

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

протокол від 21 жовтня 2025 р.
№ 6

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності D3 «Менеджмент»
освітньо-професійна програма «Менеджмент»
факультет бізнесу та сфери обслуговування
кафедра менеджменту, бізнесу та маркетингових технологій

Рекомендовано на засіданні
кафедри комп'ютерної інженерії
та кібербезпеки
25 вересня 2025 р.,
протокол № 6

Розробники: доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри
комп'ютерної інженерії та кібербезпеки СЕМЕНЕЦЬ Сергій
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інженерії
програмного забезпечення СЕМЕНЕЦЬ Лариса

Житомир
2025

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 2

Методичні рекомендації призначенні для проведення практичних занять із навчальної дисципліни «Вища математика та теорія ймовірностей» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності D3 «Менеджмент» освітньо-професійна програма «Менеджмент». Житомир, Житомирська політехніка, 2025. - 92 с.

Рецензенти:

КУЗЬМЕНКО Тетяна – старший викладач кафедри фундаментальних наук Житомирського військового інституту імені С. П. Корольова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, працівник ЗС України;

ШЕЛУХА Олексій - доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Державного університету «Житомирська політехніка», кандидат технічних наук.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 3

ЗМІСТ

Вступ	4
Підготовка до практичних занять	6
Структура навчальної дисципліни	10
Тема 1. Матриці та визначники	11
Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	19
Тема 3. Вектори	25
Тема 4. Аналітична геометрія	33
Тема 5. Границя та неперервність функції	42
Тема 6. Похідна функції	48
Тема 7. Диференційовність функції. Застосування похідної	53
Тема 8. Невизначений інтеграл	58
Тема 9. Визначений інтеграл	64
Тема 10. Диференціальні рівняння 1-го і 2-го порядку	68
Тема 11. Предмет теорії ймовірностей. Алгебра випадкових подій	76
Тема 12. Основні теореми теорії ймовірностей	80
Тема 13. Випадкові величини	85
Тема 14. Числові характеристики випадкових величин	88
Список використаної літератури	91
Інформаційні ресурси в Інтернеті	92

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 4

ВСТУП

Предметом навчальної дисципліни «Вища математика та теорія ймовірностей» є основні компоненти математичної структури (поняття, відношення, аксіоми), математичні твердження (теореми), а також математичні моделі, що будуються та реалізуються в процесі розв’язування прикладних (професійно орієнтованих) задач.

Метою навчальної дисципліни «Вища математика та теорія ймовірностей» є розвиток математичних компетентностей здобувачів вищої освіти, оволодіння ними математичним інструментарієм задля математичного аналізу, побудови та реалізації математичних (імовірнісних) моделей у процесі розв’язування задач професійної діяльності.

Завданнями вивчення навчальної дисципліни є:

- розвиток змістово-теоретичного виміру математичної (статистико-ймовірнісної) компетентності здобувачів вищої освіти;
- розвиток процесуально-діяльного виміру математичної (статистико-ймовірнісної) компетентності здобувачів вищої освіти;
- розвиток референтно-комунікативного виміру математичної (статистико-ймовірнісної) компетентності здобувачів вищої освіти;
- розвиток ціннісно-мотиваційного виміру математичної (статистико-ймовірнісної) компетентності здобувачів вищої освіти;
- розвиток рефлексивно-оцінного виміру математичної (статистико-ймовірнісної) компетентності здобувачів вищої освіти;
- розвиток особистісно-психологічного виміру математичної (статистико-ймовірнісної) компетентності здобувачів вищої освіти;
- оволодіння основними компонентами математичної структури (поняттями, відношеннями, аксіоми);
- опанування основними теоремами «Вищої математики та теорії ймовірностей»;
- оволодіння методом математичного (ймовірнісного) моделювання, його реалізацією в процесі розв’язування прикладних (професійно орієнтованих) задач.

Здобувачі вищої освіти мають:

знати: математичний інструментарій лінійної алгебри та аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення функції однієї та кількох змінних, диференціальних рівнянь; імовірнісної теорії;

вміти: застосовувати здобуті теоретичні знання з вищої математики та теорії

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 5

ймовірностей для розв'язування задач професійної діяльності.

Вивчення курсу «Вища математика та теорія ймовірностей» передбачає дотримання здобувачами вищої освіти *академічної доброчесності*:

- самостійне виконання завдань поточного та підсумкового контролю результатів навчання;
- посилення на джерела інформації у разі використання ідей, розробок, тверджень, відомостей;
- надання достовірної інформації про результати власної освітньо-математичної діяльності, використані методи досліджень і джерела інформації.

За порушення академічної доброчесності студенти можуть бути притягнені до такої *академічної відповідальності*:

- повторне оцінювання результатів навчання (контрольна робота, екзамен);
- повторне проходження відповідного компонента освітньої програми.

Методологічною основою курсу є компетентнісний підхід, що передбачає формулювання та розв'язування компетентнісних задач з вищої математики та теорії ймовірностей. Здобувачі вищої освіти дають відповіді на питання: «*як діяти?*», «*чому так діяти?*», «*для чого так діяти?*». У такий спосіб досягається розвиток їхньої математичної (статистико-ймовірнісної) компетентності - інтегрованої характеристики якості особистості як суб'єкта діяльності в галузі математики, завдяки якій упроваджуються основні компоненти математичної структури (поняття, відношення, аксіоми), формулюються і доводяться математичні твердження (теореми), формулюються та розв'язуються задачі на побудову, дослідження та реалізацію математичних (імовірнісних) моделей, а також виконуються самоаналіз, самоконтроль, самокорекція і самооцінка процесу та результатів освітньо-математичної діяльності, планується її подальший зміст.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 6

ПІДГОТОВКА ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Самостійна робота є невід’ємною складовою компетентісно орієнтованого вивчення навчальної дисципліни „Вища математика та теорія ймовірностей”. Вона передбачає:

- підготовку теоретичних питань до практичних робіт;
- виконання колективних (групових, парних) завдань;
- виконання індивідуальних завдань;
- розв’язування задач (прикладних, математичних, компетентісних);
- підготовку до підсумкової модульної контрольної роботи (колоквіум);
- підготовку до екзамену;
- тестовий контроль (самоконтроль).

Підготовка теоретичних питань до практичних робіт полягає в опрацюванні (вивченні) питань з визначеної теми. Такі питання можуть висвітлюватися як під час лекцій, так і виноситися на самостійне вивчення.

Навчальний алгоритм самопідготовки теоретичних питань до практичних робіт

1. Визначити питання для самопідготовки (розглянути всі питання, що зазначені в плані практичного заняття).

2. Взяти в бібліотеці університету (читальному залі або на кафедрі) джерела, зазначені в списку основної літератури. Добираючи літературу, можна послуговуватися бібліотечними каталогами (алфавітним, предметним або систематичним).

3. Скористатися бібліотечно-інформаційними ресурсами (книжкові фонди, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки Державного університету «Житомирська політехніка»; Житомирської обласної універсальної наукової бібліотеки ім. Олега Ольжича (<http://www.lib.zt.ua/> Новий бульвар; Національної бібліотеки України ім. В. І. Вернадського (<http://www.nbuv.gov.ua/>, Київ, просп. 40-річчя Жовтня) та інших бібліотек. Самостійно добрати інші відповідні веб-ресурси.

4. Визначити розділи (теми або параграфи), в яких розкрито питання практичної роботи.

