
R12
25
17
5
100
65
Φ20
2 отв.
38
20
35
55
20
30
60
A

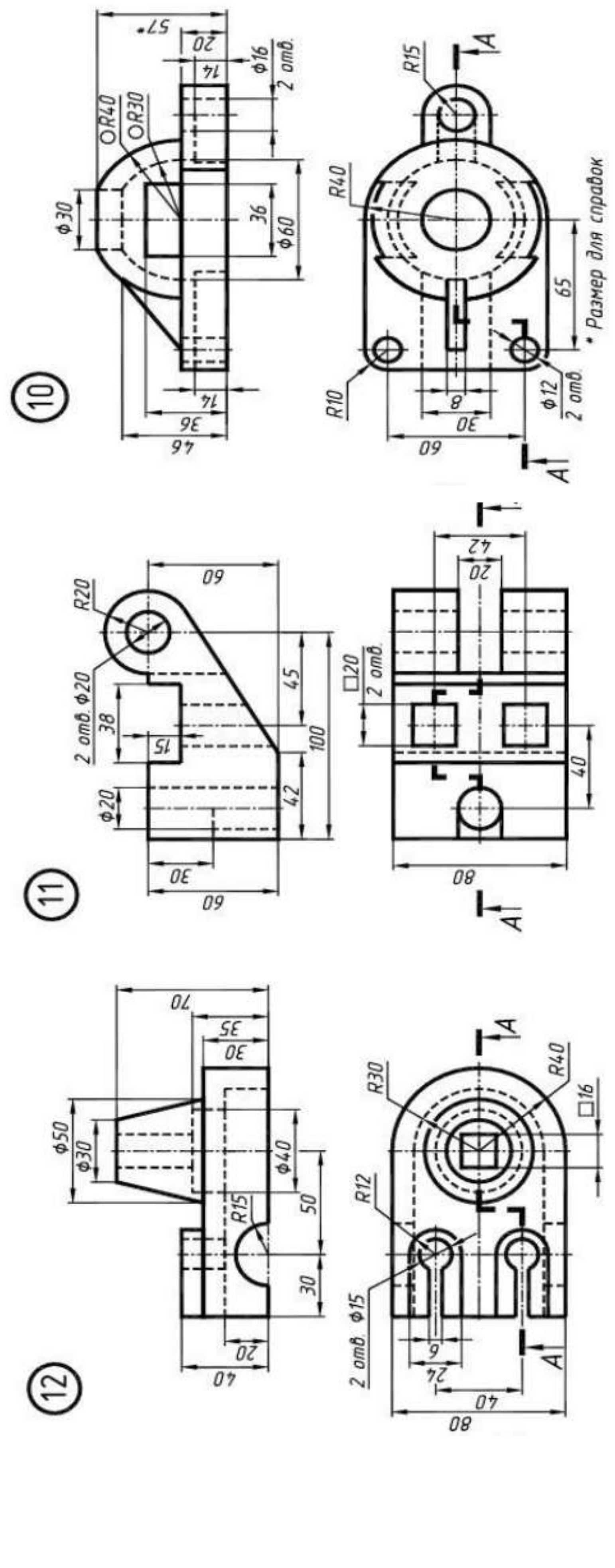

5
42
Φ13
4 отв.
Φ30
Φ20
R30
6
50
20
78
48
Φ20
Φ35
60
98
120*
*Размеры для справок
38
R12
62*
A


6
50
R20
Φ20
2 отв.
Φ32
12
2 отв. Φ17
12
30
20
20
40
40
120
R10
R10
30
80
A









10
11
12
* Размер для справок

ПРАКТИЧНА РОБОТА 5

Розробка 3D-моделей та 2D-креслень деталей в САПР Solidworks.

Деталь 3.

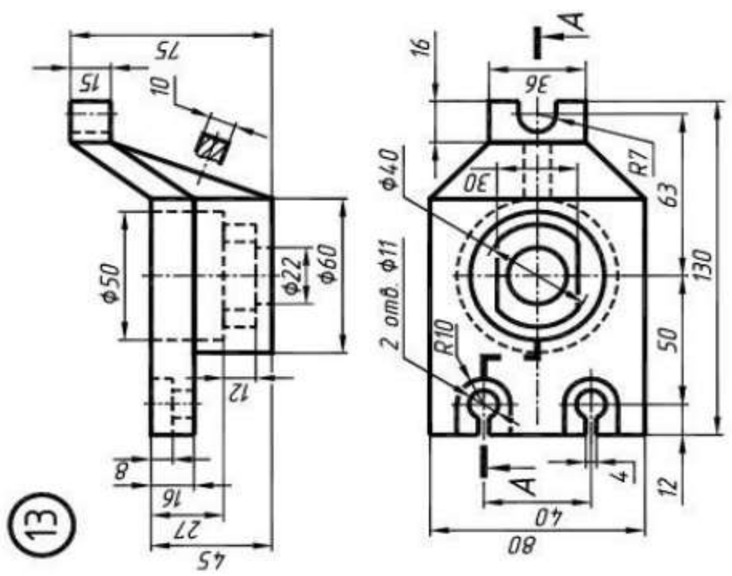
Мета роботи: Продовжити формування умінь і навичок створення 3D моделей деталей з використанням SolidWorks, створення креслень деталей.

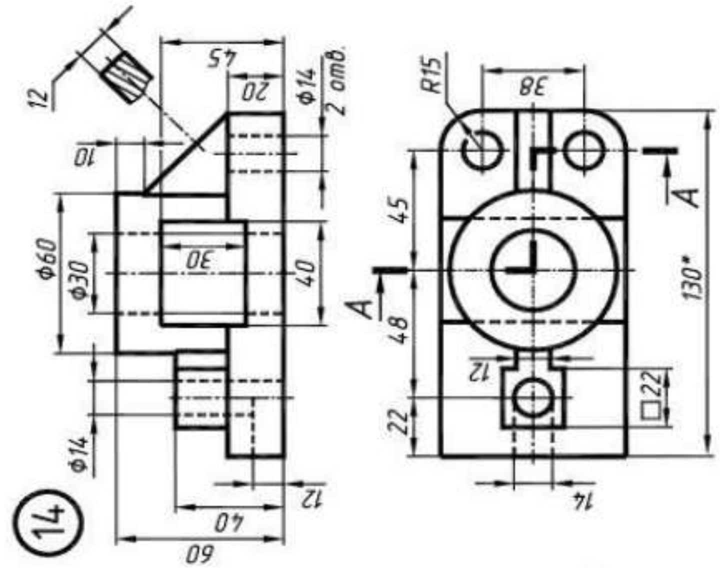
Завдання

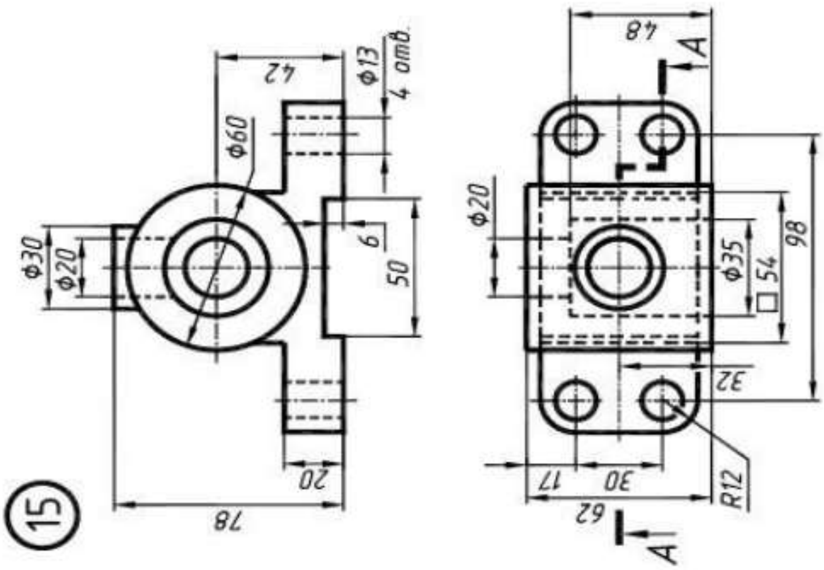
1. На основі одержаного завдання створити 3D модель деталі.
2. Створити креслення деталі. На місці головного виду виконати ступінчастий розріз згідно індивідуального завдання. На місці виду зліва виконати або половину виду зліва з профільним розрізом, або ступінчастий розріз.
3. Нанести розміри.

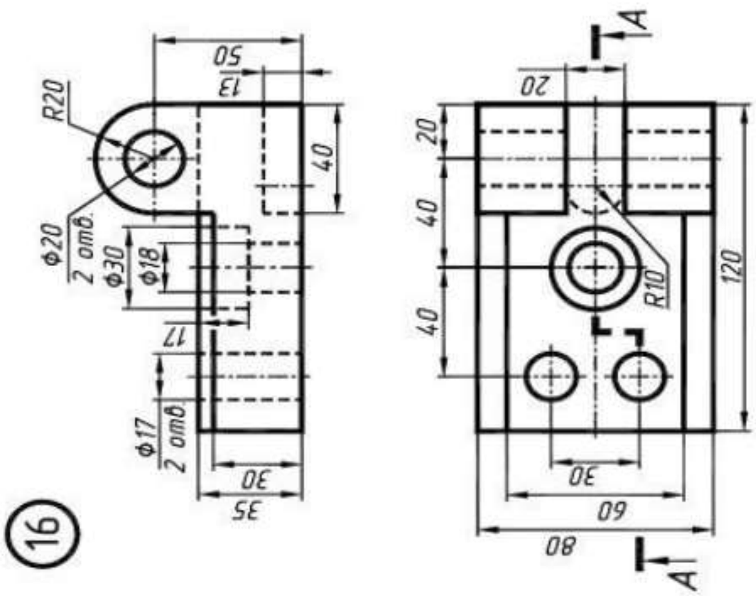
Виконання роботи

1. Уважно ознайомтесь з конструкцією деталі по двох заданих проекціях і визначте основні геометричні тіла з яких вона складається. Виконайте 3D модель деталі використовуючи SolidWorks.
2. Виконайте креслення деталі.
3. На місці головного виду виконайте ступінчастий розріз згідно індивідуального завдання.
4. На місці виду зліва виконайте або половину виду зліва з профільним розрізом, або ступінчастий розріз.
5. Нанесіть розміри.









ПРАКТИЧНА РОБОТА 6

Розробка 3D-моделей та 2D-креслень деталей в САПР Solidworks.

Деталь 4.

Мета роботи: Продовжити формування умінь і навичок створення 3D моделей деталей з використанням SolidWorks, створення креслень деталей.

Завдання.

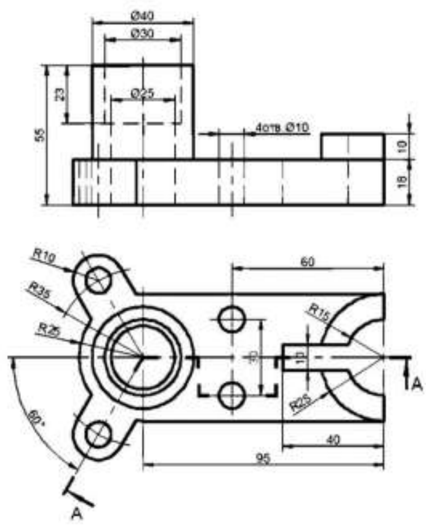
1. На основі одержаного завдання створити 3D модель деталі.
2. Створити креслення деталі. На місці головного виду виконати ступінчастий розріз згідно індивідуального завдання. На місці виду зліва виконати або половину виду зліва з профільним розрізом, або ступінчастий розріз.
3. Нанести розміри.

Номери варіантів завдань знаходяться в списку групи

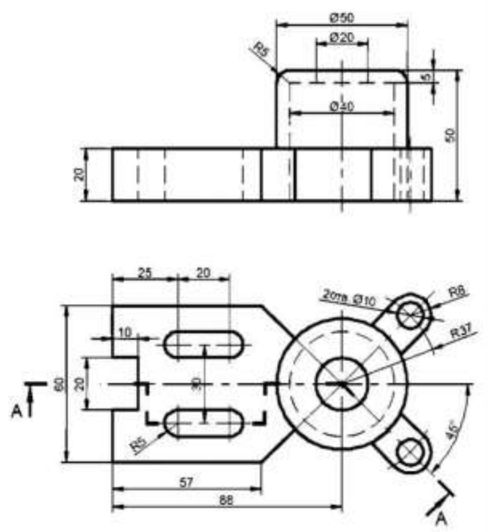
Виконання роботи.

