

Чисельні методи. MathCAD

Система MathCAD - пакет, призначений, для проведення математичних розрахунків, який містить текстовий редактор, обчислювач, графічний процесор

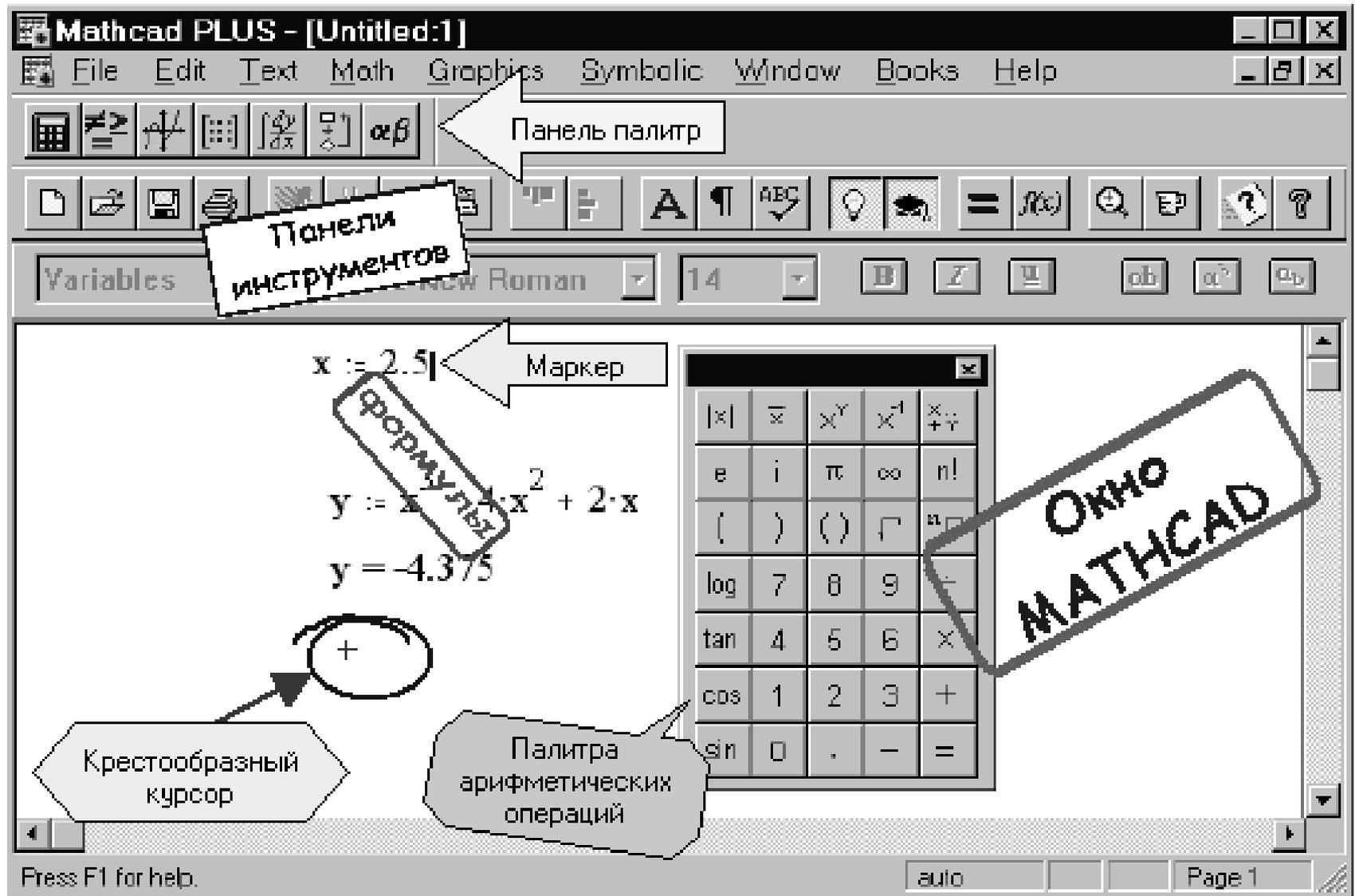
Задачі

- підготовка науково-технічної документації, що містить текст і формули в звичній для фахівця формі;
- обчислення результатів математичних операцій з константами, змінними і розмірними фізичними величинами;
- векторні і матричні операції;
- рішення рівнянь і систем рівнянь;
- статистичні розрахунки і аналіз даних;
- побудова графіків;
- аналітичні перетворення і аналітичне рішення рівнянь і систем;
- аналітичне та чисельне диференціювання та інтегрування;
- рішення диференціальних рівнянь.

Підсистеми MathCAD

- *Текстовий редактор служить для введення і редагування текстів. Текст може складатися з слів, мат. виразів і формул. MathCAD використовує загальноприйнятую мат. Символіку.*
- *Обчислювач забезпечує обчислення по мат. Формулами і має великий набір мат. функцій.*
- *Графічний процесор використовується для побудови графіків і поверхонь.*

Главное окно MathCAD



Структура документа MathCAD

- MathCAD-документ представляет собой совокупность областей типа: равенство, график, текст. Каждая область имеет форму прямоугольника и может размещаться в любом месте документа. Видимая часть документа ограничивается размерами экрана.
- MathCAD устанавливает направление выполнения равенств и построения графиков документа вправо-вниз.