5. Прочитати ці розділи, зробити структурно-математичний аналіз навчального матеріалу: виокремити основні поняття, відношення і властивості; назвати основні теореми, з’ясувати, які перетворення й базові математичні (ймовірнісні) задачі; вказати основні типи задач, методи, способи та прийоми їх розв’язування.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 7

6. Обґрунтувати походження математичних понять, сформулювати їх.

7. Сформулювати основні теореми, з'ясувати, як вони доводяться.

8. Скласти план відповіді на кожне питання.

9. Проаналізувати, яке місце займає опрацьований матеріал (яку роль виконує) в загальній структурі дисципліни, обґрунтувати його зв'язок із іншими математичними та фаховими навчальними дисциплінами.

10. Побудувати знако-символьні моделі, схеми, таблиці, графіки, що інтерпретують теоретичну і практичну (задачну) складові навчального матеріалу.

11. Виділити ті теоретичні питання, які Ви недостатньо зрозуміли. З ними можна звернутися до одногрупників або до викладача у визначений час консультації.

12. Проаналізувати зміст виконаної навчальної роботи. Оцінити Ваш рівень засвоєння теоретичних знань. Спланувати зміст подальшої освітньо-математичної діяльності (теоретичну і практичну складові).

Розв'язування задач передбачає виконання мислительних (логічних) дій і операцій, застосування теоретичних знань у процесі вирішення задачних ситуацій. З погляду логіки - це процес мисленнєвого сходження від загального (абстрактного) до часткового (конкретного).

***Узагальнена схема (навчальна модель) розв'язування прикладних задач з математики
(застосування методу математичного моделювання)***

1. Постановка (формулювання) прикладної задачі.

2. Змістовий аналіз умови задачі, виділення основних характеристик (параметрів) процесу, явища, практичної задачної ситуації.

3. Виділення всіх змінних величин, що характеризують об'єкт пізнання.

4. Знаходження всіх відношень, у яких перебувають змінні величини, встановлення їх властивостей (характеристик).

5. Інтерпретація виділених змінних величин та знайдених відношень засобами математики: введення змінних (невідомих), математичних операцій; визначення виду функції (функціоналів, операторів).

6. Конструювання в знаково-символьній формі математичних співвідношень. Встановлення ізоморфізму структур досліджуваного об'єкта та визначеного математичного апарату. Побудова математичної моделі.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 8

7. Формулювання та розв'язування математичної задачі. Знаходження розв'язку.

8. Інтерпретація одержаного розв'язку, тобто його формулювання на мові початкової (прикладної) задачі.

9. Визначення типів прикладних задач, розв'язування яких зводиться до побудови математичних моделей такого ж виду.

10. Самоаналіз, самоконтроль, самокорекція і самооцінка засвоєння методу математичного моделювання.

Формалізована структура математичного моделювання як методу навчального пізнання представляється у вигляді:

- 1) постановка прикладної (практичної) задачі та її змістовий аналіз;
- 2) формалізація – формулювання задачі на мові математичних термінів та побудова математичної моделі;
- 3) розв'язання задачі всередині побудованої моделі (знаходження розв'язку математичної задачі);
- 4) інтерпретація одержаного результату, тобто формулювання розв'язку прикладної задачі на її мові.

***Узагальнена схема розв'язування математичних задач
(правило-орієнтир)***

1. Проаналізувати задачу (виділити умову та вимогу).
2. З'ясувати, до якого виду відноситься задача, у чому її практична чи прикладна значущість.
3. Виділити поняття, відношення, що містять умова та вимога задачі.
4. Перетворити задану математичну (імовірнісну) модель (створити графічну інтерпретацію).
5. Проаналізувати властивості виконуваних дій і перетворень (еквівалентність чи нееквівалентність).
6. Знайти розв'язки й перевірити (довести), що вони задовольняють вимогу задачі.
7. Визначити спосіб розв'язування задачі (як ієрархію дій і операцій).
8. Скласти аналогічну власну задачу та розв'язати її. Проконтролювати і скоректувати правильність розв'язування.
9. Оцінити рівень засвоєння Вами способу розв'язування задачі.
10. Проаналізувати знайдений спосіб розв'язування з погляду раціональності. Обґрунтувати можливості розв'язування задачі іншим способом (методом).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 9

Компетентнісні задачі

Компетентнісні задачі формуються з метою теоретичного узагальнення типових математичних (імовірнісних) задач, знаходження методу (способу) їх розв’язування. За результатами розв’язування компетентнісних задач створюється ієрархія загальнологічних, спеціально-математичних і рефлексивних дій. Це дозволяє класифікувати математичні (імовірнісні) задачі, оволодівати методом (способом) їх розв’язування.

Компетентнісні задачі розв’язуються індивідуально та передбачають відповідь на такі три питання: «як діяти?», «чому так діяти?», «для чого так діяти?».

Узагальнена схема розв’язування компетентнісних задач

1. Формулювання компетентнісної задачі на основі математичної (базової).
2. Змістовий аналіз з метою знаходження загального відношення (поняття), характерного для типу математичних задач. Формулювання евристик.
3. Формування змістових абстракцій і узагальнень, створення моделі знайденого загального відношення та її перетворення.
4. Конструювання способу (методу) розв’язування типових задач як ієрархії дій і операцій.
5. Змістове планування часткових задач, що розв’язуються знайденим способом (методом).
6. Самоаналіз і самоконтроль виконаних дій і операцій.
7. Самокорекція та самооцінка засвоєння способу розв’язування типових задач.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 10

Структура навчальної дисципліни

Змістові модулі і теми	Кількість годин							
	денна форма				заочна форма			
	усього	лекції	практичні	самостійна робота	усього	лекції	практичні	самостійна робота
МОДУЛЬ 1								
Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія								
Тема 1. Матриці та визначники	7	2	2	3	4,9	0,4	0,5	4
Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	9	2	4	3	5,7	0,2	0,5	5
Тема 3. Вектори	7	2	2	3	9,7	0,2	0,5	9
Тема 4. Аналітична геометрія	7	2	2	3	9,7	0,2	0,5	9
Разом за змістовий модуль 1	30	8	10	12	30	1	2	27
Змістовий модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння								
Тема 5. Границя та неперервність функції	8	2	2	4	8,6	0,3	0,3	8
Тема 6. Похідна функції	7	2	2	3	5,5	0,3	0,2	5
Тема 7. Диференційовність функції. Застосування похідної	8	2	2	4	8	0,5	0,5	7
Тема 8. Невизначений інтеграл	7	2	2	3	6,5	0,2	0,3	6
Тема 9. Визначений інтеграл	7	2	2	3	6,5	0,2	0,3	6
Тема 10. Диференціальні рівняння 1-го і 2-го порядку	8	2	2	4	9,9	0,5	0,4	9
Разом за змістовий модуль 2	45	12	12	21	45	2	2	41
Змістовий модуль 3. Основи теорії ймовірностей								
Тема 11. Предмет теорії ймовірностей. Алгебра випадкових подій	12	4	2	6	10,8	0,3	0,5	10
Тема 12. Основні теореми теорії ймовірностей	12	4	2	6	11,7	0,2	0,5	11
Тема 13. Випадкові величини	9	2	2	5	10,8	0,3	0,5	10
Тема 14. Числові характеристики випадкових величин	11	2	3	6	11,7	0,2	0,5	11
Модульний контроль	1	-	1	-	-	-	-	-
Разом за змістовий модуль 3	45	12	10	23	45	1	2	42
ВСЬОГО	120	32	32	56	120	4	6	110

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 11

Тема 1. Матриці та визначники

Матриці

1. Поняття матриці. Різновиди матриць.
2. Дії над матрицями.
3. Властивості матриць.
4. Обернена матриця.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками виконувати дії над матрицями, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. Перевірка засвоєння основних теоретичних положень з теми.