1. Уважно ознайомтесь з конструкцією деталі по двох заданих проекціях і визначте основні геометричні тіла з яких вона складається. Визначте послідовність побудови майбутньої 3D моделі, керуючись вимогами мінімізації кількості використаних операцій. Виконайте 3D модель деталі використовуючи SolidWorks.
2. Виконайте креслення деталі.
3. На місці головного виду виконати складний розріз згідно індивідуального завдання. На місці виду зліва виконати або половину виду зліва з профільним розрізом, або ступінчастий розріз.
4. Нанесіть розміри.

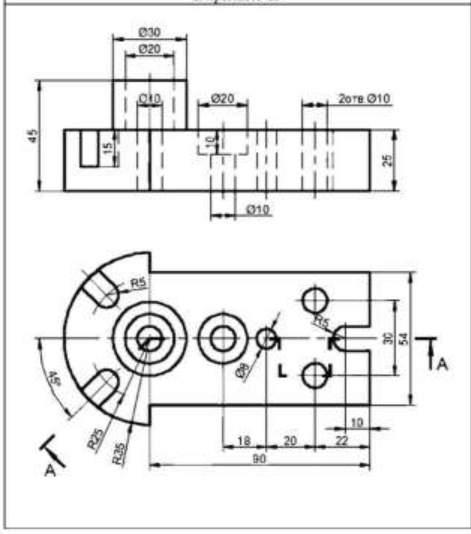
Варіант№1



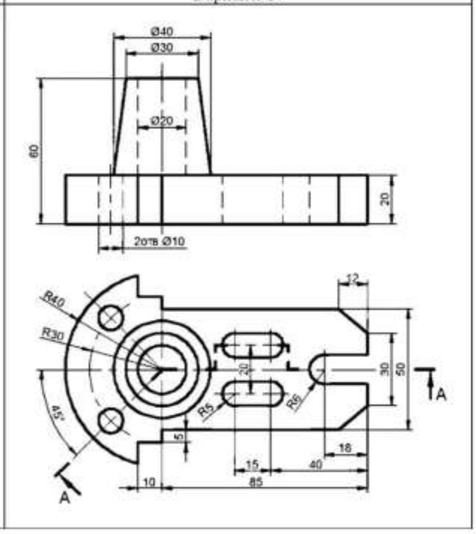
Варіант №2



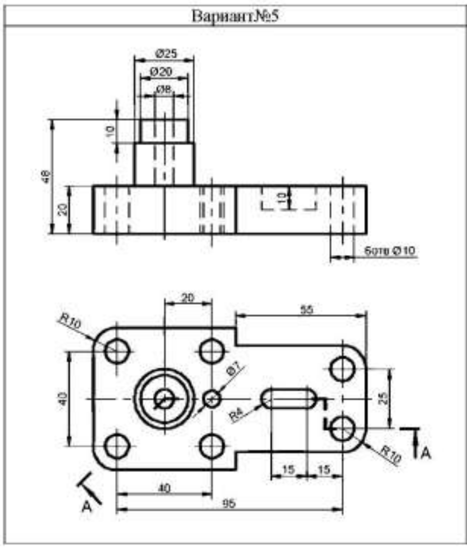
Вариант№3



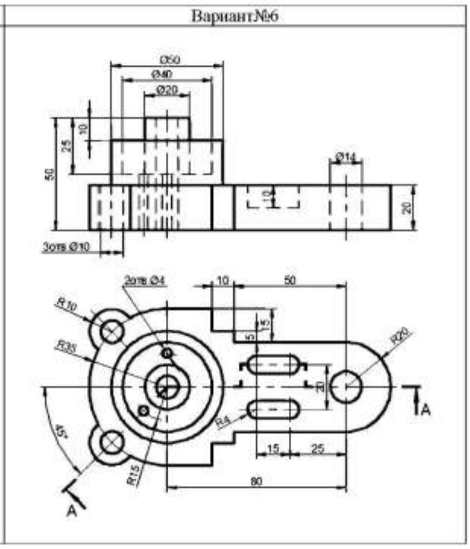
Вариант№4



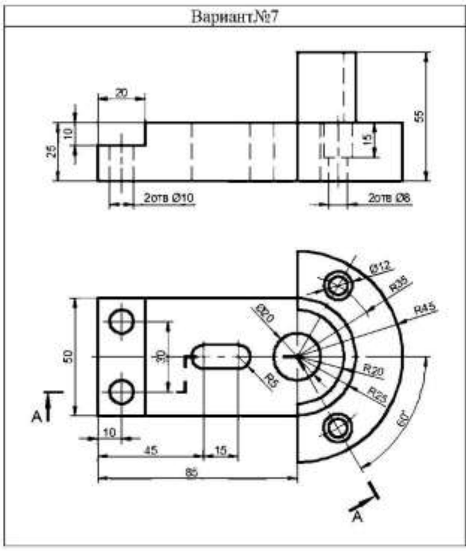
Вариант№5



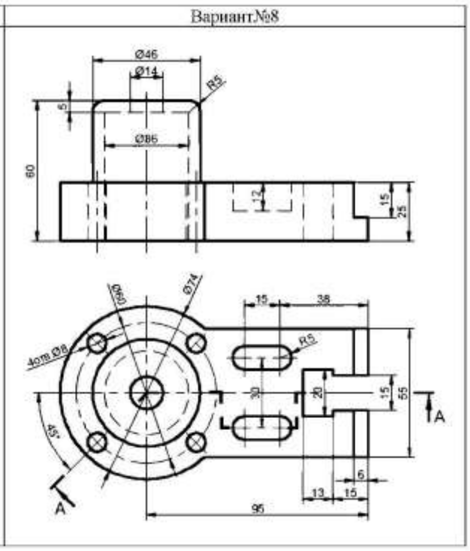
Вариант№6



Вариант№7



Вариант№8



ПРАКТИЧНА РОБОТА 7

Розробка 3D-моделей та 2D-креслень деталей в САПР Solidworks.

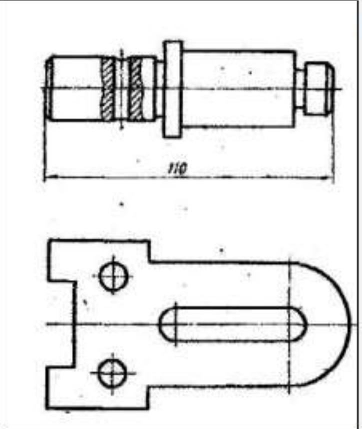
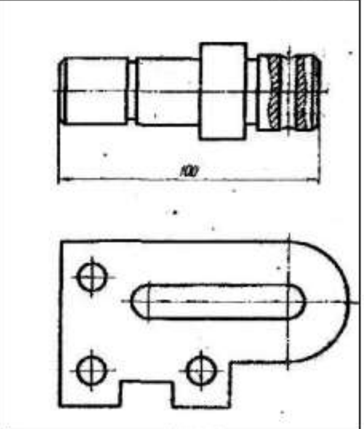
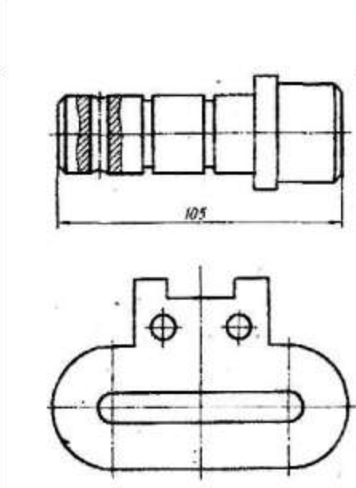
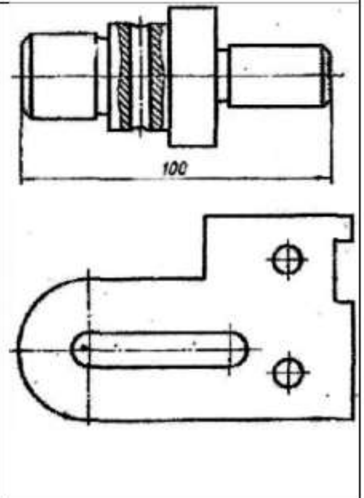
Деталь 5.

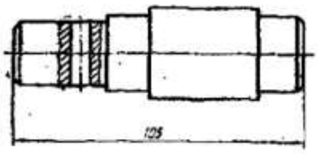
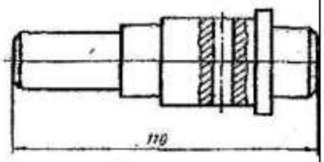
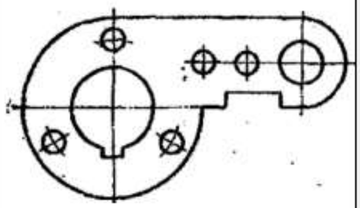
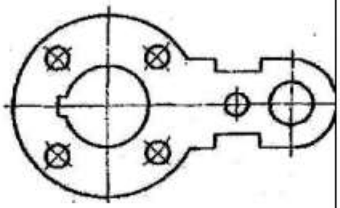
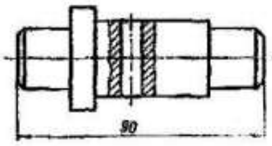
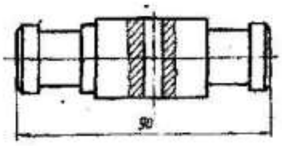
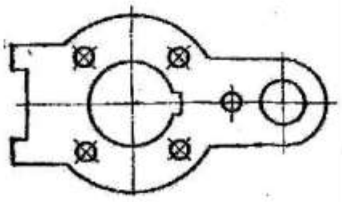
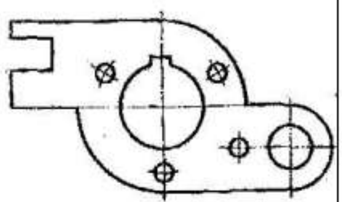
Мета роботи – побудувати 3D-модель деталі в CAD системі за вибором студента (можливі системи – Solidworks, Аскон-Компас, Autodesk Inventor або будь-які інші).

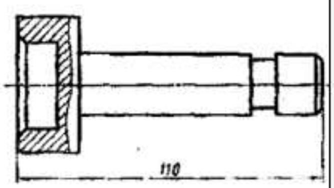
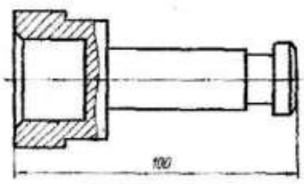
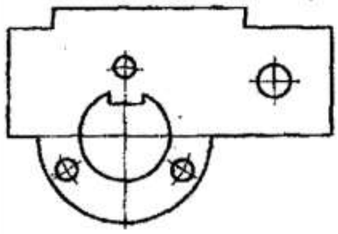
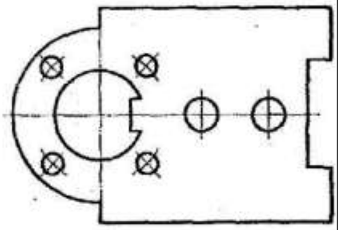
Ход роботи

Обрати завдання за варіантом, який відповідає порядковому номеру у наведеній таблиці 1 і зображенню представленому у таблиці 1

Таблиця 1

Варіант		**Варіант**	
1 **15**		**2** **16**	
Варіант		**Варіант**	
3 **17**		**4** **18**	

Варіант		**Варіант**	
5		**6**	
19		**20**	
Варіант		**Варіант**	
7		**8**	
21		**22**	

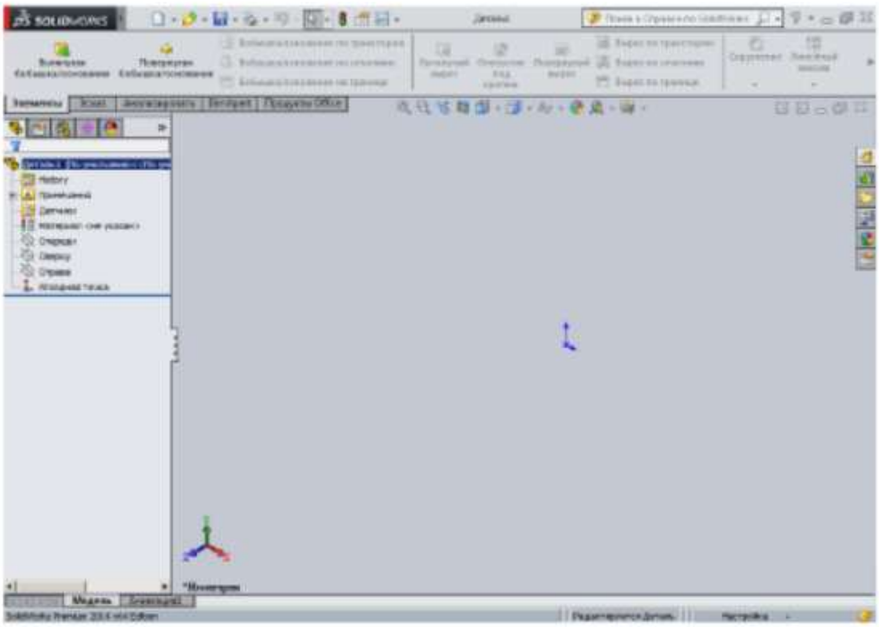
Варіант		**Варіант**	
9		**10**	
23		**24**	