Ввод текста



Текст в документах MathCad создается в текстовых областях, которые могут иметь произвольную ширину, и располагаются в любом месте документа.

*Для создания текстовой области следует выполнить пункт **Create Region** (Создать текстовую область) из меню **Text**.*

Переменные

- **Переменная** – ячейка памяти, в которую могут быть записаны различные значения. Имена переменных обычно состояются из следующих символов: латинские буквы, цифры, знак подчёркивания (_), греческие буквы.
- Mathcad различает в именах символы верхнего и нижнего регистра.
- Используйте следующие способы для набора греческих букв:
 1. Напечатать римский эквивалент. Затем нажать [Ctrl]G.
 2. Щёлкнуть по соответствующему символу на палитре греческих символов. Чтобы открыть эту палитру, нажмите на кнопку, помеченную **$\alpha\beta$** на полосе кнопок под меню или используйте команду View > Toolbars > Greek



Предопределенные переменные

- Mathcad содержит восемь переменных, значения которых определены сразу после запуска программы. Эти переменные называются предопределенными или встроенными переменными. Предопределенные переменные или имеют общепринятое значение, подобно ρ и e , или используются как внутренние переменные, управляющие работой Mathcad, подобно **ORIGIN** и **TOL**.
- Хотя эти переменные уже имеют значения при запуске Mathcad, их можно переопределять. Например, если нужно использовать переменную, называемую e , со значением иным, чем используемое Mathcad, введите новое определение, например $e:=2$. Переменная e примет в рабочем документе новое значение всюду ниже этого определения.

Предопределенные переменные

- **$\pi = 3.14159 \dots$** - Пи. В численных расчетах Mathcad использует значение π с учётом 15 значащих цифр. Чтобы напечатать π , нажмите [Ctrl]P.
- **$e = 2.71828 \dots$** - Основание натуральных логарифмов. В численных расчетах Mathcad использует значение e с учётом 15 значащих цифр.
- **$\infty = 10^{307}$** Бесконечность. Чтобы напечатать ∞ , нажмите [Ctrl]Z.
- **% = 0.01** - Процент.
- **TOL = 10^3** - Допускаемая погрешность для различных алгоритмов аппроксимации (интегрирования, решения уравнений и т.д.).
- **ORIGIN = 0** Начало массива. Определяет индекс первого элемента массива.
- **FRAME = 0** Используется для создания и просмотра анимаций. Когда анимации не используются, равна нулю.

Числа

В Mathcad для отделения дробной части десятичной дроби используется точка (.), а запятая (,) используется для отделения чисел друг от друга.

Типы чисел:

- **Мнимые числа.** Для ввода мнимого числа нужно вслед за его модулем ввести символ мнимой единицы i или j , например, $1i$ или $2.5j$.
- **Размерные значения** — числа, связанные с одной из размерностей: массой, длиной, временем, зарядом и температурой. Mathcad использует их, чтобы следить за соблюдением размерностей и преобразованиями единиц. Чтобы ввести размерное значение, напечатайте число, сопровождаемое строчными или заглавными латинскими буквами: M для массы, L для длины, T для времени, Q для заряда, K для температуры. Например, $4.5m$ представляет 4.5 единицы массы.
- **Восьмеричные целые числа** (сопровождается строчной латинской буквой O)
- **Шестнадцатеричные целые числа** (сопровождается строчной латинской буквой h). Для обозначения значений разряда, больших 9, используйте прописные или строчные латинские буквы от A до F .
- **Экспоненциальное представление чисел.** Чтобы вводить числа в экспоненциальном представлении, просто умножьте мантиссу на степень десяти. Например, для записи напечатайте $3*10^8$.

Оператор присвоения и результата

Оператор присваивания в MathCADe имеет вид:

имя := выражение

Здесь имя может быть:

- *именем переменной (простой и индексированной),*
- *именем функции,*
- *именем массива,*
- *массивом, элементами которого являются простые переменные.*

*Ввод символа присваивания " := " равносильно нажатию клавиши ":" (двоеточие). Например, введите $y:=t*x+b$, чтобы увидеть $y:=t \bullet x+b$.*

Оператор получения результата (оператор "равно") в MathCADe имеет вид:

выражение =

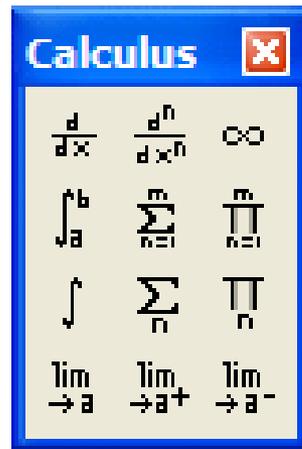
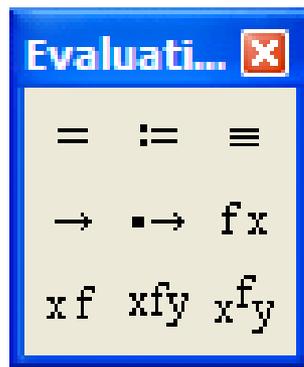
Выражения

- Выражения могут содержать, числа, имена переменных, простейшие операторы. Простейшие операторы представляют известные математические операции: + - * / и т.д.