1. Основні поняття теми: матриця, елементи матриці, види матриць (квадратна, одинична, нульова, транспонована, узгоджені та неузгоджені матриці, обернена матриця, вироджена матриця, невироджена матриця).
2. Операції над матрицями:
 - 2.1. Додавання та віднімання матриць.
 - 2.2. Множення матриці на число.
 - 2.3. Множення матриць.
 - 2.4. Транспонування матриці та властивості операції транспонування.
 - 2.5. Властивості операцій над матрицями.
3. Обернена матриця та її властивості.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв’язання задач на сторінках 7-10; 17-21: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.
2. Виконати завдання 1 (а, б, в) та завдання 6 на сторінках 26-27 практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 12

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдання 1 потрібно відібрати два варіанти задач, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: №, №+15.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: №-15, №-5.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: №-30, №-25.

Для прикладу, якщо №=7, то варіанти задач завдання 1 такі: 1.7, 1.22.

Для прикладу, якщо №=20, то варіанти задач завдання 1 такі: 1.5, 1.15.

Для прикладу, якщо №=39, то варіанти задач завдання 1 такі: 1.9, 1.14.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 1. Дано матриці A та B . Знайти AB^T .

$$1.1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.2. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.7. A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.8. A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 13

$$1.11. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.12. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.13. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.14. A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.15. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.16. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.17. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.18. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.19. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.20. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.21. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.22. A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$1.23. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.24. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.25. A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.26. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.27. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.28. A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.29. A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 14

$$1.30. A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Як визначити розмір матриці?
3. Які види матриць Ви знаєте?
4. Назвіть лінійні операції над матрицями та схарактеризуйте їх властивості.
5. Які матриці є узгодженими?
6. Що називають добутком матриць і які властивості?
7. За яким правилом виконується множення двох матриць?
8. Яка матриця називається симетричною?
9. Що називають транспонуванням матриць?
10. Сформулюйте властивості транспонування матриць.
11. Чи змінюється матриця в процесі транспонування?
12. Яку матрицю називають оберненою до даної? Чи завжди вона існує?
13. За якою формулою знаходиться обернена матриця?
14. Яка умова існування оберненої матриці?

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Свєрчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.
2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахо. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf
3. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.
Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf
4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.
5. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 15

Визначники

1. Поняття визначників другого та третього порядків.
2. Властивості визначників.
3. Правила обчислення визначників.
4. Мінори та алгебраїчні доповнення матриці.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками способів обчислення визначників, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень з теми.

1. Основні поняття теми: визначник другого порядку, визначник третього порядку, елементи визначника, мінор матриці, алгебраїчне доповнення матриці.
2. Властивості визначників.
3. Способи обчислення визначників:
 - 3.1. Правило трикутника.
 - 3.2. Правило Саррюса.
 - 3.3. Розкладання визначника за елементами будь якого рядка.
 - 3.4. Розкладання визначника за елементами будь якого стовпця.
4. Мінор матриці елемента A_{ij} визначника.
5. Алгебраїчне доповнення матриці елемента A_{ij} визначника.
6. Алгоритм побудови оберненої матриці.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач на сторінках 12-17; 21: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 3 (а, б, в) та завдання 5 на сторінці 26 практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 16

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдання 2 (а, б, в, г) потрібно відібрати два варіанти задач, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: № , $\text{№} + 15$.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: $\text{№} - 15$, $\text{№} - 5$.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: $\text{№} - 30$, $\text{№} - 25$.

Для прикладу, якщо $\text{№} = 7$, то варіанти задач завдання 2 (а, б, в, г) такі: 2.7, 2.22.

Для прикладу, якщо $\text{№} = 20$, то варіанти задач завдання 2 (а, б, в, г) такі: 2.5, 2.15.

Для прикладу, якщо $\text{№} = 39$, то варіанти задач завдання 2 (а, б, в, г) такі: 2.9, 2.14.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 2. Обчислити визначник третього порядку наступними способами:

а) за правилом трикутника;

б) за правилом Саррюса;

в) розкладанням за елементами будь-якого рядка;

г) розкладанням за елементами будь-якого стовпця.

$$2.1. \begin{vmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2.2. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.3. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2.4. \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2.5. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.6. \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$2.7. \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2.8. \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.9. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2.10. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2.11. \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2.12. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 17

$$2.13. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 2.14. \begin{vmatrix} -6 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 2.15. \begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.16. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 2.17. \begin{vmatrix} -7 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad 2.18. \begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.19. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 2.20. \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad 2.21. \begin{vmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.22. \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 2.23. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad 2.24. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.25. \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 2.26. \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad 2.27. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2.28. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 2.29. \begin{vmatrix} -7 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad 2.30. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Питання для самоконтролю

1. Який вираз із елементів матриці другого порядку називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Сформулювати основні властивості визначників.
4. У чому полягає «правило трикутника» для обчислення визначників?
5. Поясніть правило Саррюса?
6. Що називається мінором матриці (M_{ij}) елемента A_{ij} визначника?
7. Що називається алгебраїчним доповненням матриці елемента A_{ij} визначника?
8. Чим відрізняється мінор M_{ij} від алгебраїчного доповнення A_{ij} ?
9. За якої умови існує обернена матриця до заданої?
10. У який спосіб знаходиться обернена матриця?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 18

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.

2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахо. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

3. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.

Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf

4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

5. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 19

Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса, за допомогою формул Крамера та матричним методом

1. Основні поняття.
2. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.
3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.
4. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом.

Мета: засвоєння методів розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера, матричним способом (з допомогою оберненої матриці), методом Гаусса; розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: однорідна, сумісна, несумісна, сумісна визначена та сумісна невизначена системи лінійних алгебраїчних рівнянь, формули Крамера, метод Гаусса, матричний метод.

- 1.1. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь.
- 1.2. Сумісна систему лінійних алгебраїчних рівнянь.
- 1.3. Несумісна систему лінійних алгебраїчних рівнянь.
- 1.4. Сумісна визначена та сумісна невизначена система лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Застосування формул Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь.
3. Сутність методу Гаусса.
4. Матричний вигляд запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач на сторінках 37-43: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 20

2. Виконати завдання 10 (а, б, в), завдання 11 (а, б) та завдання 12 (а, б) на сторінках 49-50 практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса та матричним методом:

Із завдань 3 (а, б, в) та 4 (а, б, в) потрібно відібрати по одному варіанті задач:

завдання 3 (а), 4 (а) - розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи метод Гаусса;

завдання 3 (б) - розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи матричний метод, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 31$, то варіанти задач такі: 3.№, 4.№ із завдань 3 (а) і 4 (а) та 3.№ із завдання 3 (б).

Якщо $\text{№} > 30$, то 3.№-30, 4.N-30 із завдань 3 (а) і 4 (а) та 3.№ із завдання 3 (б).

Для прикладу, якщо $\text{№} = 7$, то варіанти задач такі: 3.7, 4.7 - завдання 3 (а) і 4 (а); 3.7 - завдання 3 (б).

Для прикладу, якщо $\text{№} = 33$, то варіанти задач такі: 3.3, 4.3 - завдання 3 (а) і 4 (а), 3.3 - завдання 3 (б).