ПРАКТИЧНА РОБОТА 8

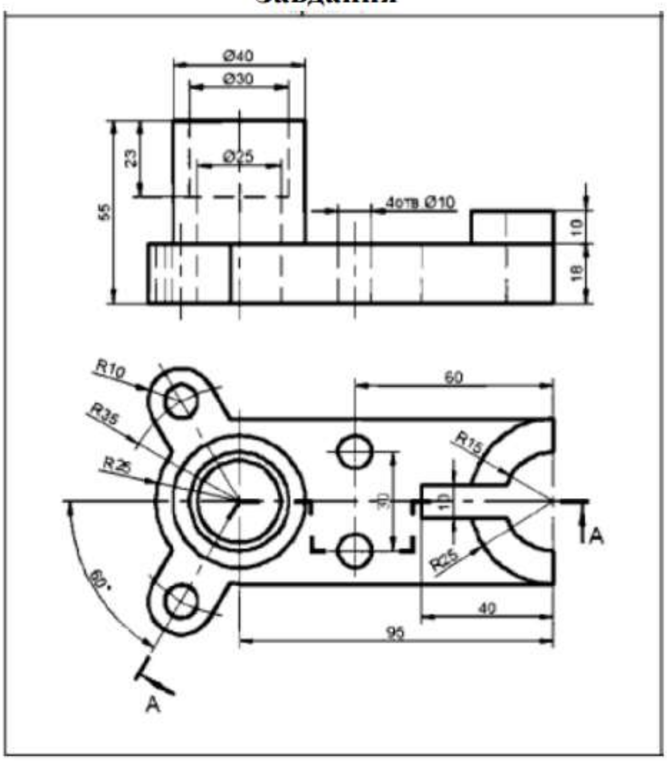
Робота із складальними кресленнями в Solidworks

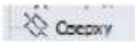
Мета роботи: побудувати 3Д модель та зробити складальний кресленик

1. Будуємо 3D модель деталі. Запускаємо SolidWorks. Для того, щоб побудувати модель натиснути **PART** і підтвердити **OK.**

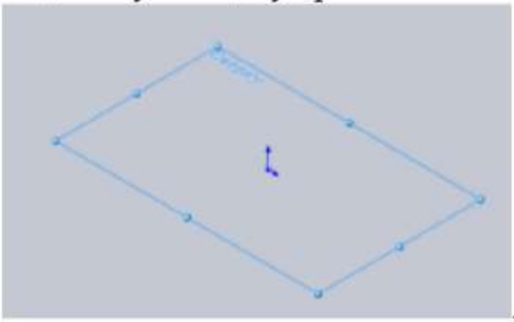


Завдання



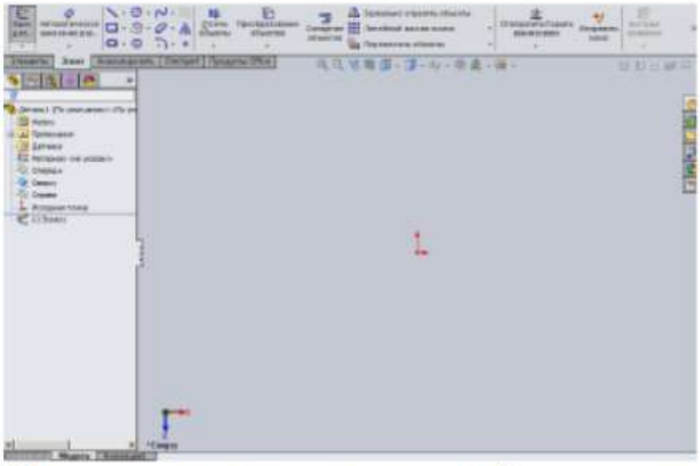
В даному випадку треба починати з основи. Вибираємо площину 

.

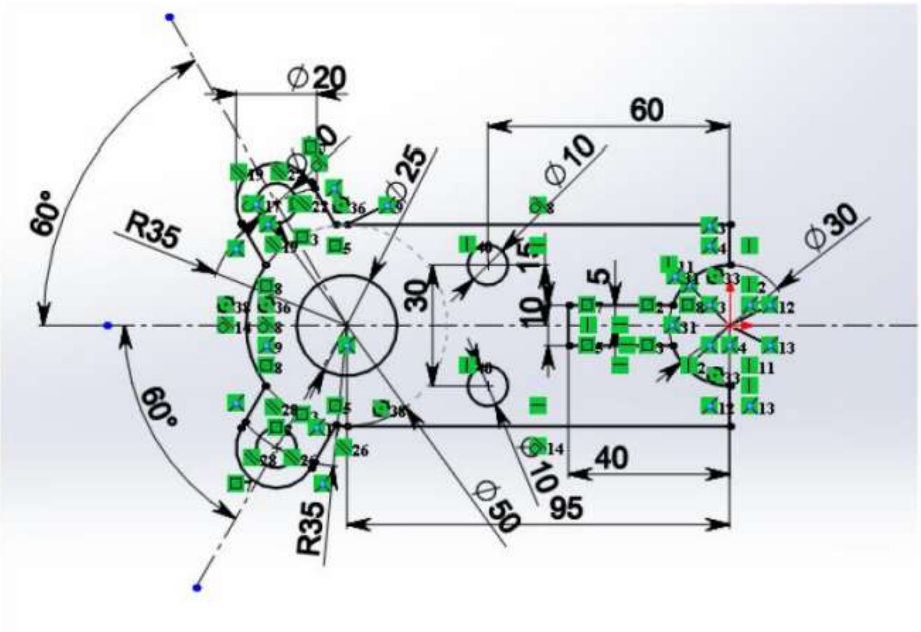

. Натискаємо 

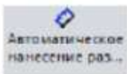
. Натискаємо 

.



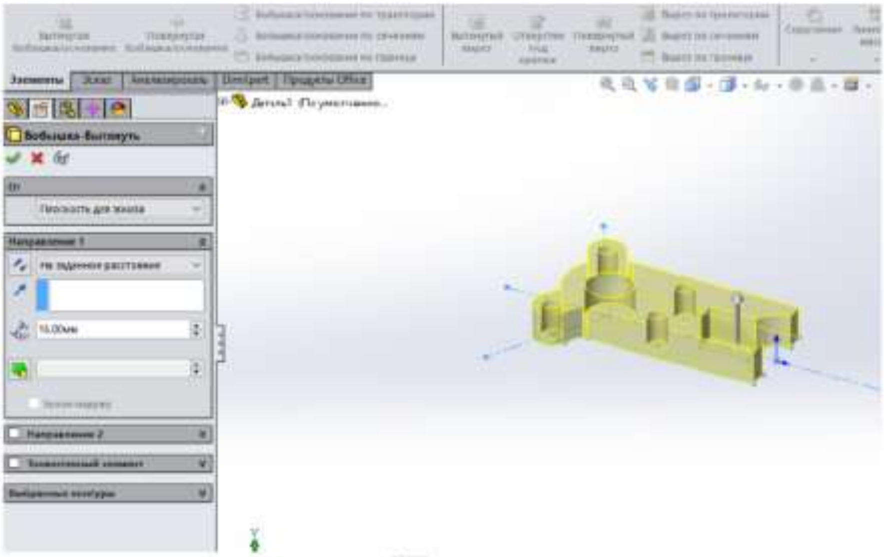
Центр координат розташований по центру області побудови. Будуємо ескіз основи повністю з отворами, які наскрізні.



Щоб закінчити операцію тиснемо . Проставляємо розміри 

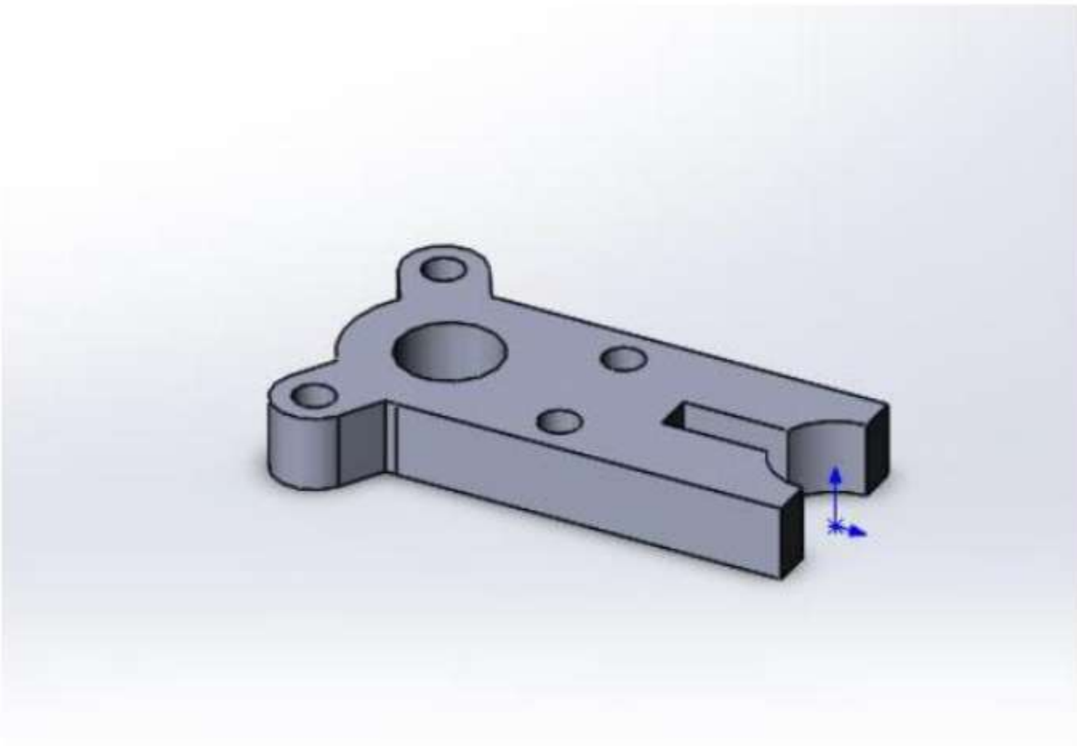
.

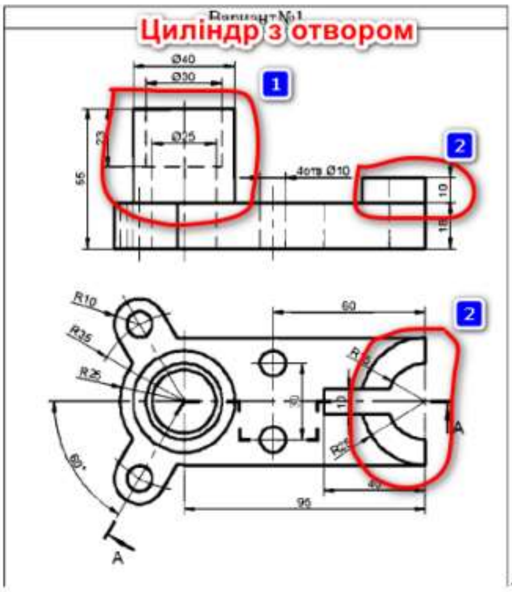
Закриваємо ескіз натискаємо на . Вибираємо , .



Витягуємо на 18 мм. Натискаємо .

Витягуємо на 18 мм. Натискаємо .