Простейшие операторы

Оператор	Как ввести	Название
(x)	(x)	скобки
$X!$	$X!$	Факториал
x^y	x^y	Степень
\sqrt{x}	\sqrt{x}	Корень

Советы по набору операторов



Можно избежать необходимости помнить комбинации клавиш, соответствующих каждому оператору. Для ввода операторов могут быть использованы палитры операторов. Чтобы открыть палитры операторов, используются кнопки на полосе инструментов, расположенной ниже меню. Каждая кнопка открывает палитру операторов, сгруппированных по общему назначению.

Математические встроенные функции

- В выражениях можно использовать следующие математические функции:
- 1) Тригонометрические (аргумент в радианах): $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- 2) Обратные тригонометрические (результат в радианах): $\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$, $\text{atan}(x)$
- 3) Гиперболические: $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$
- 4) Обратные гиперболические: $\text{asinh}(x)$, $\text{acosh}(x)$, $\text{atanh}(x)$
- 5) Другие:
- $\exp(x)$ экспонента
- $\ln(x)$ натуральный логарифм
- $\log(x)$ десятичный логарифм
- $\text{Re}(z)$ вещественная часть числа z
- $\text{Im}(z)$ мнимая часть числа z
- $\text{arg}(z)$ аргумент комплексного числа z
- $\text{floor}(x)$ наибольшее целое $< x$ (x - вещест.)
- $\text{ceil}(x)$ наименьшее целое $> x$ (x - вещест.)
- $\text{mod}(x,y)$ остаток от деления x на y (x,y - вещественные)
- $\text{rnd}(x)$ случайное число из промежутка $[0,x]$

И.т.д.

Простейшие вычисления

- Простые вычисления выполняются с помощью оператора результата (=) или оператора присвоения. Например:

$$5 + 6 \cdot 3 = 23$$

$$(5 + 6) \cdot 3 = 33$$

$$8! = 4.032 \times 10^4$$

$$\tan(0) = 0$$

$$\log(100) = 2$$

$$\sqrt[3]{15} = 2.466$$

$$\arccos(0) = 1.571$$

$$\sinh(1) = 1.175$$

$$3 \cdot \frac{\pi}{\ln(4)} = 6.799$$

$$a := \sin(0.75 \cdot \pi)$$

$$b := \cos(0.25 \cdot \pi)$$

$$c := a^2 \cdot b^2$$

$$c = 0.25$$

Определение собственных функций

Чтобы определить свою собственную функцию, введите равенство вида:

FuncName(*аргументы*) := *выражение*

Здесь **FuncName** - имя функции,

аргументы - список элементов, разделенных запятыми.

Аргументами функций могут быть переменные или имена функций. Например:

Задание функции

$f(x) := \cos(x) + 2$

Обращение

$f(1.8)$

$f(\cos(3))$

Изменяющиеся переменные

- В системе MathCAD можно задавать с пределами их изменения, что означает проведение циклических вычислений.
- Например:
- $x:=0..5$ (x принимает значения 1, 2, 3, 4, 5)
- Для набора .. (двух точек) используется ;
- Если необходимо задать дробный шаг используется следующая запись:
- $z := 0,0.2..4$

Табулирование функций

$$y(t) := \frac{\sin(t)}{t^2}$$

$$x := 0, 0.2.. 2$$

- Табулирование функции $y=f(x)$ означает получить таблицу y при изменении x на заданном интервале с заданным шагом.

x =

0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

y(x) =

0
4.967
2.434
1.568
1.121
0.841
0.647
0.503
0.39
0.301
0.227

Численные и символические методы

- Интегрирование, дифференцирование, решение алгебраических уравнений, аппроксимация и т.д. в MathCAD может проводиться двумя методами: численно и символически. При использовании численного метода получается в результате число. При этом полученный результат является приближенным числом.
- При использовании символического решения в результате получатся символическая формула.

Приближенные числа

- Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного A и заменяющее последнее в вычислениях.
- Под ошибкой или погрешностью Δa приближенного числа a понимается:

$$\Delta a = A - a$$

- Во многих случаях знак ошибки не известен, тогда пользуются абсолютной погрешностью приближенного числа Δ

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a|$$

- Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю этого числа A ($A \neq 0$)

$$\delta = \Delta / |A|$$

Численное интегрирование

- Рассмотрим работу численных методов на примере интегрирования функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Метод прямоугольников