Розв’язування систем лінійних рівнянь за допомогою формул Крамера та матричним методом:

Із завдань 3 (а, б, в) та 4 (а, б, в) потрібно відібрати по одному варіанті задач:

завдання 3 (в) та 4 (в) - розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера;

завдання 4 (б) - розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи матричний метод, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 31$, то варіанти задач такі: 3.№, 4.№ із завдань 3 (в) і 4 (в) та 4.№ із завдання 4 (б).

Якщо $\text{№} > 30$, то варіанти задач такі: 3.№-30, 4.N-30 із завдань 3 (в) і 4 (в) та 4.№ із завдання 4 (б).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 21

Для прикладу, якщо №=7, то варіанти задач такі: 3.7, 4.7 - із завдань 3 (в) і 4 (в) та 4.7. - із завдання 4 (б).

Для прикладу, якщо №=33, то варіанти задач такі: 3.3, 4.3 – із завдань 3 (в) і 4 (в) та 4.3 - із завдання 4 (б).

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 3. Розв'язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса;

б) матричним методом;

в) за формулами Крамера.

$$3.1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ 5x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -5. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = -1, \\ 4x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = 10. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = -3. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} 5x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -4. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 = -12. \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 22

$$3.19. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -10, \\ 5x_1 + 2x_2 = -13. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -11, \\ 2x_1 - 3x_2 = 4. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} 5x_1 - x_2 = 19, \\ 4x_1 + 5x_2 = 21. \end{cases}$$

$$3.23. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ 6x_1 - 5x_2 = -26. \end{cases}$$

$$3.24. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -7, \\ 7x_1 + 2x_2 = -22. \end{cases}$$

$$3.25. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 11, \\ 7x_1 - 4x_2 = 2. \end{cases}$$

$$3.26. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 = -19. \end{cases}$$

$$3.27. \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = 23, \\ 3x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

$$3.28. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 9, \\ 4x_1 + 3x_2 = -17. \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -5, \\ 5x_1 + 3x_2 = -23. \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} 7x_1 - x_2 = -3, \\ 3x_1 - 5x_2 = 17. \end{cases}$$

Завдання 4. Розв'язати систему рівнянь:

а) методом Гаусса;

б) матричним методом;

в) за формулами Крамера.

$$4.1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$4.6. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 23

$$4.11. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$4.13. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$4.14. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$4.15. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

$$4.16. \begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -5. \end{cases}$$

$$4.17. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.18. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -24, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -13. \end{cases}$$

$$4.19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -15, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9. \end{cases}$$

$$4.20. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

$$4.21. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 22, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$4.22. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 19, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -11, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$4.23. \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 13, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$4.24. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$4.25. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -23, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$4.26. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -18, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

$$4.27. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 27, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases}$$

$$4.28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$$

$$4.29. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$4.30. \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -4, \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 23. \end{cases}$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте визнання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають однорідною?
3. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною?
4. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається несумісною?
5. Що є розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 24

6. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь є сумісна визначена та сумісна невизначена?

7. У чому полягає сутність методу розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера?

8. Поясніть, як записується система лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді.

9. Обґрунтуйте сутність методу Гаусса розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

10. Чи може однорідна система бути несумісною?

11. За яких обставин однорідна система має єдиний нульовий розв'язок?

12. За якої умови однорідна система має ненульовий розв'язок?

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.

2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

3. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с. Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf

4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

5. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 25

Тема 3. Вектори

Базис. Скалярний та векторний добуток векторів

1. Вектори. Лінійні операції над векторами та їх властивості.
2. Координати вектора. Рівні та колінеарні вектори.
3. Базис системи векторів.
4. Скалярний добуток векторів.
5. Векторний добуток двох векторів.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками знаходження скалярного, векторного добутків векторів, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: вектор, довжина вектора, одиничний вектор, нульовий вектор, співнаправлені вектори, протилежно напрямлені вектори, колінеарні вектори, рівні вектори, базис системи векторів, скалярний добуток двох векторів, векторний добуток двох векторів.
2. Вектори та дії над ними:
 - 2.1. Добуток вектора на число.
 - 2.2. Сума двох векторів.
 - 2.3. Різниця двох векторів.
3. Властивості операцій над векторами.
4. Системи координат. Координати вектора.
5. Базис системи векторів.
6. Скалярний добуток двох векторів та його властивості.
7. Векторний добуток двох векторів та його властивості.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач на сторінках 57-59; С. 62 – задача 6; С. 63 – задача 7,8; С. 64 – задача 10; С. 66 -68 – задачі 12, 13, 14; Практикум з вищої математики.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 26

Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 3, 4, 7 на С. 60 практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 5 (а, б, в, г, д) і 6 потрібно відібрати по два варіанти задач, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: № , $\text{№}+15$.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: $\text{№}-15$, $\text{№}-5$.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: $\text{№}-30$, $\text{№}-25$.

Для прикладу, якщо $\text{№}=7$, то варіанти задач завдань 5 і 6 такі: 5.7, 5.22; 6.7, 6.22.

Для прикладу, якщо $\text{№}=20$, то варіанти задач завдань 5 і 6 такі: 5.5, 5.15; 6.5, 6.15.

Для прикладу, якщо $\text{№}=39$, то варіанти задач завдань 5 і 6 такі: 5.9, 5.14; 6.9, 6.14.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 5. Дано вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Знайти: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $|\vec{a} + \vec{b}|$; г) скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$; д) векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$.

5.1. $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-5; 4; 2)$.

5.2. $\vec{a} = (-4; -1; 3)$, $\vec{b} = (2; -4; 1)$.

5.3. $\vec{a} = (-3; 2; 4)$, $\vec{b} = (1; -3; 5)$.

5.4. $\vec{a} = (2; -1; 4)$, $\vec{b} = (3; -1; 5)$.

5.5. $\vec{a} = (-6; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 1; -4)$.

5.6. $\vec{a} = (2; 3; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -4)$.

5.7. $\vec{a} = (3; -5; 2)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$.

5.8. $\vec{a} = (-4; 2; -3)$, $\vec{b} = (1; -4; 1)$.

5.9. $\vec{a} = (4; -3; 5)$, $\vec{b} = (2; -5; 1)$.

5.10. $\vec{a} = (1; -4; 5)$, $\vec{b} = (2; 1; 6)$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 27

5.11. $\vec{a}=(-1;2;-3)$, $\vec{b}=(-2;4;-3)$.

5.12. $\vec{a}=(2;-4;5)$, $\vec{b}=(1;-2;2)$.

5.13. $\vec{a}=(3;-2;3)$, $\vec{b}=(-1;5;-2)$.

5.14. $\vec{a}=(4;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-3;3)$.

5.15. $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(1;1;3)$.

5.16. $\vec{a}=(3;-2;2)$, $\vec{b}=(-5;4;3)$.

5.17. $\vec{a}=(-4;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-3;1)$.

5.18. $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(2;-4;1)$.

5.19. $\vec{a}=(-4;2;3)$, $\vec{b}=(2;-3;1)$.

5.20. $\vec{a}=(-4;2;3)$, $\vec{b}=(2;-3;5)$.

5.21. $\vec{a}=(3;-1;4)$, $\vec{b}=(2;-2;5)$.

5.22. $\vec{a}=(1;3;2)$, $\vec{b}=(-2;-5;-3)$.