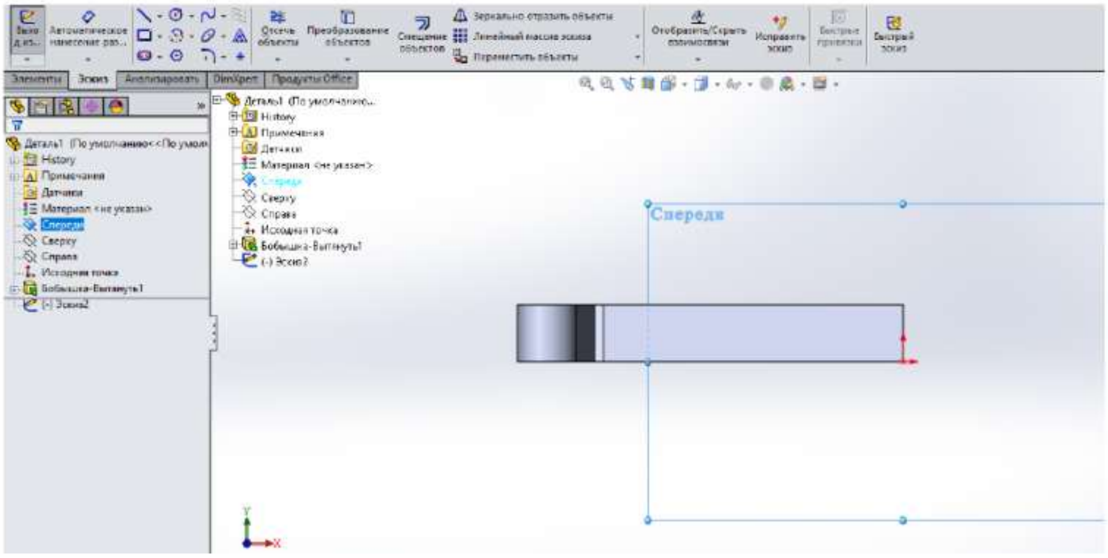


Залишилось зробити 

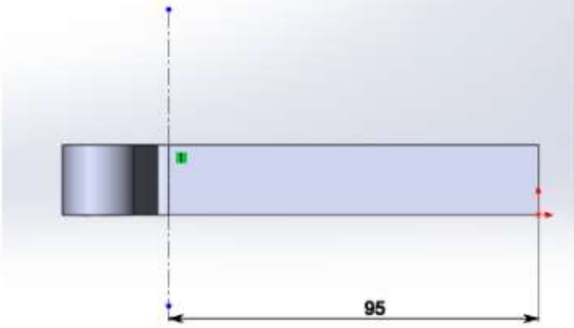
.

Циліндр з отвором зробимо обертанням. Вибираємо площину 

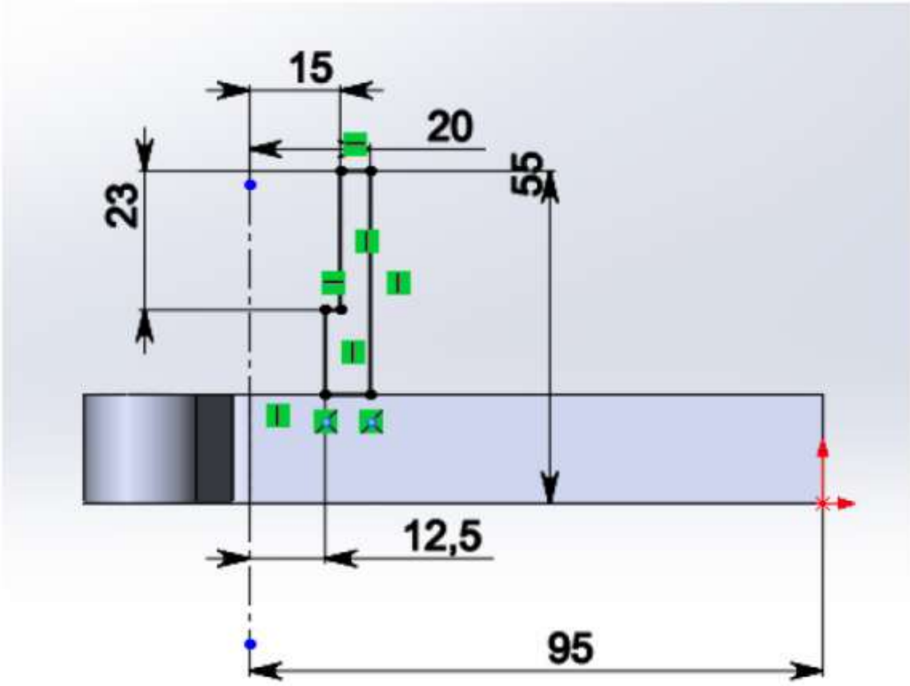
.



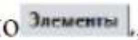
Ставимо осьову лінію на відстані 95 мм від правого краю.

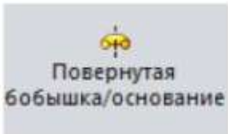


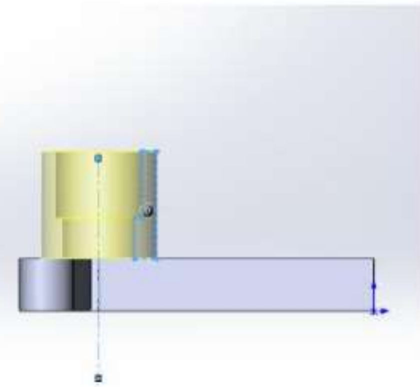
. Будуємо лінічми профіль, який будемо обертати, ставимо розміри.



. Закриваємо ескіз натискаємо на 

. Вибираємо 

, 



ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

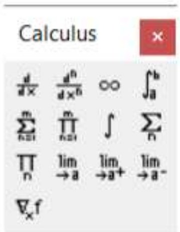
Початкове знайомство з пакетом MathCAD. Виконання в пакеті MathCAD апроксимації функції заданої таблично поліномами заданої степені

Мета роботи – знайти значення границь, першої та другої похідної функції, визначеного та невизначеного інтеграла з використанням системи MathCAD.

Порядок виконання роботи

1. Розрахувати границі.
2. Розрахувати похідні фунцій та значення похідної в точці.
3. Розрахувати визначені та невизначені інтеграли.

Приклади розрахунків



$$\lim_{x \to 1} \frac{\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 1\right)}{x + 10} \rightarrow \frac{8}{11}$$

$$y(x) := 2\sin(x) + \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\frac{d}{dx}y(x) \rightarrow 2\cdot\cos(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

$$y(x) := 2\sin(x) + \frac{1}{\cos(x)}$$

$$x := \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{d}{dx}y(x) \to 2\cdot\sqrt{3} + 1$$

$$\int (2\sin(x) - \cos(3x))\,dx \to -\frac{\sin(\pi)}{3} - 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\int_1^2 \left(x^3 + 2x + 5x\right)dx \to \frac{57}{4}$$

Завдання до практичної роботи

Варіанти	Обчислити вказані границі:
1,11	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2\cdot x+5}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[2\cdot\sin x-\cos x+ctg\,x]$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$; $\lim\limits_{x\to1}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$
2,12	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\cdot x^3-2\cdot x^2+1}{3\cdot x^3-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{2\cdot x+5}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{3\cdot x^2-2\cdot x-1}{x^3+4}$
3,13	$\lim\limits_{x\to0}\frac{4\cdot x^3-2\cdot x^2+x}{3\cdot x^3+2\cdot x}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5\cdot x+6}{x^2-12\cdot x+20}$
4,14	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+3\cdot x-10}{3\cdot x^2-5\cdot x-2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[2\cdot\sin x+\cos x-tg\,x]$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$; $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$

5,15	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2\cdot x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$
6,16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[2\cdot\sin x-3\cdot\cos x+arctg x]$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$
7,17	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg\,x$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cdot\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$
8,18	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi\cdot x}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\arcsin x}{3\cdot x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3}$
9,19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\cdot\sec x}$
10,20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\alpha\cdot x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2\cdot x+3}{2\cdot x+1}\right]^{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\cdot tg^2x\right)^{ctg^2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^x$

Варіанти	Обчислити першу та другу похідні фунцій:
1,11	$y=x^3$; $y=2\cdot\sin x+\cos 3x$; $y=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; $y=\sqrt{\sec 2x}$ $при\ x=\dfrac{\pi}{6}$
2,12	$y=\dfrac{1}{x}$; $y=tg(a\cdot x+b)$; $y=\ln\left(x^2+x\right)$; $y=\dfrac{x^3}{1-x}$ $при\ x=2$
3,13	$y=\sqrt{x}$; $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; $y=\ln\left(x^3-2\cdot x+5\right)$; $y=\left(x^2+a^2\right)\cdot arctg\dfrac{x}{a}$ $при\ a=3,\ x=1$
4,14	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $y=\sin 2x\cdot\cos 3x$; $y=x\cdot\ln x$; $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $x=2,\ a=2$
5,15	$y=\sin^2 x$; $y=ctg^2 5x$; $y=\ln^3 x$; $y=a^x$ $a=2,\ x=1$

6,16	$y = 2\cdot x^2 - x;\ y = x\cdot\sin x + \cos x;\ y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right);\ y = e^x\cdot x\ x = 2$
7,17	$y = x^4 + 3\cdot x^2 - 6;\ y = \sin^3 x\cdot\cos x;\ y = \ln(\ln x);\ y = x\cdot\ln x\quad x = 1{,}2$
8,18	$y = 6\cdot x^3 - x^2;\ y = \sin^2 x\cdot\left(3\cdot\cos^2 x - \sin^2 x\right);\ y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};\ y = \sin^3 x\quad x = \frac{\pi}{3}$
9,19	$y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5};\ y = a\cdot\sqrt{\cos 2x};\ y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x};\ y = x\cdot\sin x\quad x = \frac{\pi}{8}$
10,20	$y = 2\cdot a\cdot x^3 - \frac{x^2}{b} + c;\ y = a\cdot\sin^3\frac{x}{3};\ y = -\frac{\cos x}{2\cdot\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2};\ y = \ln\sin x\ x = \frac{\pi}{4}$

Варіанти	Розв'язати невизначені інтеграли аналітично та знайти розв'язки у межах [1; 2]
1,11	$\int x^5 dx;\ \int \sin^3 x dx;\ \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-x+3}};\ \int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx;$
2,12	$\int\left(x+\sqrt{x}\right)dx;\ \int\sin^3 x\cdot\cos^4 x dx;\ \int x^2\cdot\sqrt{4-x^2}dx;\ \int\frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}}dx;$
3,13	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\cdot\sqrt{x}}{4}\right)dx;\ \int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx;\ \int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx;\ \int\frac{1}{x\sqrt{-4+4x+x^2}}dx;$
4,14	$\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right)dx;\ \int\sin^4 x\cdot\cos^4 x dx;\ \int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx;\ \int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx;$
5,15	$\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx;\ \int ctg^5 x dx;\ \int\frac{1}{\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}}dx;\ \int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx;$
6,16	$\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx;\ \int\sec^8 x dx;\ \int\frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}dx;\ \int\sqrt{2x-x^2}dx;$

7,17	$\int e^{5x}dx;\ \int tg^4x\cdot\sec^4 xdx;\ \int\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}dx;\ \int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx;$
8,18	$\int\sin axdx;\ \int\frac{1}{\cos^4 x}dx;\ \int\frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx;\ \int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}dx;$
9,19	$\int\frac{\ln x}{x}dx;\ \int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx;\ \int\frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}dx;\ \int\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx;$
10,20	$\int\frac{1}{\sin^2 3x}dx;\ \int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx;\ \int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx;\ \int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx;$

Файл шаблону звіту викладений на Освітньому порталі

Зміст звіту

1. Тема роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання на виконання роботи.
4. Скріншот екрана MathCAD з виконаними розрахунками, файл MathCAD.
5. Висновки.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

Чисельні методи. Апроксимація табличних даних лінійною функцією методом найменших квадратів (Excel)

Мета роботи: набути навичок побудови апроксимуючих функцій та обчислення їхніх найкращих параметрів, використовуючи метод найменших квадратів з використанням табличного процесора Excel.

Теоретичні відомості

Під апроксимацією розуміють заміну деякої вихідної функції f(x) наближеною функцією $\phi(x)$, при чому в заданій області існування функцій відхилення між цими функціями повинні бути найменшими. Функцію $\phi(x)$ називають апроксимуючою функцією.

Функція, яку отримуємо на основі аналізу дослідних даних, називають емпіричною формулою.

Нехай задана деяка функція f(x) на скінченій множині точок $x_1, x_2, ..., x_n$ (функція задається дискретно). Потрібно побудувати апроксимуючу функцію $\phi(x)$, значення якої в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ знаходяться як можна ближче до значень функції f(x).

Емпірична функція будується в два етапи:

1. Зображуємо графічно значення вихідної функції f(x). Проводимо криву якомога ближче до сукупності точок функції f(x) та візуально визначаємо графіком якої із відомих нам функцій є ця крива.

2. Визначаємо найкращі параметри вибраної нами емпіричної функції.
Визначення параметрів емпіричної залежності. Метод найменших квадратів.
Для підбору параметрів емпіричних формул використовують метод найменших квадратів.

Припустимо, що було проведено експеримент, в результаті чого отримали наступну таблицю значень.

Таблиця 1

x	x_0	x_1	x_2	…	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	…	y_n

Був вибраний вигляд емпіричної формули і знайдено, що $y = F(x, a_1, a_2, ..., a_m)$.
Потрібно визначити значення параметрів $a_1, a_2, ..., a_m$ таким чином, щоб сума квадратів відхилень було мінімальним.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - F(x_i, a_1, a_2, ..., a_m))^2 \to \min$$

Відповідно теорії необхідною умовою мінімуму функції є рівність нулю частинних похідних функції.