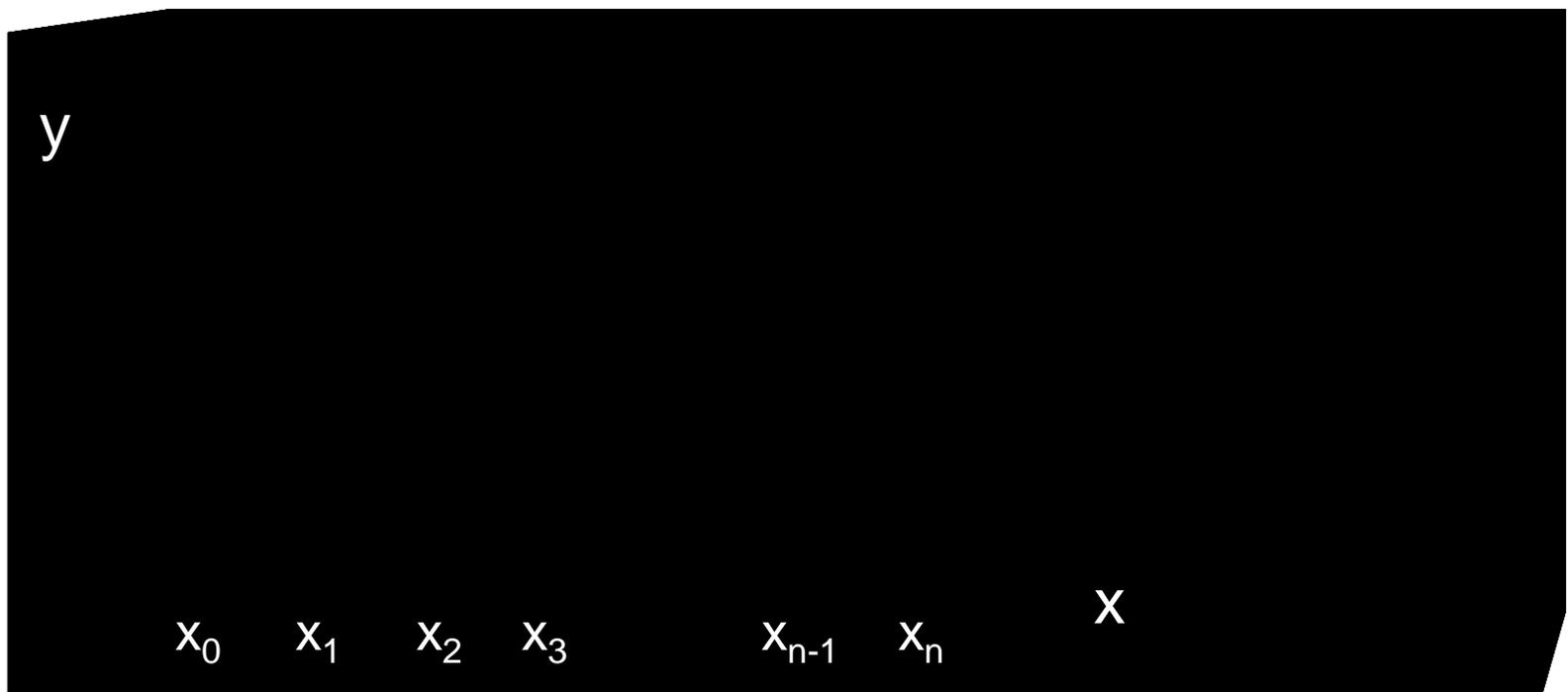
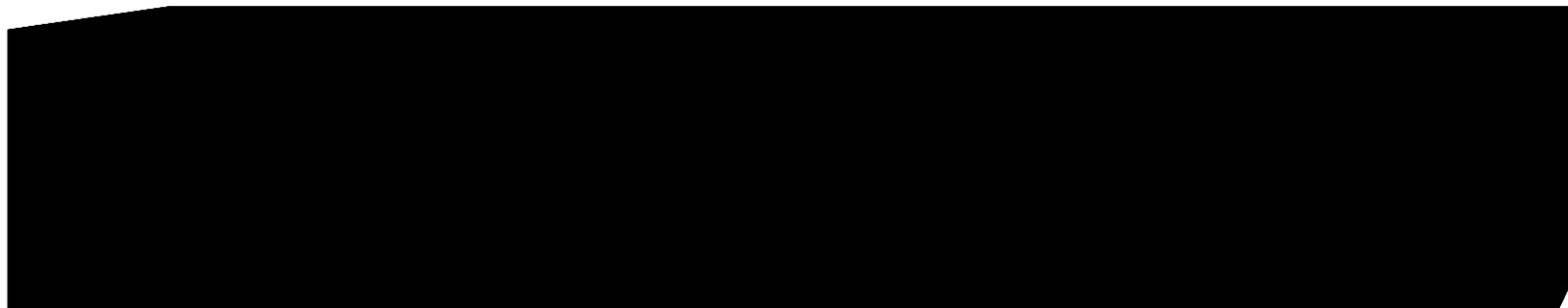
Численное интегрирование основано на том, что определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

Практически удобно разделить отрезок $[a, b]$ на равные части. Тогда длина всех отрезков вычисляется как:

$$\Delta x_k = (b-a) / n = \text{const}$$

Метод прямоугольников

Обозначим $y_k = f(x_k)$ тогда



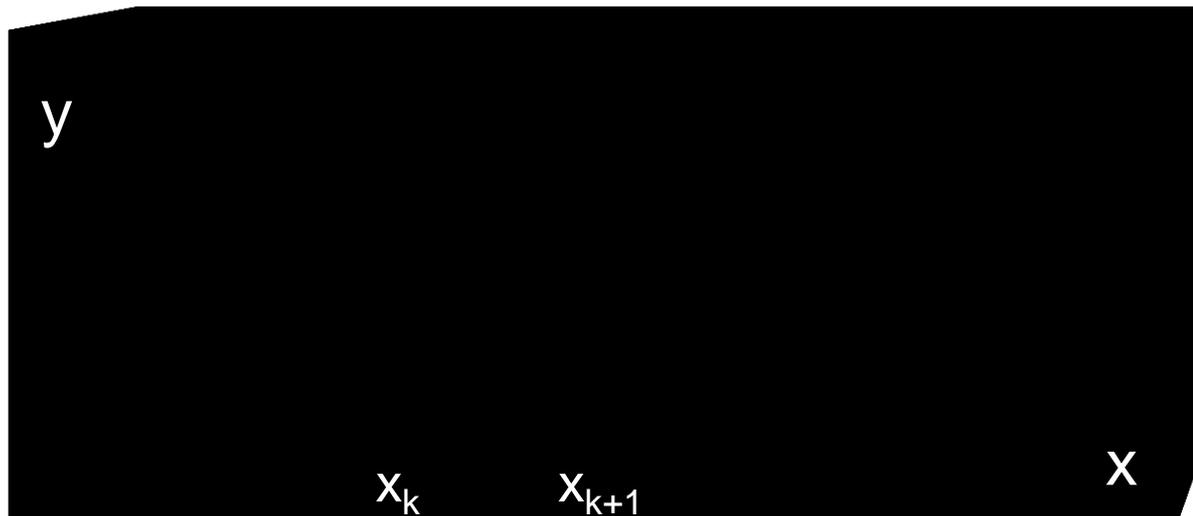
Метод трапеций (1)