5.23. $\vec{a}=(6;-5;2)$, $\vec{b}=(7;-3;2)$.

5.24. $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$.

5.25. $\vec{a}=(2;5;-4)$, $\vec{b}=(-2;-3;4)$.

5.26. $\vec{a}=(-4;5;-3)$, $\vec{b}=(1;4;-2)$.

5.27. $\vec{a}=(-3;5;4)$, $\vec{b}=(2;-3;3)$.

5.28. $\vec{a}=(0;-5;3)$, $\vec{b}=(-4;6;-2)$.

5.29. $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(8;-3;4)$.

5.30. $\vec{a}=(3;-1;7)$, $\vec{b}=(3;-2;4)$.

Завдання 6. Дано координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$. Знайти кут $A_1A_2A_3$.

6.1. $A_1(3;1;2)$, $A_2(5;0;-1)$, $A_3(0;3;6)$.

6.2. $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$.

6.3. $A_1(3;3;9)$, $A_2(6;9;1)$, $A_3(1;7;3)$.

6.4. $A_1(2;4;3)$, $A_2(7;6;3)$, $A_3(4;9;3)$.

6.5. $A_1(9;5;5)$, $A_2(-3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$.

6.6. $A_1(0;7;1)$, $A_2(4;1;5)$, $A_3(4;6;3)$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 28

6.7. $A_1(5;5;4), A_2(3;8;4), A_3(3;5;10)$.

6.8. $A_1(6;1;1), A_2(4;6;6), A_3(4;2;0)$.

6.9. $A_1(7;5;3), A_2(9;4;4), A_3(4;5;7)$.

6.10. $A_1(6;6;2), A_2(5;4;7), A_3(2;4;7)$.

6.11. $A_1(-4;6;4), A_2(2;1;5), A_3(-1;-2;2)$.

6.12. $A_1(2;-1;9), A_2(1;1;5), A_3(7;3;1)$.

6.13. $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1)$.

6.14. $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(4;1;-1)$.

6.15. $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(3;4;-5)$.

6.16. $A_1(-3;1;4), A_2(7;1;1), A_3(4;1;-1)$.

6.17. $A_1(1;1;3), A_2(6;1;-1), A_3(3;1;-2)$.

6.18. $A_1(-3;1;0), A_2(6;2;2), A_3(3;2;-2)$.

6.19. $A_1(3;-1;2), A_2(5;-2;1), A_3(3;1;-2)$.

6.20. $A_1(0;4;3), A_2(5;1;-1), A_3(-4;1;2)$.

6.21. $A_1(3;5;5), A_2(6;-3;1), A_3(3;-1;1)$.

6.22. $A_1(2;-1;3), A_2(-7;1;-1), A_3(-4;1;-1)$.

6.23. $A_1(-4;1;-3), A_2(-6;1;2), A_3(3;1;-1)$.

6.24. $A_1(4;-1;3), A_2(5;1;-1), A_3(2;1;-1)$.

6.25. $A_1(-1;1;8), A_2(-7;1;1), A_3(4;4;-1)$.

6.26. $A_1(-8;4;5), A_2(-2;6;1), A_3(4;-7;8)$.

6.27. $A_1(8;5;-5), A_2(3;-7;1), A_3(-5;6;8)$.

6.28. $A_1(6;4;-5), A_2(-2;5;1), A_3(3;-2;8)$.

6.29. $A_1(5;-3;4), A_2(-1;7;1), A_3(4;-7;2)$.

6.30. $A_1(-3;4;5), A_2(-2;5;1), A_3(-4;7;2)$.

Питання для самоконтролю

1. Що називають вектором?
2. Дати визначення нульового, одиничного векторів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 29

3. Які вектори є співнаправленими, протилежно напрямленими, рівними?
4. Що називають модулем вектора?
5. Перерахуйте, які дії виконують над векторами.
6. Сформулюйте властивості операцій над векторами.
7. Які вектори є колінеарними?
8. Що називають базисом?
9. Поясніть, що означає, розкласти вектор за векторами базису?
10. Що називають скалярним добутком двох векторів?
11. Назвіть властивості скалярного добутку двох векторів.
12. Що таке орт?
13. Що називають векторним добутком двох векторів?
14. Сформулюйте властивості векторного добутку двох векторів.

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Свєрчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.
2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf
3. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.
Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf
4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.
5. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 30

Мішаний добуток трьох векторів

1. Компланарні вектори.
2. Мішаний добуток трьох векторів.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками знаходження мішаного добутку векторів, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: вектор, векторний добуток двох векторів, компланарні вектори, мішаний добуток трьох векторів.
2. Компланарні вектори. Мішаний добуток трьох векторів та його властивості.
3. Ознака компланарності векторів.
4. Розклад вектора за трьома некомпланарними.
5. Геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів.
6. Властивості мішаного добутку трьох векторів.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач на сторінці 69 – задача 15: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 20 (а, б, в); 25; 27 (а, б, в) на сторінках 70-72 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдання 7 потрібно відібрати один варіант задачі, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 31$, то варіант задачі такий: 7.№.

Якщо $\text{№} > 30$, то варіант задачі такий: 7.№-30.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 31

Для прикладу, якщо №=7, то варіант задачі такий: 7.7.

Для прикладу, якщо №=33, то варіант задачі такий: 7.3.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 7. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$, об'єм піраміди та висоту A_4H .

- 7.1. $A_1(7;0;3), A_2(3;0;-1), A_3(3;0;5), A_4(4;3;-2)$.
- 7.2. $A_1(1;-1;6), A_2(2;5;-2), A_3(-3;3;3), A_4(4;1;5)$.
- 7.3. $A_1(3;6;1), A_2(6;1;4), A_3(3;-6;10), A_4(7;5;4)$.
- 7.4. $A_1(1;1;3), A_2(4;1;6), A_3(6;4;1), A_4(0;5;6)$.
- 7.5. $A_1(4;4;5), A_2(10;2;3), A_3(-3;5;4), A_4(6;-2;2)$.
- 7.6. $A_1(-1;2;5), A_2(-4;6;4), A_3(2;1;5), A_4(-1;-2;2)$.
- 7.7. $A_1(2;-1;9), A_2(1;1;5), A_3(7;3;1), A_4(2;6;-2)$.
- 7.8. $A_1(1;-2;2), A_2(-1;-3;4), A_3(5;5;-1), A_4(2;4;-5)$.
- 7.9. $A_1(1;1;3), A_2(7;1;1), A_3(2;2;2), A_4(4;1;-1)$.
- 7.10. $A_1(-3;1;-2), A_2(2;0;-1), A_3(0;-2;6), A_4(3;4;-5)$.
- 7.11. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$.
- 7.12. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$.
- 7.13. $A_1(7;2;2), A_2(-5;7;-7), A_3(5;-3;1), A_4(2;3;7)$.
- 7.14. $A_1(8;-6;4), A_2(10;5;-5), A_3(5;6;-8), A_4(8;10;7)$.
- 7.15. $A_1(1;-2;7), A_2(4;2;10), A_3(2;3;5), A_4(5;3;7)$.
- 7.16. $A_1(-3;4;-3), A_2(2;-3;1), A_3(-3;4;-3), A_4(0;-2;1)$.
- 7.17. $A_1(4;-15;12), A_2(0;-2;1), A_3(2;-4;3), A_4(5;6;12)$.
- 7.18. $A_1(5;6;12), A_2(2;-3;1), A_3(-4;5;-5), A_4(-1;2;5)$.
- 7.19. $A_1(-3;4;-3), A_2(3;6;0), A_3(0;-2;1), A_4(5;8;5)$.
- 7.20. $A_1(-2;-3;-2), A_2(-1;-5;-4), A_3(5;6;12), A_4(0;-2;1)$.
- 7.21. $A_1(2;-3;1), A_2(0;-2;1), A_3(5;8;-5), A_4(2;-4;3)$.
- 7.22. $A_1(0;-2;1), A_2(5;6;12), A_3(5;8;5), A_4(-4;4;-5)$.
- 7.23. $A_1(-4;5;-5), A_2(0;-2;1), A_3(2;-3;1), A_4(-1;-5;-4)$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 32

7.24. $A_1(3;-6;0)$, $A_2(4;-15;12)$, $A_3(2;-3;1)$, $A_4(-3;4;-3)$.