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_n} = 0$$

Розв’язавши систему рівнянь (18), отримаємо значення параметрів $a_1, a_2, ..., a_m$, які задовольняють умові мінімуму.

Визначення параметрів лінійної емпіричної залежності

Нехай між вихідними експериментальними даними $(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$ існує лінійна залежність $y = ax + b$. Функція суми квадратів відхилень має вигляд:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Система рівнянь для визначення параметрів a, b буде мати вигляд:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0$$

Звідси можна вивести, що

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Оцінку похибки апроксимуючої функції здійснюється за допомогою середньоквадратичного відхилення:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2}{n - 1}}$$

де Y_i розрахункові значення за емпіричною формулою;

y_i таблично задані значення функції;

n – кількість точок.

Дуже зручним при виборі емпіричних залежностей можуть бути приведені в таблиці 3 функції та їх лінійні аналоги.

Таблиця 3

Вигляд емпіричної функції	Лінійний аналог	Значення параметрів
$y = ax^b$	$Y = A + bX$	$Y = \ln y$; $A = \ln a$; $X = \ln x$
$y = ab^x$	$Y = A + Bx$	$Y = \ln y$; $A = \ln a$; $B = \ln b$
$y = ae^{bx}$	$Y = A + bx$	$Y = \ln y$; $A = \ln a$
$y = a + \frac{b}{x}$	$Y = a + bX$	$X = \frac{1}{x}$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$Y = a + bx$	$Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$Y = a + bX$	$Y = \frac{1}{y}$; $X = \frac{1}{x}$
$y = a \ln x + b$	$y = a + bX$	$X = \ln x$

Приклад виконання практичної роботи

Завдання: дано таблицю експериментальних даних:

x	-3	-1	0	1	2	3	4
y	2,9	1,0	-0,2	-1,5	-0,4	-1,5	-2,0

1. Підібрати емпіричну формулу.
2. Методом найменших квадратів визначити параметри емпіричної формули.
3. Побудувати діаграму, що містить таблично задану та емпіричну функції.
4. Обчислити середньоквадратичну похибку.

Порядок виконання в MS Excel:

Лінійна залежність

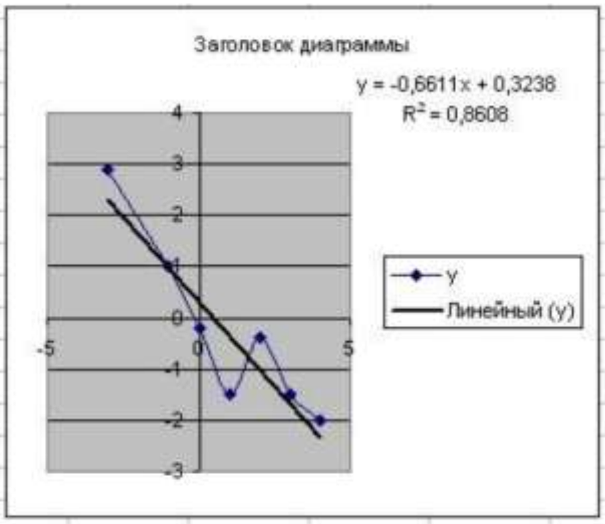
Для визначення параметрів a, b для лінійної залежності $y = ax + b$ використовуємо формули (20).

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \quad ; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

1. Створюємо таблицю в Excel:

	A	B
1	x	y
2	-3	2,9
3	-1	1
4	0	-0,2
5	1	-1,5
6	2	-0,4
7	3	-1,5
8	4	-2
9		

2. За даними таблиці будуємо діаграму (тип діаграми – Точечная). Натискаємо правою кнопкою миші в будь-якому місці лінії діаграми і вибираємо команду *Добавить линию тренда...*, вибираємо тип – „*Линейная*”, натискаємо на вкладку „Параметры”, відмічаємо перемикачі „показывать уравнение на диаграмме”, „поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)”.



3. Обчислення коефіцієнтів a, b оформимо в таблицю

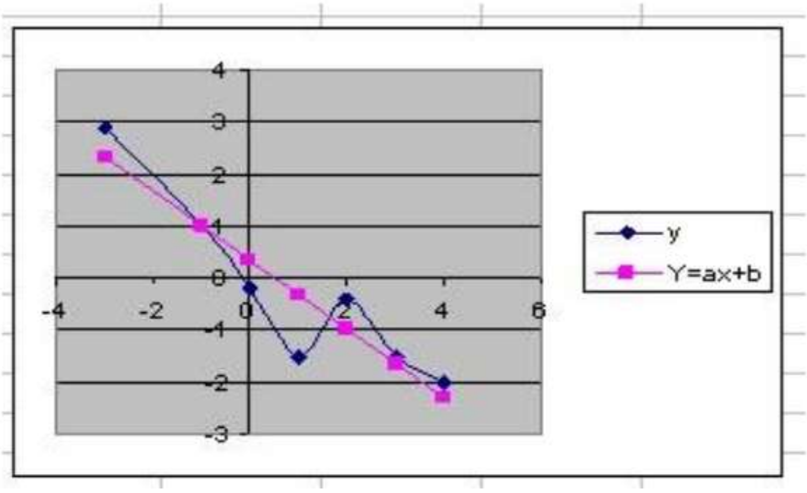
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№	x	y	x^2	xy	параметри		Y=ax+b	$(y\text{-}Y)^2$
2	1	-3	2,9	9	-8,7	a=	-0,66	2,30697	0,3517
3	2	-1	1	1	-1	b=	0,324	0,98484	0,0002
4	3	0	-0,2	0	0			0,32377	0,2743
5	4	1	-1,5	1	-1,5			-0,3373	1,3519
6	5	2	-0,4	4	-0,8			-0,9984	0,358
7	6	3	-1,5	9	-4,5			-1,6594	0,0254
8	7	4	-2	16	-8			-2,3205	0,1027
9 10	$\sum$	**6**	**-1,7**	**40**	**-24,5**				**2,4643**

4. Обчислення середньоквадратичної похибки

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2{,}464303}{7 - 1}} = 0{,}640872$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№	x	y	x^2	xy	параметри		Y=ax+b	$(y\text{-}Y)^2$
2	1	-3	2,9	=B2^2	=B2*C2	a=	=(A8*E9-B9*C9)/(A8*D9-B9^2)	=$G$2*B2+$G$3	=(C2-H2)^2
3	2	-1	1	=B3^2	=B3*C3	b=	=(C9-G2*B9)/A8	=$G$2*B3+$G$3	=(C3-H3)^2
4	3	0	-0,2	=B4^2	=B4*C4			=$G$2*B4+$G$3	=(C4-H4)^2
5	4	1	-1,5	=B5^2	=B5*C5			=$G$2*B5+$G$3	=(C5-H5)^2
6	5	2	-0,4	=B6^2	=B6*C6			=$G$2*B6+$G$3	=(C6-H6)^2
7	6	3	-1,5	=B7^2	=B7*C7			=$G$2*B7+$G$3	=(C7-H7)^2
8	7	4	-2	=B8^2	=B8*C8			=$G$2*B8+$G$3	=(C8-H8)^2
9	Σ	=СУММ(B2:B8)	=СУММ(C2:C8)	=СУММ(D2:D8)	=СУММ(E2:E8)				=СУММ(I2:I8)
10									
11							похибка=	=КОРЕНЬ(I9/(A8-1))	

5. Побудова таблично заданої та емпіричної функцій на одній діаграмі.



Виконання практичної роботи

Завдання: дано таблицю експериментальних даних.
1. Підібрати емпіричну формулу.
2. Методом найменших квадратів визначити параметри емпіричної формули.
3. Побудувати діаграму, що містить таблично задану та емпіричну функції.
4. Обчислити середньоквадратичну похибку.

Варіант 1

x_i	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
y_i	2.4	2.7	3.1	3.3	3.8	4.2	4.6	5.7	5.96	6.35

Варіант 2

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	-0.3	0.5	0.8	1.8	2.5	2.0	1.75	1.5	1.0	0.5

Варіант 3

x_i	-3	-2	-1	0	1.5	2.5	3.2	4.0	4.5	5.2
y_i	4.8	4.2	3.7	3.6	3.3	3.1	2.8	2.3	2.1	1.8

Варіант 4

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	3.9	2.2	1.3	0.8	0.5	1.4	1.9	2.2	2.6	3.2

Варіант 5

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.2	1.7	3.3	5.1	4.6	3.0	2.2	0.9	0.5	0.1

Варіант 6

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	-6.1	-5.8	-5.2	-4.8	-4.5	-5.0	-5.2	-5.5	-6.0	-6.2

Варіант 7

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	1.0	1.7	3.3	5.1	4.6	3.2	3.0	1.9	1.5	1.2

Варіант 8

x_i	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
y_i	10.5	12.3	14.4	16.8	19.7	23	27	31.6	37	43.3

Варіант 9

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0.5	0.8	1.3	1.7	1.9	2.5	2.8	3.1	3.5	4.6

Варіант 10

x_i	-4	-2	-1	1	2	4	6	8	12	16
y_i	-2.6	-1.7	-0.9	-0.5	0.5	1.2	1.6	2.2	2.5	3.2

Варіант 11

x_i	-2.0	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6
y_i	17.7	9.245	4.52	2.054	1.125	1.09	0.890	0.006	-2.378	-7.125

Варіант 12

x_i	-2.0	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0.0	0.4	0.8	1.2	2.0
y_i	11.07	6.733	3.373	0.945	-0.489	-1.4.5	-0.52	0.996	4.56	11.89

Контрольні питання

1. Чим відрізняються задачі апроксимації, інтерполяції та екстраполяції функцій?
2. У чому полягає метод найменших квадратів для апроксимації функцій?
3. Апроксимація функції. Визначення параметрів лінійної залежності.
4. Побудова квадратичної емпіричної залежності.
5. Апроксимація функції. Визначення параметрів нелінійної залежності.
6. Оцінювання похибки емпіричної функції.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

Визначення коренів алгебраїчного і трансцендентного рівняння методом Ньютона

Мета роботи: навчитись визначати корені алгебраїчних та трансцендентних рівнянь з наперед заданою точністю методом Ньютона в середовищі Excel

Теоретичні відомості

При побудові математичних моделей деяких процесів використовують нелінійні алгебраїчні або трансцендентні рівняння. Нехай задано рівняння

$$f(x)=0,$$

де функція *f(x)* – визначена і неперервна на деякому проміжку [a, b]. Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень $x \in [a, b]$, при яких рівняння *f(x)*=0 перетворюється в тотожність. Якщо функція *f(x)* – алгебраїчний многочлен, то рівняння (23) називається алгебраїчним. Якщо функція *f(x)* містить тригонометричні, показникові або логарифмічні функції, тоді рівняння називають трансцендентним.

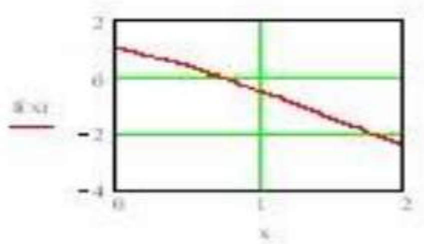
Знайти точні значення коренів заданого рівняння можна лише для найпростіших функцій *f(x)*. Нехай x^* – точний корінь, $\bar{x}$ – його наближене значення. Корінь $\bar{x}$ обчислено з заданою точністю ε, якщо $|x^* - \bar{x}|$. Процес наближеного знаходження дійсних коренів складається з двох етапів:

1. Відокремлення, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один дійсний корінь;

2. Уточнення коренів – знаходження кореня рівняння з наперед заданою точністю.

Методи відокремлення коренів:

1. Графічний. Будуємо графік функції, шукані корені отримуємо як точки перетину графіка з віссю ОХ.



2. Аналітичний метод. Аналітичний метод відокремлення коренів ґрунтується на теоремах з курсу математичного аналізу.

В результаті отримуємо відрізки ізоляції коренів рівняння, де є тільки один корінь.

Методи уточнення коренів

Ці методи застосовуються на відрізках ізоляції коренів, де є тільки один корінь.

а) метод поділу відрізка навпіл (бісекцій);

б) метод простої ітерації;

в) метод Ньютона (дотичних).

Метод Ньютона (дотичних)

Метод використовується для рівняння $f(x)=0$, що має на відрізку [a, b] один дійсний корінь, функції $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні і зберігають постійні знаки на відрізку [a, b].
Наближення до точного кореня знаходиться за формулою Ньютона, яка має вигляд:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Процес продовжується доти, поки не буде досягнута задана точність $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.
Зауваження: за початкове наближення у методі Ньютона слід брати точку $x_0 \in [a, b]$, в якій $f(x) * f''(x) > 0$.