Метод трапеций дает более точный результат по сравнению с методом прямоугольников, при одном и том же числе разбиений отрезка $[a, b]$. Суть метода заключается, так же, в разбиении отрезка $[a, b]$ на n частей. Тогда длина всех отрезков вычисляется как:

$$\Delta x_k = (b-a) / n = \text{const}$$

Дугу графика функции на k отрезке заменяют хордой. Получаем трапецию площадь которой равна:

$$S_k = \Delta x_k * (y_k + y_{k+1}) / 2$$



Метод трапеций (2)

Вся площадь криволинейной трапеции ограниченной кривой $y=f(x)$ будет вычисляться тогда так:



Приведя подобные получим:



Точность интегрирования

На точность результата влияет:

1. **Выбранный численный метод.** Существуют гораздо более точные методы чем метод прямоугольников или метод трапеций.

Например, метод парабол (Симпсона), метод Адамса, метод Монте-Карло и т.п.

2. **Число разбиений.** Чем выше число разбиений, тем выше точность, но возрастает время вычислений.

Интегрирование и дифференцирование в MathCAD

При интегрировании и дифференцировании численными методами используются операторы присвоения ($:=$) и результата ($=$). Перед вычислением рекомендуется определить точность вычислений с помощью задания переменной **TOL**. По умолчанию точность вычисления 0,001. При выполнении символических вычислений используется оператор \rightarrow с панели инструментов **Symbolic**.

$$\int_0^1 x^2 dx = 0.333$$

$$\int x^2 dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)) \rightarrow -x \cdot \sin(x)$$



Решение уравнений

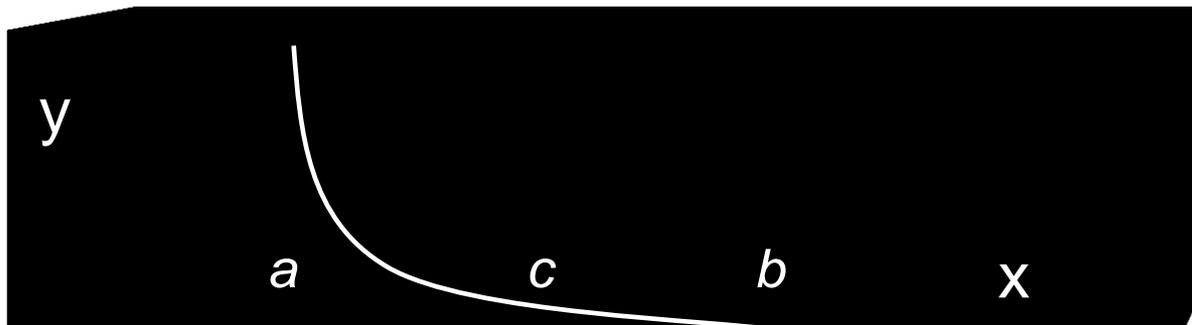
В общем случае уравнение с одним неизвестным можно свести к виду $f(x)=0$. Всякое число ξ (действительное или мнимое) на отрезке $[a, b]$ обращающее уравнение в тождество $f(\xi)=0$ называется **корнем уравнения** или его **решением**. Решение задачи приближенного решения уравнения состоит из двух этапов:

1. **Отделение корней** заключается в поиске интервалов на отрезке $[a, b]$, которые содержат только один корень уравнения. Или отделение корней заключается в поиске значения близкого к решению. Первый этап можно выполнить по графику функции.
2. **Уточнение корней** заключается в непосредственном вычислении значений корней на найденных интервалах с заданной точностью ε .