7.25. $A_1(5;6;12)$, $A_2(2;-3;1)$, $A_3(13;1;6)$, $A_4(-2;-1;8)$.

7.26. $A_1(-3;2;4)$, $A_2(1;6;2)$, $A_3(8;4;-6)$, $A_4(-1;2;5)$.

7.27. $A_1(2;-5;1)$, $A_2(6;-7;5)$, $A_3(4;-15;12)$, $A_4(2;-4;3)$.

7.28. $A_1(4;0;-4)$, $A_2(8;-2;0)$, $A_3(6;-10;7)$, $A_4(4;1;-2)$.

7.29. $A_1(5;6;12)$, $A_2(2;-3;1)$, $A_3(13;1;6)$, $A_4(-2;-1;8)$.

7.30. $A_1(-3;-6;2)$, $A_2(1;-2;0)$, $A_3(-1;5;-8)$, $A_4(-3;-4;4)$.

Питання для самоконтролю

1. Що називають вектором?
2. Що називають модулем вектора?
3. Сформулюйте властивості операцій над векторами.
4. Які вектори є колінеарними?
5. Що називають векторним добутком двох векторів?
6. Які вектори є компланарними.
7. Схарактеризуйте ознаку компланарності векторів.
8. Що називають мішаним добутком трьох векторів?
9. Сформулюйте властивості мішаного добутку трьох векторів.
10. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів?

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.

2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

3. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.

Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf

4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

5. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 33

Тема 4. Аналітична геометрія

Пряма на площині. Криві другого порядку

1. Основні види рівнянь прямої на площині.
2. Криві другого порядку на площині.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками знаходження рівнянь прямої на площині, ознайомлення із кривими другого порядку: колом, еліпсом, гіперболою та параболою, визначення типу кривої другого порядку на площині та знаходження її числових характеристик, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

І. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: рівняння фігури, відстань між двома точками, коло, еліпс, гіпербола, парабола.
2. Основні види рівнянь:
 - 2.1. Канонічне рівняння прямої (рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно даному вектору).
 - 2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
 - 2.3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
 - 2.4. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
 - 2.5. Нормальне рівняння прямої.
 - 2.6. Загальне рівняння прямої. Часткові випадки загального рівняння прямої.
 - 2.7. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
 - 2.8. Відстань від точки до прямої.
3. Коло. Канонічне та загальне рівняння.
4. Еліпс. Канонічне рівняння еліпса.
5. Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 34

6. Парабола. Канонічне рівняння параболі.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: С. 72 – задача 16; С. 77-78 – задачі 17-18; С. 88 – задача 22; С. 92 – задача 27: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 29, 37, 39 – С. 82-83; 42, 50 – С. 93-95 практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 8, 9 потрібно відібрати по одному варіанті задач, послуговуючись формулою: № - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 31$, то варіант задачі такий: 8.№, 9.№.

Якщо $\text{№} > 30$, то варіант задачі такий: 8.№-30, 9.№-30.

Для прикладу, якщо $\text{№} = 7$, то варіант задач такий: 8.7, 9.7.

Для прикладу, якщо $\text{№} = 33$, то варіант задач такий: 8.3, 9.3.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 8. Дано координати вершин трикутника ABC . Знайти: 1) рівняння сторони AB ; 2) рівняння висоти CH ; 3) рівняння медіани BM ; 4) точку перетину медіани BM і висоти CH ; 5) рівняння середньої лінії трикутника, яка паралельна до сторони AB .

8.1. $A(7;3), B(3;-1), C(3;5)$.

8.2. $A(1;-1), B(2;5), C(-3;3)$.

8.3. $A(3;6), B(6;1), C(3;-6)$.

8.4. $A(1;3), B(1;6), C(6;2)$.

8.5. $A(4;5), B(2;3), C(-3;4)$.

8.6. $A(-1;2), B(-4;6), C(2;1)$.

8.7. $A(2;-1), B(1;5), C(3;1)$.

8.8. $A(1;-2), B(-1;-3), C(5;-1)$.

8.9. $A(1;3), B(7;1), C(2;-2)$.

8.10. $A(3;2), B(5;-1), C(0;6)$.

8.11. $A(2;3), B(-2;5), C(-2;-1)$.

8.12. $A(2;3), B(-1;4), C(-3;2)$.

8.13. $A(3;-2), B(2;-3), C(-5;-2)$.

8.14. $A(-3;1), B(-5;2), C(1;-1)$.

8.15. $A(-3;-2), B(2;-2), C(1;4)$.

8.16. $A(6;3), B(2;-1), C(3;4)$.

8.17. $A(1;-1), B(2;4), C(-2;3)$.

8.18. $A(3;5), B(6;1), C(4;2)$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 35

8.19. $A(1;2), B(2;6), C(6;1).$

8.20. $A(5;7), B(1;3), C(-4;5).$

8.21. $A(7;4), B(4;-3), C(3;5).$

8.22. $A(1;-3), B(2;4), C(-4;3).$

8.23. $A(1;5), B(5;1), C(4;2).$

8.24. $A(1;3), B(-2;6), C(6;1).$

8.25. $A(4;7), B(-1;3), C(-2;2).$

8.26. $A(-3;-4), B(1;-2), C(-1;2).$

8.27. $A(3;1), B(-2;3), C(6;4).$

8.28. $A(5;3), B(4;-2), C(3;2).$

8.29. $A(2;0), B(-1;3), C(3;5).$

8.30. $A(3;0), B(-2;4), C(-2;1).$

Завдання 9. Визначити тип кривої другого порядку та знайти її числові характеристики:

9.1. $9y^2 - 16x^2 + 32x - 18y + 137 = 0.$

9.2. $25x^2 + 16y^2 + 150x - 64y - 111 = 0.$

9.3. $16x^2 - 32x + 36y - 164 = 0.$

9.4. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0.$

9.5. $x^2 + 16y^2 - 4x + 32y + 4 = 0.$

9.6. $9y^2 - 4x^2 + 24x + 18y - 63 = 0$

9.7. $x^2 + 9y^2 + 4x - 54y + 76 = 0.$

9.8. $36x^2 + 49y^2 + 72x - 294y - 1287 = 0.$

9.9. $4y^2 - x^2 - 6x - 16y - 29 = 0.$

9.10. $4x^2 + y^2 + 24x + 2y - 63 = 0.$

9.11. $9y^2 - 15x - 36y - 9 = 0.$

9.12. $25x^2 - 9y^2 + 50x + 72y - 344 = 0.$

9.13. $x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 74 = 0.$

9.14. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0.$

9.15. $16x^2 - 64x + 15y - 161 = 0.$

9.16. $y^2 + 4y + 3x - 5 = 0.$

9.17. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0.$

9.18. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 1 = 0.$

9.19. $x^2 - 4y^2 - 8y = 0.$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 36

9.20. $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$.