Приклад виконання практичної роботи

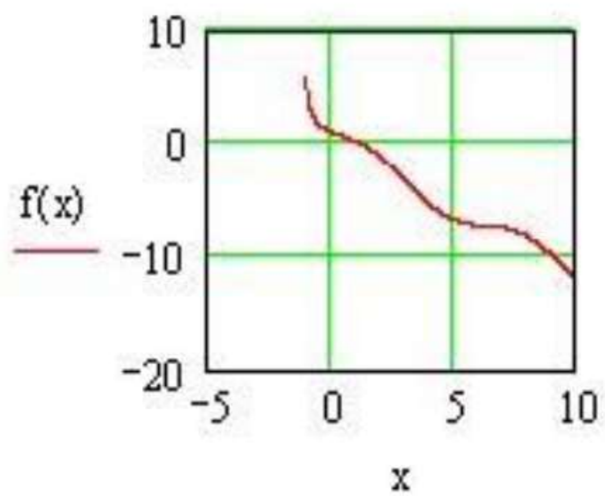
Завдання: нехай задана функція $f(x) = \sin(x) - x - \ln(1 + x) + 1$. Потрібно знайти корінь рівняння з точністю ε=0.01 методом Ньютона.

1. Відокремлюємо корені графічним способом, для цього використовують MathCad.

Завдання: нехай задана функція $f(x) = \sin(x) - x - \ln(1 + x) + 1$. Потрібно знайти корінь рівняння з точністю ε=0.01 методом Ньютона.

1. Відокремлюємо корені графічним способом, для цього використовують MathCad.

$$f(x) := \sin(x) - x - \ln(1 + x) + 1$$



На відрізку [0, 5] знаходиться єдиний корінь.

2. Визначаємо яка з точок буде братися за початкове наближення. Для цього знаходимо другу похідну і визначаємо її значення в точці $x = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow -\sin(x) + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f2(x) := -\sin(x) + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f2(0) = 1 \qquad f(0) = 1$$

$$f(0)\cdot f2(0) > 0$$

За початкове наближення беремо x=0

3. Визначаємо першу похідну функції:

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \cos(x) - 1 - \frac{1}{(1+x)}$$

4. Уточнюємо корінь методом Ньютона в Excel.

	A	B	C	D	E
1	x_k	x_{k+1}	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	точність
2	0	1	1	-1	1
3	1	1,154553	0,1483238	-0,959698	0,1546
4	1,15	1,147456	-0,0075216	-1,059806	0,0071

Корінь x≈1,147456 знайдений з точністю ε=0,0071

	A	B	C	D	E
1	x_k	x_{k+1}	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	точність
2	0	=A2-C2/D2	=SIN(A2)-A2-LN(1+A2)+1	=COS(A2)-1-1/(1+A2)	=ABS(B2-A2)
3	=B2	=A3-C3/D3	=SIN(A3)-A3-LN(1+A3)+1	=COS(A3)-1-1/(1+A3)	=ABS(B3-A3)
4	=B3	=A4-C4/D4	=SIN(A4)-A4-LN(1+A4)+1	=COS(A4)-1-1/(1+A4)	=ABS(B4-A4)

Контрольні завдання до практичної роботи

Задана функція (див. рівняння в таблиці 1 згідно варіанту). Потрібно знайти корінь рівняння з точністю ε=0.01 методом Ньютона.

Таблиця 1

№ варіанта	Рівняння	№ варіанта	Рівняння
1	$x^2-2x+\ln x=0$	29	$(x-3)\cos x-1=0$
2	$2^x+5x-3=0$	30	$0.25x^3+x-1.25=0$
3	$x^3-3x^2-3.5=0$		
4	$2-x-\ln x=0$		
5	$3x-\cos x-1=0$		
6	$x^2+4\sin x=0$		
7	$x^3+4x-6=0$		
8	$2x\sin x-\cos x=0$		
9	$x^2-\ln(1+x)-3=0$		
10	$x^3-3x^2+6x+3=0$		
11	$x^2-\cos x=0$		
12	$3^x+5x-2=0$		
13	$\cos x-3x=0$		
14	$x^4-6x^2+12x-8=0$		

Контрольні питання

1. Етапи розв’язання нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.
2. Умова існування єдиного дійсного кореня на проміжку [a, b].
3. Методи відокремлення коренів.
4. Методи уточнення коренів.
5. Загальний вигляд канонічної форми нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.
6. Як вибрати початкове наближення в методі Ньютона?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

Визначення коренів алгебраїчного і трансцендентного рівняння методом простої ітерації

Мета роботи: навчитись визначати корені алгебраїчних та трансцендентних рівнянь з наперед заданою точністю методом простої ітерації

При побудові математичних моделей деяких процесів використовують нелінійні алгебраїчні або трансцендентні рівняння. Нехай задано рівняння

$$f(x)=0,$$

де функція $f(x)$ – визначена і неперервна на деякому проміжку [a, b]. Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень $x \in [a, b]$, при яких рівняння $f(x)=0$ перетворюється в тотожність. Якщо функція $f(x)$ – алгебраїчний многочлен, то рівняння (23) називається алгебраїчним. Якщо функція $f(x)$ містить тригонометричні, показникові або логарифмічні функції, тоді рівняння називають трансцендентним.

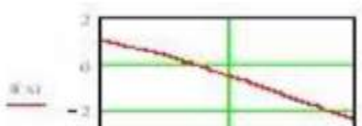
Знайти точні значення коренів заданого рівняння можна лише для найпростіших функцій $f(x)$. Нехай x^* – точний корінь, $\bar{x}$ – його наближене значення. Корінь $\bar{x}$ обчислено з заданою точністю ε, якщо $|x^* - \bar{x}|$. Процес наближеного знаходження дійсних коренів складається з двох етапів:

1. Відокремлення, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один дійсний корінь;

2. Уточнення коренів – знаходження кореня рівняння з наперед заданою точністю.

Методи відокремлення коренів:

1. Графічний. Будуємо графік функції, шукані корені отримуємо як точки перетину графіка з віссю ОХ.



2. Аналітичний метод. Аналітичний метод відокремлення коренів ґрунтується на теоремах з курсу математичного аналізу.
В результаті отримуємо відрізки ізоляції коренів рівняння, де є тільки один корінь.

Методи уточнення коренів

Ці методи застосовуються на відрізках ізоляції коренів, де є тільки один корінь.
а) метод поділу відрізка навпіл (бісекцій);
б) метод простої ітерації;
в) метод Ньютона (дотичних).

Завдання для виконання

Таблиця 1

№ варіанта	Рівняння	№ варіанта	Рівняння
1	$x^2-2x+\ln x=0$	29	$(x-3)\cos x-1=0$
2	$2^x+5x-3=0$	30	$0.25x^3+x-1.25=0$
3	$x^3-3x^2-3.5=0$		
4	$2-x-\ln x=0$		
5	$3x-\cos x-1=0$		
6	$x^2+4\sin x=0$		
7	$x^3+4x-6=0$		
8	$2x\sin x-\cos x=0$		
9	$x^2-\ln(1+x)-3=0$		
10	$x^3-3x^2+6x+3=0$		

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

Наближене обчислення визначеного інтеграла за формулою Сімпсона і за методом трапецій (Excel)

Мета роботи: навчитись обчислювати визначені інтеграли використовуючи чисельні методи інтегрування, оцінювати похибку обчислень за правилом Рунге. Засвоїти методи: трапецій, Симпсона.

Теоретичні відомості

Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку [*a*, *b*] і відома її первісна *F(x)* ($F'(x) = f(x)$), то справедлива формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Проте цією формулою важко і навіть практично неможливо скористатися тоді, коли первісну F(x) не можливо представити в елементарних функціях. У цих випадках особливе значення мають методи чисельного інтегрування функцій, в яких для знаходження наближеного значення визначеного інтеграла використовуються значення підінтегральної функції та її похідних у скінченій кількості точок, що належать переважно проміжку інтегрування. Наближені методи обчислення визначеного інтеграла здебільшого ґрунтуються на геометричному змісті визначеного інтеграла: якщо функція $f(x) \geq 0$, то інтеграл *I* дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою y=f(x) і прямими x=a, x=b, y=0. Ідея наближеного обчислення інтеграла полягає в тому, що задана крива *y=f(x)* замінюється новою лінією „близькою" до заданої. Тоді шукана площа наближено дорівнює фігурі, обмеженої зверху цією лінією.

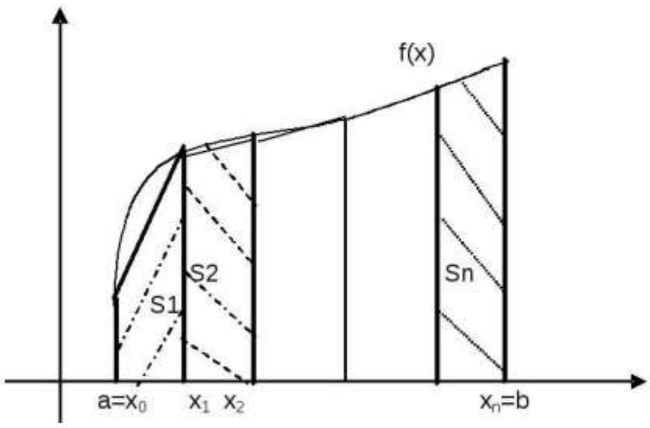
Сутність методів чисельного інтегрування функцій зводиться до розбиття заданого інтегралу на множину менших інтегралів. Сумарна площа обчислюється як сукупність елементарних площин, отриманих в результаті розбиття.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

При цьому чим менше інтервал розбиття, тим точніше буде інтегральна сума.

Формула трапецій

Сутність даного методу є заміна площі криволінійної трапеції площами трапецій, які утворені ламаними, що стягують кінці інтервалів розбиття та кроком розбиття. Тобто в цьому випадку підінтегральна функція $f(x)$ замінюється відрізками ламаних.



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + ... + S_n = h * \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Формула Симпсона

Сутність даного методу є заміна площі криволінійної трапеції площами, що утворені подвійними інтервалом розбиття (2h) і частинами парабол, що проходять через відповідні три точки $(f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2}))$. Тому кількість відрізків розбиття n повинно бути кратним двом.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx = \frac{h}{3} * \left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) \right)$$

$$де \;\; m = \frac{n}{2} \tag{34}$$

Оцінка похибки.

На практиці оцінку похибки при чисельному обчисленні інтегралів здійснюють за правилом Рунге.

Для інтегралів, що були обчислені за формулою трапецій похибка оцінюється:

$$\varepsilon = \frac{|I_{2n} - I_n|}{3} \tag{36}$$

де I_{2n} – обчислення проведене при *2n* відрізків розбиття інтервалу[a, b],

I_n – обчислення проведене при *n* відрізків розбиття інтервалу [a, b].

Для інтегралів, що були обчислені за формулами Симпсона похибка оцінюється за:

$$\varepsilon = \frac{|I_{2n} - I_n|}{15} \tag{37}$$

Завдання: обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} |2\sin x| dx$ при n=4 та n=8 відрізків розбиття методами трапецій, Симпсона. Оцінити похибки обчислень кожного методу за правилом Рунге.

Приклад чисельного обчислення інтегралів в Excel:

	Метод трапецій						
№	x_i	$f(x_i)$	$f(x_0)$, $f(x_4)$	a	b	n	h
0	0		0	0	3,14	4	0,785
1	0,785	1,4137					
2	1,57	2					
3	2,355	1,4159					
4	3,14		0,00319				
Σ		4,8296	0,00319				
	Інтеграл=	3,7924					

	Метод Симпсона							
№	x_i	$f(x_{2i-1})$	$f(x_{2i})$	$f(x_0)$, $f(x_4)$	a	b	n	h
0	0			0	0	3,14	8	0,393
1	0,3925	0,765						
2	0,785		1,4137					
3	1,1775	1,8473						
4	1,57		2					
5	1,9625	1,8485						
6	2,355		1,4159					
7	2,7475	0,7679						
8	3,14			0,00319				
Σ		5,2288	4,8296	0,00319				
	Інтеграл=	4,0005						

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Метод Симпсона							
2	№	x_i	$f(x_{2i-1})$	$f(x_{2i})$	$f(x_0)$, $f(x_4)$	a	b	n	h
3	0	=F3			=ABS(2*SIN(B3))	0	3,14	8	=(G3-F3)/H3
4	1	=$B$3+A4*$I$3	=ABS(2*SIN(B4))						
5	2	=$B$3+A5*$I$3		=ABS(2*SIN(B5))					
6	3	=$B$3+A6*$I$3	=ABS(2*SIN(B6))						
7	4	=$B$3+A7*$I$3		=ABS(2*SIN(B7))					
8	5	=$B$3+A8*$I$3	=ABS(2*SIN(B8))						
9	6	=$B$3+A9*$I$3		=ABS(2*SIN(B9))					
10	7	=$B$3+A10*$I$3	=ABS(2*SIN(B10))						
11	8	=$B$3+A11*$I$3			=ABS(2*SIN(B11))				
12	Σ		=СУММ(C4:C10)	=СУММ(D5:D9)	=СУММ(E3;E11)				
13									
14		Інтеграл=	=I3/3*(E12+4*C12+2*D12)						

Контрольні завдання до практичної роботи

Завдання: обчислити інтеграл (див. таблицю 1) при n=4 та n=8 відрізків розбиття методами трапецій, Симпсона. Оцінити похибки обчислень кожного методу за правилом Рунге.