Метод половинного деления

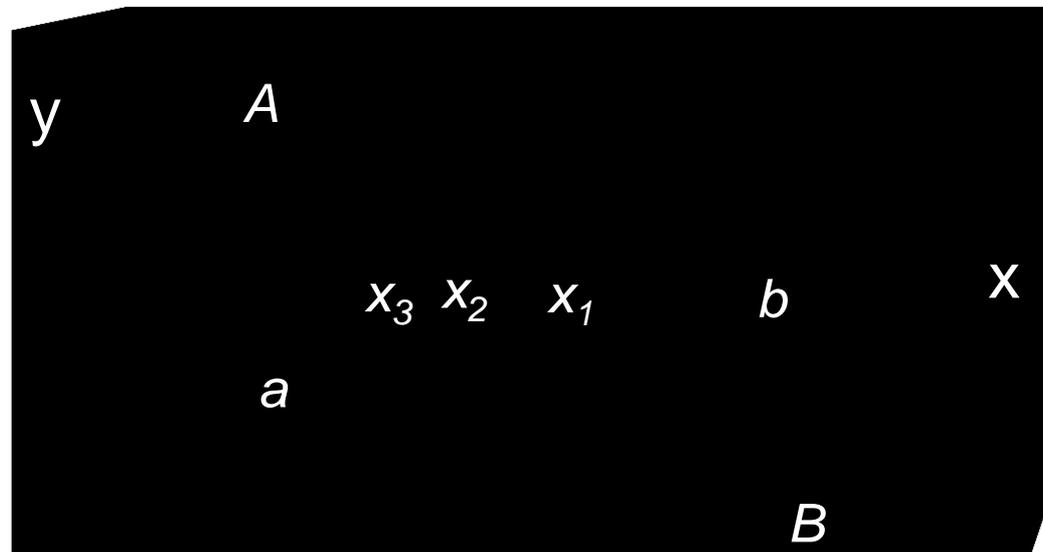
Рассмотрим простейший численный метод уточнения корня уравнения. В основе метода лежит деления отрезка $[a, b]$, на котором определен корень уравнения, пополам. Алгоритм метода следующий:

1. Для нахождения корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[a, b]$ делим отрезок пополам точкой c . $c = (a+b)/2$
2. Рассматриваются отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ и выбираем отрезок на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Если $f(a) \cdot f(c) < 0$ выбираем отрезок $[a, c]$ в ином случае выбираем отрезок $[c, b]$.
3. Для выбранного отрезка повторяем шаг 1 и шаг 2 до тех пор пока величина очередного отрезка не станет меньше заданной точности ε .



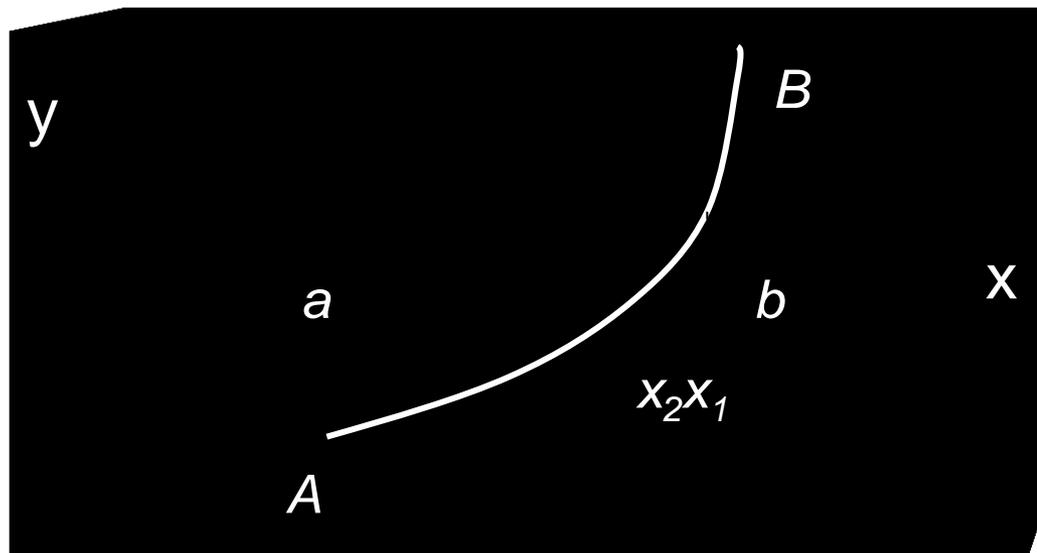
Метод Хорд

Сущность метода хорд заключается в замене $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ хордой проходящей через точку $A[a, f(a)]$ и точку $B[b, f(b)]$. Точка пересечения с осью абсцисс x_1 представляет собой приближение к корню уравнений. Далее рассматриваются отрезки $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ и аналогично приему в методе деления пополам один из отрезков выбирают. На выбранном отрезке опять строят хорду и получают x_2 – очередное приближение к корню уравнения. Условие окончания расчетов: $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$



Метод касательных (Ньютона)

По методу касательных кривая $y=f(x)$ заменяется касательной, проведенной в некоторой точке кривой. Например для рисунка строим касательную в точке B . Касательная пересекает ось абсцисс в точке x_1 . Аналогично рассматриваются и выбираются отрезки $[a, x_1]$ и $[c, x_1]$. На выбранном отрезке опять строят касательную и получают следующее приближение x_2 . Замечание: Выбор первоначальной точки необходимо производить что бы касательная пересекала ось x внутри отрезка $[a, b]$.



Решение уравнений в MathCAD

Для поиска нулей функции, а также корней уравнения применяется встроенная функция **root**.
Формат функции:

root(выражение, имя_переменной)

Чтобы найти нуль функции (или корень уравнения):

- 1) задайте начальное предполагаемое значение неизвестного;
- 2) задайте значение точности $TOL := \dots$;
- 3) используйте функцию **root** для решения.