9.21. $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$.

9.22. $x^2 + 4y^2 + 2x - 32y + 64 = 0$.

9.23. $y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$.

9.24. $x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 74 = 0$.

9.25. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 7 = 0$.

9.26. $9x^2 + 5y^2 - 8x + 30y + 11 = 0$.

9.27. $4x^2 + 16y^2 + 8x - 12y + 9 = 0$.

9.28. $2x^2 + 3y^2 - 3x + 3y + 10 = 0$.

9.29. $2x^2 - 4y - 9x + 15 = 0$.

9.30. $3x^2 + 2y^2 - 6x + 3y + 9 = 0$.

Питання для самоконтролю

1. Які є способи задання прямої на площині?
2. Яке рівняння прямої називають параметричним?
3. Який вектор називають нормальним вектором прямої?
4. Який вектор називають напрямним вектором прямої?
5. За якою формулою обчислюють відстань від точки до прямої?
6. Яке взаємне розташування двох прямих на площині?
7. Як знайти точку перетину двох прямих заданих своїми рівняннями?
8. Як записати рівняння прямої, що проходить:
 - 8.1. через дві точки;
 - 8.2. через задану точку паралельно даному вектору;
 - 8.3. через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
9. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
10. Який вигляд має нормальне рівняння прямої?
11. Записати загальне рівняння прямої.
12. Схарактеризувати часткові випадки загального рівняння прямої.
13. Сформулювати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
14. Сформулювати визначення кривої другого порядку.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 37

15. Що відносять до кривих другого порядку?

16. Дати визначення понять «коло», «еліпс», «гіпербола», «парабола».

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.

2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

3. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.

Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf

4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

5. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 38

Площина у просторі. Пряма у просторі

1. Площина в просторі.
2. Різновиди рівнянь площини в просторі.
3. Рівняння прямої в просторі.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками знаходження рівнянь прямої та площини у просторі, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: рівняння фігури в просторі, рівняння площини, рівняння прямої, напрямний вектор, вектор нормалі, параметричні рівняння, загальне рівняння площини, загальне рівняння прямої в просторі, паралельність прямих площин, перпендикулярність прямих і площин, кут між прямою і площиною, відстань від точки до площини.

2. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.

3. Рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно двом неколінеарним векторам.

4. Параметричне рівняння площини.

5. Рівняння площини, що проходить через три точки, які не належать одній прямій.

6. Параметричне рівняння прямої.

7. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.

8. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

9. Відстань від точки до площини.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 28, 29, 30 - С. 98; 33, 34, 37 – С. 103-105: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин,

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 39

Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 53, 54, 55, 56: С. 100-101; 65 (а, б), 67, 70 - С. 109-110 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдання 10 (а, б, в, г) потрібно відібрати один варіант задачі, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 31$, то варіант задачі такий: 10.№.

Якщо $\text{№} > 30$, то варіант задачі такий: 10.№-30.

Для прикладу, якщо $\text{№} = 7$, то варіант задачі такий: 10.7.

Для прикладу, якщо $\text{№} = 33$, то варіант задачі такий: 10.3.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 10. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: а) довжину сторони A_1A_2 ; б) рівняння прямої A_1A_2 ; в) рівняння площини $A_1A_2A_3$; г) рівняння висоти A_4O .

10.1. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;2), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$.

10.2. $A_1(4;4;10), A_2(4;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;9)$.

10.3. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$.

10.4. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$.

10.5. $A_1(10;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3)$.

10.6. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$.

10.7. $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$.

10.8. $A_1(7;2;2), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(2;3;7)$.

10.9. $A_1(8;6;4), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(8;10;7)$.

10.10. $A_1(7;7;3), A_2(6;5;8), A_3(3;5;8), A_4(8;4;1)$.

10.11. $A_1(4;2;5), A_2(0;7;1), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 40

10.12. $A_1(4;4;10), A_2(7;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;9)$.

10.13. $A_1(4;6;5), A_2(6;9;4), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$.

10.14. $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$.

10.15. $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$.

10.16. $A_1(1;3;1), A_2(-2;2;-3), A_3(-4;-2;3), A_4(0;1;-2)$.

10.17. $A_1(4;2;2), A_2(-3;-2;2), A_3(-4;-3;-3), A_4(0;1;-5)$.

10.18. $A_1(2;1;3), A_2(-3;-2;4), A_3(-3;-5;-4), A_4(0;2;-3)$.

10.19. $A_1(1;1;4), A_2(-4;-2;2), A_3(-4;-3;-6), A_4(0;2;-8)$.

10.20. $A_1(1;3;5), A_2(-3;-3;-2), A_3(-5;-5;3), A_4(0;3;-1)$.

10.21. $A_1(3;5;7), A_2((-3;-3;-2), A_3(-5;-5;2), A_4(0;2;6)$.

10.22. $A_1(5;4;7), A_2((-2;-3;-2), A_3(-5;-5;1), A_4(1;3;-3)$.

10.23. $A_1(6;5;7), A_2((-3;-2;-1), A_3(-4;-4;3), A_4(0;2;-4)$.

10.24. $A_1(2;7;7), A_2((-3;-3;-4), A_3(-2;-5;2), A_4(0;2;-6)$.

10.25. $A_1(2;6;7), A_2((-4;-3;-2), A_3(-3;-5;2), A_4(0;2;-7)$.

10.26. $A_1(2;3;2), A_2((-4;3;-2), A_3(-4;-4;3), A_4(0;3;-2)$.

10.27. $A_1(1;3;1), A_2((-3;3;-2), A_3(-5;-3;3), A_4(0;3;-1)$.

10.28. $A_1(1;2;1), A_2((-3;2;-2), A_3(-5;-3;3), A_4(0;2;-1)$.

10.29. $A_1(4;3;6), A_2((-2;-3;-2), A_3(-5;-5;1), A_4(0;2;-3)$.

10.30. $A_1(1;2;6), A_2((-3;-3;-2), A_3(-5;-5;3), A_4(0;2;-1)$.

Питання для самоконтролю

1. Записати загальне рівняння площини.
2. Перелічити види рівнянь прямої у просторі.
3. Який вектор називається нормальним вектором площини?
4. Як записати рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 41

5. Який вигляд має рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно двом неколінеарним векторам.
6. Записати рівняння прямої, яке проходить через дві задані точки в параметричному та загальному вигляді.
7. Як записати рівняння площини, що проходить через три точки, які не належать одній прямій.
8. Як знайти кут між двома площинами?
9. Схарактеризувати умову паралельності та перпендикулярності двох площин.
10. Параметричне рівняння площини.
11. Як перейти від загального рівняння прямої до канонічного?
12. Як знаходиться кут між двома прямими?
13. Як знайти кут між прямою і площиною?
14. Сформулювати умову паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.
2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахо. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf
3. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.
Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf
4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.
5. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 42

Тема 5. Границя та неперервність функції

1. Границя числової послідовності та її властивості.
2. Границя функції в точці та її геометричний зміст.
3. Односторонні границі. Необхідна і достатня умови існування границі функції в точці.
4. Властивості границь функції.
5. Типи невизначеностей та їх розкриття.
6. Неперервність функції.
7. Точки розриву та їх класифікація.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками знаходження границь функцій, розкриття невизначеностей, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: послідовність, границя послідовності, окіл точки X_0 ; δ -окіл точки X_0 , границя функції в точці, нескінченно малі та нескінченно великі функції, неперервність функції.
2. Границя функції в точці.
3. Нескінченно мале значення функції та властивості. Властивості границь функції.
4. Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими величинами.
5. Визначні границі. Основні еквівалентні пари.
6. Неперервність функції. Неперервність основних елементарних функцій.
7. Точки розриву та їх класифікація.
8. Неперервність функції на відрізку.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 30 (а, б, в, г, д) та 32 (а) - С. 201-202; 207: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин,

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 43

Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання: 28 (б, в, г), 29 (а) - С. 220 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсшин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 11, 12, 13 потрібно відібрати по два варіанти задач, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $№ < 16$, то варіанти задач: $№$, $№ + 15$.