Таблиця 1

№ варіанта	Підінтегральна функція	Нижня межа інтегрування	Верхня межа інтегрування
1	$e^x \cos x$	0	2
2	$\frac{\cos x}{x+2}$	0.5	2.5
3	$\frac{1}{\sqrt{x^2+3.2}}$	1.2	3.7
4	$x^2 e^{-x}$	0	1.5
5	$\frac{\cos x^2}{x+1}$	0.4	1.2
6	$\frac{x+3.8}{x^5+7.1}$	1	2.2

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

Розв'язок диференційних рівнянь методом Ейлера, методом ламаних

Мета роботи: вивчення методів чисельного диференціювання та набуття навичок рішення задачі Коші за допомогою ЕТ Excel.

Теоретичні відомості

Диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і *диференціальним рівнянням в частинних похідних*, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних.

Таким чином, звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння виду:

$$F(x,y,y^2,y^3 \ldots,y^n)=0$$

де x – незалежна змінна; $y = y(x)$ – невідома функція; $y, y^2, y^3 \ldots, y^n$ – відповідно похідні цієї функції порядку 1, 2,…,n.

Розв'язком диференціального рівняння (38) на деякому інтервалі ($a;b$) називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = y(x)$, яка при підстановці в рівняння (38) перетворює його в тотожність по x на ($a;b$).

Кожне диференціальне рівняння має безліч розв'язків. Щоб знайти частинний розв'язок рівняння необхідно, задати додаткові умови. Залежно від способу задання додаткових умов розрізняють два типи задач: задача Коші і крайова задача.

Якщо додаткові умови задаються в одній точці, то така задача називається *задачею Коші*, а ці умови – *початковими умовами*.

Якщо додаткові умови задаються більш ніж в одній точці, то така задача називається *крайовою задачею*, а умови – *крайовими* або *граничними*.

В лабораторній роботі набудемо навичок рішення задачі Коші.

Задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y(x)$ звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$y' = f(x,y),$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x_0)=y_0$$

З погляду геометрії розв'язати задачу Коші – це означає виділити з множини інтегральних кривих (розв'язків) ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Для розв'язання задачі Коші широко використовують чисельні методи, які дають наближений розв'язок диференціального рівняння у вигляді таблиці значень. В основі цих методів лежить покроковий принцип визначення шуканої функції. Найпоширенішими є методи Ейлера та Рунге – Кутта.

Метод Ейлера . При пошуку чисельного розв'язку задачі (39),(40) відрізок частин інтегрування $[x_0, b]$ розбивають на n рівних частин. Довжина кожної із утворених частин дорівнює

$$h=\frac{b-x_0}{n}.$$

Точки розбиття будуть:

$$x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_1+h=x_0+2h,\ ...,\ x_n=x_{n-1}+h=x_0+nh,$$

якщо відоме значення y_0 в точці x_0.

Наближене значення y_{i+1} в точці x_{i+1} обчислюється за формулою:

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i, y_i)$$

Оцінка похибки здійснюється за принципом Рунге (правило подвоєння):

$$\varepsilon(y_n(x_n))\approx\left|y_n(x)-y_{\frac{n}{2}}(x)\right|,$$

де y_n – значення розв'язку в точці x_i, отримане за методом Ейлера з кроком h,
$y_{\frac{n}{2}}(x)$ – значення розв'язку в тій же точці x, але отримане з кроком рівним $2h$.

<u>Приклад виконання практичної роботи.</u>

Завдання: Розв'язати задачу Коші:

$$y'=\sin(x)+0{,}5*y$$

$$y(1)=0{,}3$$

на відрізку інтегрування [1; 2] для n=5, n=10 та n=20. Рішення задачі реалізувати в середовищі ЕТ Excel.

Виконання:

1. Реалізація метода Ейлера в середовищі ЕТ Excel.

1. Ввести в комірку **A1** текст **Рішення звичайних диференціальних рівнянь методом Ейлера**.
2. Ввести у відповідні комірки текстові дані:

Комірка: Текст:
A2 n=5
D2 n=10
G2 n=20
A3 **x**
B3 **y(x)**
D3 **x**
E3 **y(x)**
G3 **x**
H3 **y(x)**

3. Ввести в комірку **A4** значення $\mathbf{x_0}$ (значення **1**).
4. Ввести в комірку **A5** значення $\mathbf{x_0+h}$ (значення $h=\frac{b-x_0}{n}=\frac{2-1}{5}=0,2$).
5. Виділити комірки **A4:A5** і перетягнути маркер заповнення до комірки **A9** для заповнення таблиці значеннями **x.**
6. В комірку **B4** ввести початкове значення $\mathbf{y_0}$ (значення **0,3**).

7. В комірку **B5** ввести формулу методу Ейлера (=B4+(A5A4)*(SIN(A4)+0,5*B4^2)).
8. Скопіювати формулу з комірки **B5** в комірки **B6:B9**. Аналогічно заповнити таблиці для n=10 та n=20 (п.1.3-п.1.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Рішення звичайних диференціальних рівнянь методом Ейлера							
2	n=5			n=10			n=20	
3	x	y(x)		x	y(x)		x	y(x)
4	1,00	0,300		1,00	0,300		1,00	0,300
5	1,20	0,477		1,10	0,389		1,05	0,344
6	1,40	0,686		1,20	0,485		1,10	0,391
7	1,60	0,931		1,30	0,590		1,15	0,439
8	1,80	1,217		1,40	0,704		1,20	0,489
9	2,00	1,560		1,50	0,827		1,25	0,542
10				1,60	0,961		1,30	0,597
11				1,70	1,108		1,35	0,654
12				1,80	1,268		1,40	0,713
13				1,90	1,446		1,45	0,775
14				2,00	1,645		1,50	0,840
15							1,55	0,908
16							1,60	0,978
17							1,65	1,052
18							1,70	1,130
19							1,75	1,211
20							1,80	1,297
21							1,85	1,388
22							1,90	1,484
23							1,95	1,586
24							2,00	1,696

В режимі формул таблиця має вигляд

	A	B	C	D	E	F	G	H
1					**Рішення звичайних диференціальних рівнянь методом Ейлера**			
2	**n=5**			**n=10**			**n=20**	
3	**x**	**y(x)**		**x**	**y(x)**		**x**	**y(x)**
4	1	0,3		1	0,3		1	0,3
5	1,2	=B4+(A5-A4)*(SIN(A4)+0,5*B4^2)		1,1	=E4+(D5-D4)*(SIN(D4)+0,5*E4^2)		1,05	=H4+(G5-G4)*(SIN(G4)+0,5*H4^2)
6	1,4	=B5+(A6-A5)*(SIN(A5)+0,5*B5^2)		1,2	=E5+(D6-D5)*(SIN(D5)+0,5*E5^2)		1,1	=H5+(G6-G5)*(SIN(G5)+0,5*H5^2)
7	1,6	=B6+(A7-A6)*(SIN(A6)+0,5*B6^2)		1,3	=E6+(D7-D6)*(SIN(D6)+0,5*E6^2)		1,15	=H6+(G7-G6)*(SIN(G6)+0,5*H6^2)
8	1,8	=B7+(A8-A7)*(SIN(A7)+0,5*B7^2)		1,4	=E7+(D8-D7)*(SIN(D7)+0,5*E7^2)		1,2	=H7+(G8-G7)*(SIN(G7)+0,5*H7^2)
9	2	=B8+(A9-A8)*(SIN(A8)+0,5*B8^2)		1,5	=E8+(D9-D8)*(SIN(D8)+0,5*E8^2)		1,25	=H8+(G9-G8)*(SIN(G8)+0,5*H8^2)
10				1,6	=E9+(D10-D9)*(SIN(D9)+0,5*E9^2)		1,3	=H9+(G10-G9)*(SIN(G9)+0,5*H9^2)
11				1,7	=E10+(D11-D10)*(SIN(D10)+0,5*E10^2)		1,35	=H10+(G11-G10)*(SIN(G10)+0,5*H10^2)
12				1,8	=E11+(D12-D11)*(SIN(D11)+0,5*E11^2)		1,4	=H11+(G12-G11)*(SIN(G11)+0,5*H11^2)
13				1,9	=E12+(D13-D12)*(SIN(D12)+0,5*E12^2)		1,45	=H12+(G13-G12)*(SIN(G12)+0,5*H12^2)
14				2	=E13+(D14-D13)*(SIN(D13)+0,5*E13^2)		1,5	=H13+(G14-G13)*(SIN(G13)+0,5*H13^2)
15							1,55	=H14+(G15-G14)*(SIN(G14)+0,5*H14^2)
16							1,6	=H15+(G16-G15)*(SIN(G15)+0,5*H15^2)
17							1,65	=H16+(G17-G16)*(SIN(G16)+0,5*H16^2)
18							1,7	=H17+(G18-G17)*(SIN(G17)+0,5*H17^2)
19							1,75	=H18+(G19-G18)*(SIN(G18)+0,5*H18^2)
20							1,8	=H19+(G20-G19)*(SIN(G19)+0,5*H19^2)
21							1,85	=H20+(G21-G20)*(SIN(G20)+0,5*H20^2)
22							1,9	=H21+(G22-G21)*(SIN(G21)+0,5*H21^2)
23							1,95	=H22+(G23-G22)*(SIN(G22)+0,5*H22^2)
24							2	=H23+(G24-G23)*(SIN(G23)+0,5*H23^2)

Контрольне завдання до практичної роботи

Завдання 1: Розв'язати задачу Коші:
(див. умову задачі в таблиці 1 згідно варіанту)
на відрізку інтегрування [x_0; b] для n=5, n=10 та n=20.

Таблиця 1

Номер варіанту	Диференціальне рівняння	Інтервал		Початкові умови $y(x_0)=y_0$
		x_0	b	
1	$y' = 1.6 \cdot x + 0.5 \cdot y^2$	0	1	y(0)=0,6
2	$y' = 1 - \sin(x - y) + 1.5 \cdot (x - y)$	0	0,6	y(0)=0
3	$y' = 0.5 \cdot x \cdot y$	0	1	y(0)=1
4	$y' = 0.5 \cdot x + x^2 \cdot y$	1	3	y(1)=1
5	$y' = x + 0.8 \cdot y^2$	0	1	y(0)=1
6	$y' = 0.5 \cdot x + x \cdot y$	3	4	y(3)=1
7	$y' = x^2 + y$	0	5	y(0)=1
8	$y' = \cos x \cdot \sin x + x \cdot y$	0	1	y(0)=1,5
9	$y' = 1.5 - \sin(x + y)$	0,1	2	y(0,1)=0,2
10	$y' = 1/(x^2 + y^2)$	0,5	3,5	y(0,5)=0,5

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7

Розв'язок диференційних рівнянь методом Рунге-Кутта в задачах моделювання руху автомобіля

Мета роботи: вивчення методів чисельного диференціювання та набуття навичок рішення задачі Коші за допомогою Microsoft Excel.

Диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо невідома функція є функцією однієї змінної, і *диференціальним рівнянням в частинних похідних*, якщо невідома функція є функцією багатьох змінних.

Таким чином, звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння виду:

$$F(x,y,y^2,y^3 \ldots,y^n)=0$$

де x – незалежна змінна;

$y = y(x)$ – невідома функція;

y, y^2, y^3 – відповідно похідні цієї функції порядку 1, 2,…,n.

Розв'язком диференціального рівняння (38) на деякому інтервалі ($a; b$) називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = y(x)$, яка при підстановці в рівняння (38) перетворює його в тотожність по x на ($a; b$).

Кожне диференціальне рівняння має безліч розв'язків. Щоб знайти частинний розв'язок рівняння необхідно, задати додаткові умови. Залежно від способу задання додаткових умов розрізняють два типи задач: задача Коші і крайова задача.

Якщо додаткові умови задаються в одній точці, то така задача називається *задачею Коші*, а ці умови – *початковими умовами*.

Якщо додаткові умови задаються більш ніж в одній точці, то така задача називається *крайовою задачею*, а умови – *крайовими* або *граничними*.