Например, организовать поиск корня уравнения $x^3+x+1=0$ можно следующим образом:

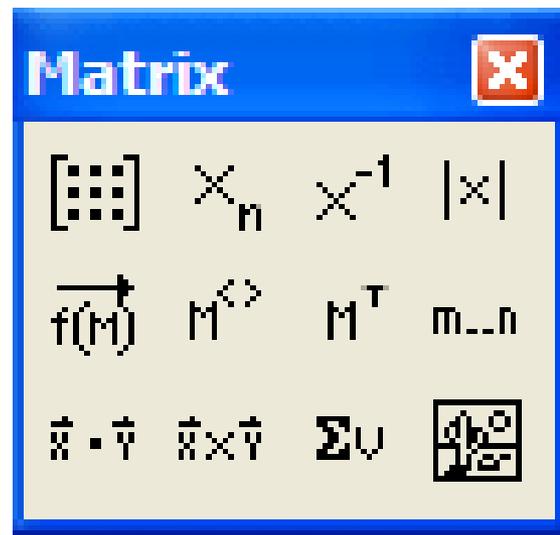
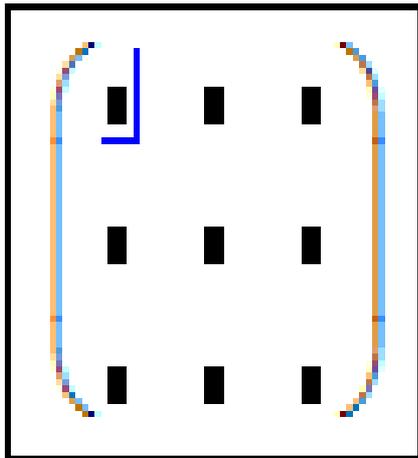
$x:=0.5$ $TOL := 0,0001$ $res := root (x^3+x+1,x)$

Индексированные переменные

- В MathCAD можно использовать переменные с индексом. Для набора индексов используется []. Если индекс сложный его заключают в скобки (в старых версиях MathCAD).
- Набор Результат
- $u [(i , j)$ $u_{i,j}$
- $u [(i + 1)$ u_{i+1}
- $u [i + 1$ u_{i+1}
- Переменные с индексом составляют вектора и матрицы. То есть для доступа к элементам матрицы можно использовать переменную с индексом.

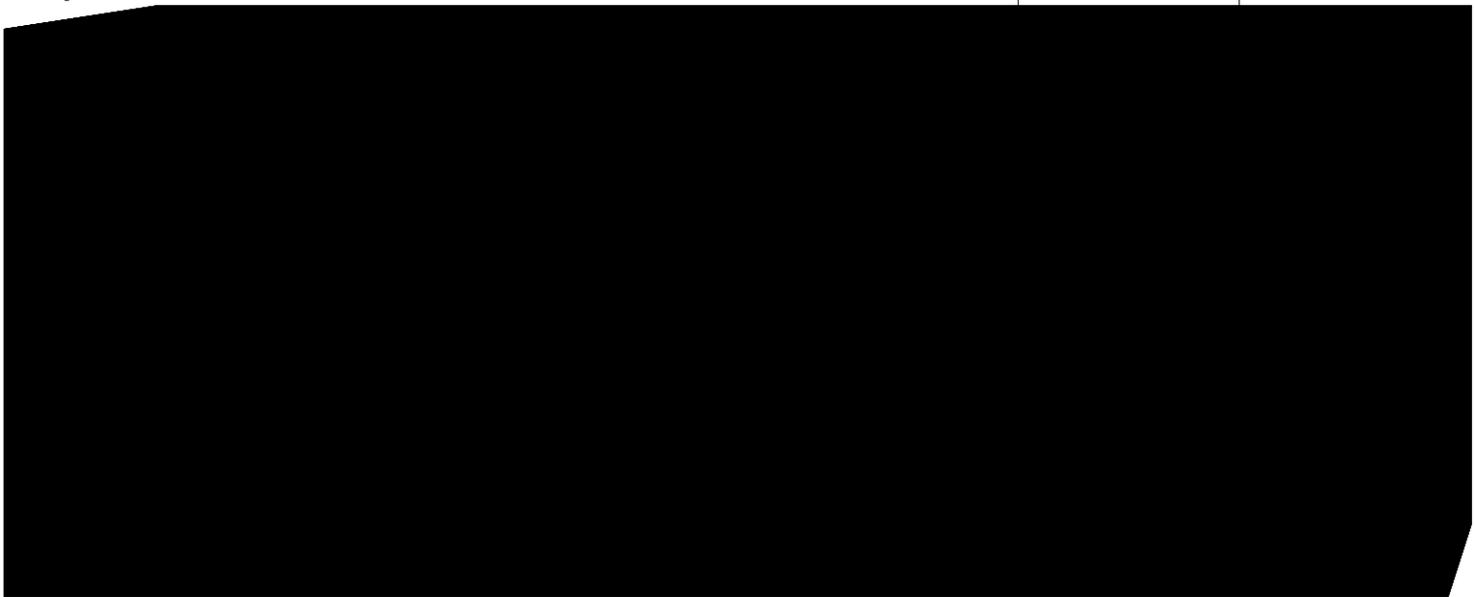
Вектора и матрицы

- Вектор или матрицу задают с помощью нажатия горячих клавиш ALT+M либо с панели инструментов **Matrix**. Над матрицами возможны операции сложения, вычитания, перемножения, возведения в квадрат, обращения, транспонирования, определение детерминанта.
- $C := A^{-1}$ – получение обратной матрицы
- $C := A^T$ – получение транспонированной матрицы
- $N := |A|$ - вычисление детерминанта



Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

- В матричном виде СЛАУ принимает вид $A \cdot X = B$, где A – матрица коэффициентов, B – вектор свободных членов, X – вектор неизвестных.



- Умножим $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева:
- $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

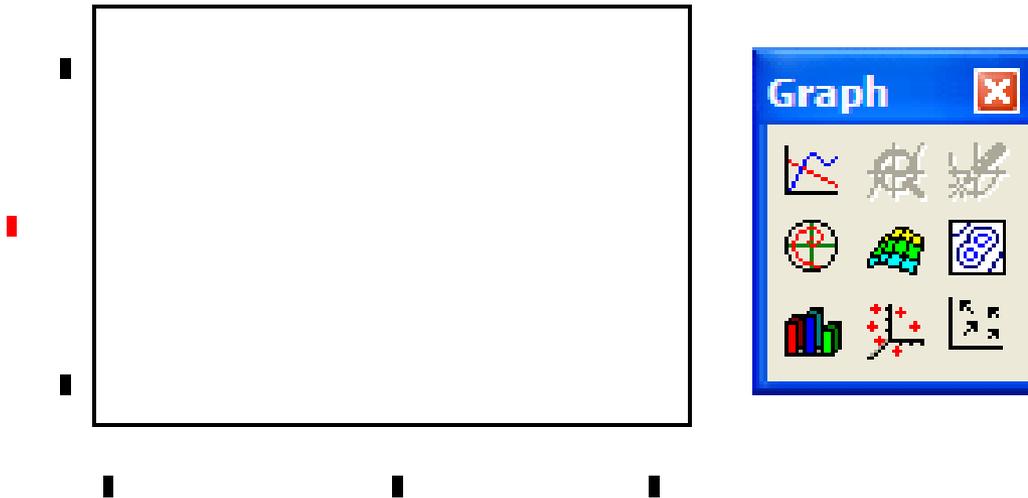
Пример решения СЛАУ

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} := a^{-1} \cdot b \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Построение графиков функций (1)

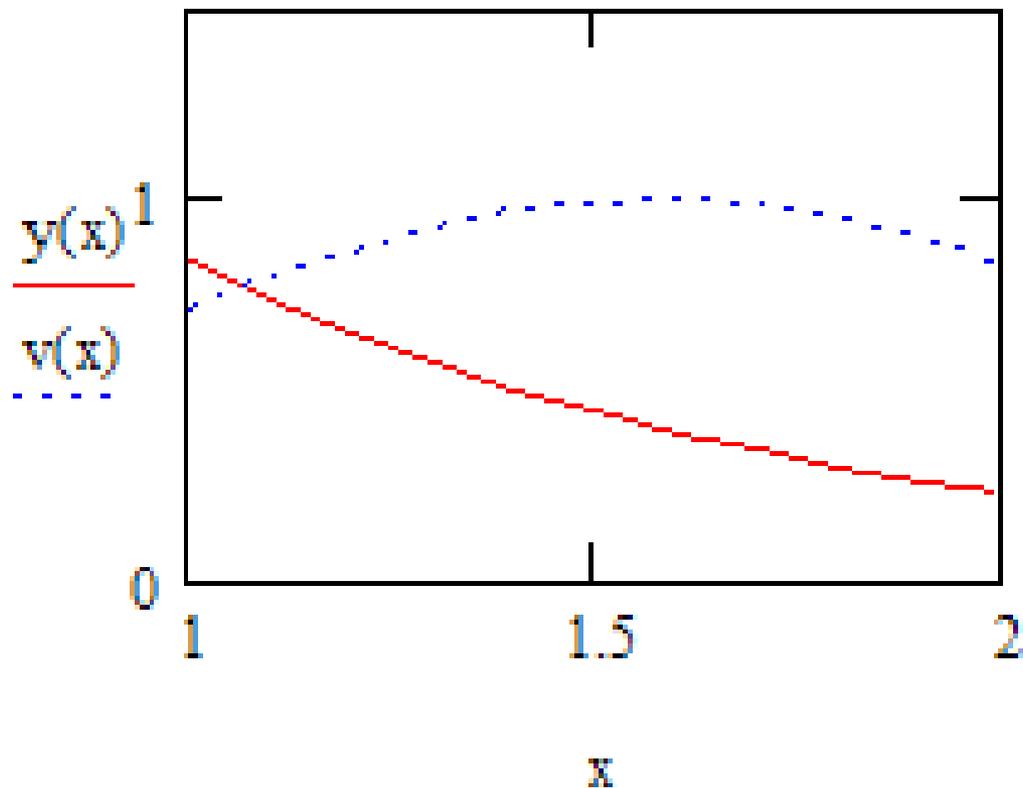
- Для построения графиков функций в MathCAD определяются функции и пределы изменения аргумента. Далее используется кнопка **X-Y Plot** на панели **Graph**.



Построение графиков функций (2)

- В прямоугольниках указываются аргумент, список функций.
Пределы изменения аргумента и функции

$$y(t) := \frac{\sin(t)}{t^2} \quad v(t) := \sin(t)^2 \quad x := 1, 1.1..2$$



Построение поверхностей

Для построения
поверхности определяют
функцию зависящую от
двух переменных.

Используют команду
Graph > Plot Surface

```
n:=20  i:=0..n  j:=0..n  
xi := -1.5 + 0.15·i  yj := -1.5 + 0.15·j  
f(x,y) := sin(x2 + y2)  mi,j := f(xi, yj)
```