В лабораторній роботі набудемо навичок рішення задачі Коші.

Задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y(x)$ звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x,y)$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0 .$$

З погляду геометрії розв'язати задачу Коші – це означає виділити з множини інтегральних кривих (розв'язків) ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Для розв'язання задачі Коші широко використовують чисельні методи, які дають наближений розв'язок диференціального рівняння у вигляді таблиці значень. В основі цих методів лежить покроковий принцип визначення шуканої функції. Найпоширенішими є методи Ейлера та Рунге – Кутта.

Метод Рунге – Кутта. Метод Рунге – Кутта четвертого порядку дає рішення задачі Коші більш точне ніж в попередньому методі.

Відрізок інтегрування $[x_0, b]$ розбивається на n рівних частин. Довжина кожної із утворених частин дорівнює $h = \frac{b - x_0}{n}$. Точки розбиття будуть:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh,$$

якщо відоме значення y_0 в точці x_0. Наближене значення y_{i+1} в точці x_{i+1} обчислюється за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \quad (43)$$

де

$$K_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i);$$

$$K_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2});$$

$$K_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2});$$

$$K_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).$$

Оцінка похибки здійснюється за принципом Рунге (правило подвоєння):

$$\varepsilon(y_n(x_n)) \approx \frac{1}{15} \cdot \left| y_n(x) - y_{\frac{n}{2}}(x) \right|, \quad (44)$$

де y_n – значення розв'язку в точці x_i, отримане за методом Рунге – Кутта з кроком h,

$y_{\frac{n}{2}}(x)$ – значення розв'язку в тій же точці x, але отримане з кроком рівним $2h$.

<u>Приклад виконання практичної роботи.</u>

Завдання: Розв'язати задачу Коші :

$y' = \sin(x) + 0.5 \cdot y)$

$y(1) = 0,3$

на відрізку інтегрування [1; 2]. Рішення задачі реалізувати в середовищі ЕТ Excel.

Виконання:

Реалізація метода Рунге-Кутта в середовищі ЕТ Excel.

1. Ввести в комірку **A1** текст **Рішення звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге – Кутта**.
2. Ввести у відповідні комірки текстові дані:

Комірка: Текст:
A3 **x**
B3 **y(x)**

3. Ввести в комірку **A4** значення $\mathbf{x_0}$ (значення **1**).
4. Ввести в комірку **A5** значення $\mathbf{x_0}$**+h** (значення $h = \frac{b-x_0}{n} = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$)
5. Виділити комірки **A4:A5** і перетягнути маркер заповнення до комірки **A14** для заповнення таблиці значеннями **x.**
6. В комірку **B4** ввести початкове значення $\mathbf{y_0}$ (значення **0,3**).
7. Ввести в комірки **C3:F3** відповідні заголовки **K1**, **K2**, **K3**, **K4**.
8. Ввести в комірку **C4** формулу для K1 (=(A5-A4)*(SIN(A4)+0,5*B4^2)). Скопіювати цю формулу в комірки **C5:C13**.
9. Ввести в комірку **D4** формулу для K2 (=(A5-A4)*(SIN(A4+(A5A4)/2)+0,5*(B4+C4/2)^2)).
Скопіювати цю формулу в комірки **D5:D13**.
10. Ввести в комірку **E4** формулу для K3 (=(A5-A4)*(SIN(A4+(A5A4)/2)+0,5*(B4+D4/2)^2)).
Скопіювати цю формулу в комірки **E5:E13**.
11. Ввести в комірку **F4** формулу для K4 (=(A5-A4)*(SIN(A4+(A5A4))+0,5*(B4+E4)^2)).
Скопіювати цю формулу в комірки **F5:F13**.
12. В комірку **B5** ввести формулу методу Рунге – Кутта (=B4+1/6*(C4+2*D4+2*E4+F4)).
13. Скопіювати цю формулу в комірки **B6:B14**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Рішення звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта**							
2								
3	**x**	**y(x)**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**		
4	1,00	0,300	0,088647	0,09267	0,09274	0,096833		
5	1,10	0,393	0,096832	0,101006	0,101099	0,105397		
6	1,20	0,494	0,105395	0,109831	0,109952	0,114581		
7	1,30	0,604	0,114579	0,119419	0,119579	0,124703		
8	1,40	0,723	0,1247	0,13013	0,130344	0,136181		
9	1,50	0,854	0,136178	0,142451	0,14274	0,149589		
10	1,60	0,996	0,149584	0,157044	0,157444	0,165718		
11	1,70	1,154	0,16571	0,174844	0,17541	0,185703		
12	1,80	1,329	0,185691	0,197203	0,198024	0,211213		
13	1,90	1,527	0,211193	0,22614	0,227363	0,244793		
14	2,00	1,754						

Контрольне завдання до практичної роботи

Завдання 1: Розв'язати задачу Коші:
(див. умову задачі в таблиці 1 згідно варіанту) на відрізку інтегрування $[x_0; b]$.
Рішення задачі реалізувати методом Рунге – Кутта в середовищі ЕТ Excel.

Роботу виконати і оформити згідно прикладу, приведеному в теоретичних відомостях практичної роботи. В звіті обов'язково розмістити таблицю розрахунків та таблицю формул.

Таблиця 1

Номер варіанту	Диференціальне рівняння	Інтервал		Початкові умови $y(x_0)=y_0$
		x_0	b	
1	$y' = 1.6 \cdot x + 0.5 \cdot y^2$	0	1	y(0)=0,6
2	$y' = 1 - \sin(x - y) + 1.5 \cdot (x - y)$	0	0,6	y(0)=0
3	$y' = 0.5 \cdot x \cdot y$	0	1	y(0)=1
4	$y' = 0.5 \cdot x + x^2 \cdot y$	1	3	y(1)=1
5	$y' = x + 0.8 \cdot y^2$	0	1	y(0)=1
6	$y' = 0.5 \cdot x + x \cdot y$	3	4	y(3)=1
7	$y' = x^2 + y$	0	5	y(0)=1
8	$y' = \cos x \cdot \sin x + x \cdot y$	0	1	y(0)=1,5
9	$y' = 1.5 - \sin(x + y)$	0,1	2	y(0,1)=0,2
10	$y'=1/(x^2+ y^2$	0,5	3,5	y(0,5)=0,5

Контрольні питання

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку?
2. Що є розв'язком диференціального рівняння ?
3. Постановка задачі Коші.
4. Який вигляд має чисельний розв'язок задачі Коші ?
5. В чому полягає суть розв'язання диференціальних рівнянь методом Рунге – Кутта ?
6. Як оцінюються їх похибки?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8

Інтерполяція функцій поліномами Лагранжа в середовищі Mathcad

Мета роботи: набути навичок побудови інтерполяційного полінома Лагранжа та використання його для обчислення наближених значень функції в заданих точках в середовищі MathCad.

Теоретичні відомості

В загальному вигляді задача інтерполяції може бути поставлена так: дано ряд значень (дослідних даних), які розташовані в порядку збільшення аргументу (табл.1), що відображає залежність *y* від *x*. Необхідно знайти аналітичну залежність, що наближено відображує зв'язок між *x* та функцією *y* і визначити проміжні значення функції $y = f(x_i^*)$, де $x_i < x_i^* < x_{i+1}$

Таблиця 1

x	x_0	x_1	x_2	...	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	...	y_n

Під інтерполяцією розуміється заміна заданої дискретної функції *y=f(x)* деякою функцією $z = P(x)$ для якої виконуються наступні умови:

$$z_i = P(x_i) = f(x_i) = y_i \quad i = \overline{0,n}; \tag{15}$$

Функція *P(x)* називається інтерполяційною функцією, відрізок $|x_0, x_n|$ – відрізком інтерполяції, а точки (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ - вузлами інтерполяції. Основна умова інтерполяції – рівність вихідної дискретно заданої функції *y=f(x)* і інтерполяційної функції z= *P(x)* вузлах інтерполяції. На практиці за інтерполяційну функцію часто використовують поліном Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})..(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} * y_i \tag{16}$$

Цей поліном $L_n(x)$ має степінь не вище *n*, тобто степінь полінома на одиницю менша за кількість вузлів інтерполяції, і в заданих вузлах $L_n(x_i)=y_i$, де $i = \overline{0,n}$. За допомогою цього полінома можна обчислити значення функції в точках, які відрізняються від вузлів інтерполяції.

Приклад виконання практичної роботи.

Завдання: дана таблиця експериментальних даних:

x(i)	1	2	3	4
y(i)	1	1.2	1.8	2

1. Визначити значення функції в заданій точці *x=2.5* використовуючи інтерполяційний поліном Лагранжа.
2. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа.
3. Перевірити вірність побудови полінома.
4. Побудувати графіки інтерполяційного полінома Лагранжа та таблично заданої функції.

Виконання:

1 спосіб.

Будуємо інтерполяційний поліном Лагранжа за табличними даними:

$$Ln(x) := 1\cdot\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(1-2)\cdot(1-3)\cdot(1-4)} + 1.2\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(2-1)\cdot(2-3)\cdot(2-4)} + 1.8\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)}{(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-4)} + 2\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)}$$

Виділяємо праву частину полінома, вибираємо команду меню Symbolics – Simplify, в результаті чого отримуємо :

$$Ln(x) := -.13333333333333333333\cdot x^3 + x^2 - 1.8666666666666666667\cdot x + 2.$$

Значення функції в заданій точці x=2.5 дорівнює

$$Ln(2.5) = 1.5$$

Перевірка вірність побудови полінома:

$Ln(2) = 1.2$ $\qquad\qquad$ $Ln(3) = 1.8$

2 спосіб.

Задаємо вузли інтерполяції у вигляді векторів xt та yt.

$$xt := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad yt := \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 1.8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Визначаємо степінь полінома Лагранжа:

$$n := \mathrm{length}(xt) - 1$$

Будуємо поліном Лагранжа:

$$i := 0..n \qquad j := 0..n$$

$$Ln(x) := \sum_{i=0}^{n} yt_i \cdot \prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}\left(i \neq j, \frac{x - xt_j}{xt_i - xt_j}, 1\right)$$

Визначаємо значення функції в точці *x=2.5*

$$Ln(2.5) = 1.5$$

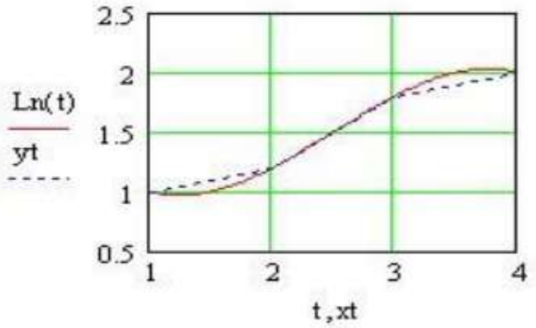
Перевіряємо вірність побудови полінома Лагранжа:

$$Ln(2) = 1.2 \qquad Ln(3) = 1.8 \qquad Ln(4) = 2$$

Побудова графіків інтерполяційного полінома Лагранжа та таблично заданої функції.

$$h := \frac{xt_n - xt_0}{100}$$

$$t := xt_0, xt_0 + h .. xt_n$$



Контрольні завдання до практичної роботи

Програмна база виконання роботи: MathCad (Mathcad 2001 *Professional*).

Дана таблиця експериментальних даних.

Завдання:

1. Визначити значення функції в заданій точці ***x*** використовуючи інтерполяційний поліном Лагранжа.
2. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа.
3. Перевірити вірність побудови полінома.
4. Побудувати графіки інтерполяційного полінома Лагранжа та таблично заданої функції.

Варіант 1

x_i	0,1	0,5	0,8	1,3
y_i	0,998	0,479	0,717	0,963
Задана точка x = 0,6				

Варіант 2

x_i	0,1	0,6	1,8	2,6
y_i	0,999	0,564	0,973	0,515
Задана точка x = 1,2				

Варіант 3

x_i	0,3	0,9	1,5	2
y_i	0,295	0,783	0,997	0,909
Задана точка x = 1,3				

Варіант 4

x_i	0.6	1.2	1.8	2.2
y_i	0.540	0.071	-0.662	-0.998
Задана точка x = 1,5				

Контрольні питання

1. Чим відрізняються задачі апроксимації, інтерполяції та екстраполяції функцій?
2. У чому полягає лінійна інтерполяція функцій? Коли її слід застосовувати?
3. У чому полягає квадратична інтерполяція функцій? Коли її слід застосовувати?
4. Що називається інтерполяційним поліномом Лагранжа? Коли його слід застосовувати?
5. Що називають сплайном?
6. У чому полягає лінійна сплайн-інтерполяція функції? Коли її слід застосовувати?