Якщо $15 < № < 36$, то варіанти задач: $№ - 15$, $№ - 5$.

Якщо $№ > 35$, то варіанти задач: $№ - 30$, $№ - 25$.

Для прикладу, якщо $№ = 7$, то варіанти задач такі: 11.7, 11.22; 12.7, 12.22; 13.7, 13.22.

Для прикладу, якщо $№ = 20$, то варіанти задач такі: 11.5, 11.15; 12.5, 12.15; 13.5, 13.15.

Для прикладу, якщо $№ = 39$, то варіанти задач такі: 11.9, 11.14; 12.9, 12.14; 13.9, 13.14.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 11. Знайти границю, не використовуючи правило Лопіталя:

$$11.1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}.$$

$$11.3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}.$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x - 7}.$$

$$11.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}.$$

$$11.7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$11.8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 9}.$$

$$11.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$11.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$11.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 7x + 6}.$$

$$11.12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}.$$

$$11.13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x - 4}.$$

$$11.14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}.$$

$$11.15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 9x - 5}.$$

$$11.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 44

$$11.17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - x - 2}.$$

$$11.18. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$11.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$11.20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$11.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8}.$$

$$11.22. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$11.23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}.$$

$$11.24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}.$$

$$11.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x - 6}.$$

$$11.26. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 7x + 15}.$$

$$11.27. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$11.28. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 5x + 6}.$$

$$11.29. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 5x + 3}.$$

$$11.30. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 4}.$$

Завдання 12. Знайти границю, не використовуючи правило Лопітала:

$$12.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 2x - 4}.$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 4x - 3}{4x^2 - x - 6}.$$

$$12.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 3}{-5x^2 + x + 2}.$$

$$12.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x - 1}{x^4 - 6x + 1}.$$

$$12.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x + 1}{2x^3 + 2x - 4}.$$

$$12.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x - 3}{4x^5 - x + 6}.$$

$$12.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{-3x^3 + 4x + 14}.$$

$$12.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 - 7x - 1}{9x^3 - 6x + 12}.$$

$$12.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{-3x^3 + 2x - 5}.$$

$$12.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x + 7}{4x^4 - 3x - 6}.$$

$$12.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x + 1}{4x^3 + 2x^2 - 5}.$$

$$12.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{-3x^2 + x - 2}.$$

$$12.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{3x^3 + x - 2}.$$

$$12.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x + 1}{x^4 - 3x + 1}.$$

$$12.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 5x + 1}{4x^3 + 3x - 2}.$$

$$12.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 3x - 2}.$$

$$12.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 4}{2x^4 + 5x + 3}.$$

$$12.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + 3x + 5}.$$

$$12.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 4x + 1}{5x^5 + 3x - 2}.$$

$$12.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 5x + 1}{2x^3 + 4x - 2}.$$

$$12.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^3 + 5x + 2}{4x^3 + 3x - 2}.$$

$$12.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x + 6}{4x^3 + 3x - 7}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 45

$$12.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x + 3}{2x^3 + 3x - 2}.$$

$$12.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + x - 1}{x^3 + 3x - 2}.$$

$$12.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 1}{3x^3 + 2x - 3}.$$

$$12.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 5x + 1}{4x^4 + 3x - 2}.$$

$$12.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 4x + 3}{4x^3 + 3x - 2}.$$

$$12.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + 5x - 2}.$$

$$12.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 6x + 4}{3x^3 + x - 5}.$$

$$12.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x + 1}{4x^3 + x - 2}.$$

Завдання 13. Знайти границю, не використовуючи правило Лопітала:

$$13.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{4 - 3x} - 1}.$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2}.$$

$$13.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 - 3x^2} - 1}{x^2 + x}.$$

$$13.4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x - 3}.$$

$$13.5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{x - 4}.$$

$$13.6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4 + x} - 3}{x^2 - 25}.$$

$$13.7. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2 - x} - 2}{x + 2}.$$

$$13.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x - 2x^2}.$$

$$13.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{5x}.$$

$$13.10. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x - 1} - 2}.$$

$$13.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{6 - x} - 2}.$$

$$13.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + 3x} - \sqrt{2 + x}}{x + x^2}.$$

$$13.13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6 + x} - 3}{x^2 - 9}.$$

$$13.14. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x + 3} - 1}.$$

$$13.15. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{\sqrt{2x + 9} - 1}.$$

$$13.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{8 - x}}{x - 1}.$$

$$13.17. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{-2 - x}}{x + 4}.$$

$$13.18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}{x - 3}.$$

$$13.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x} - 1}{x^3 - 1}.$$

$$13.20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3 - x} - 1}{x^3 - 8}.$$

$$13.21. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{3 - x} - 3}{x + 6}.$$

$$13.22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4 - x} - 1}{x^2 - 3x}.$$

$$13.23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{x - 4}.$$

$$13.24. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4 + x} - 3}{x^2 - 25}.$$

$$13.25. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{13 + 3x} - \sqrt{7 + x}}{x^2 - 9}.$$

$$13.26. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5 + x} - 3}{x^2 - 16}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 46

$$13.27. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{10-x}-2}{2x-12}.$$

$$13.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{5-x}-2}.$$

$$13.29. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3+x^2}-2}{x^2-1}.$$

$$13.30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+3x}-\sqrt{7+x}}{8-x^3}.$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняття «функція».
2. Назвіть основні елементарні функції.
3. Які способи задавання функції ви знаєте?
4. Сформулюйте означення послідовності.
5. Сформулюйте означення границі послідовності.
6. Що називають δ -околом точки X_0 ?
7. Які функції називають нескінченно малими (нескінченно великими)? Наведіть приклади.
8. Сформулюйте властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин.
9. Який найпростіший зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою величинами?
10. Сформулюйте означення границі функції в точці.
11. У чому полягає геометричний зміст границі функції в точці?
12. Перелічіть види розкриття невизначених виразів для алгебраїчних функцій.
13. Сформулюйте теореми про першу і другу визначні границі.
14. Яка функція називається неперервною в точці?
15. Яка функція називається неперервною на множині?
16. Які точки є точками розриву функції першого роду? другого роду?
17. Яку функцію називають неперервною на відрізку?

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 2. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр». Житомирська політехніка, 2023. 72 с.
2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf
3. Методичні рекомендації до лабораторних робіт із математичного аналізу: [для

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 47

здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. Ч. 1. Введення в математичний аналіз / С.П. Семенець, В.М. Бондарчук, Р.М. Головня, С.П. Давидчук. – Житомир: «Житомирська політехніка», 2020. – 51 с.

4. Музиченко Світлана, Філон Лідія. Практикум з математичного аналізу. Частина 1. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчальний посібник [електронне видання]. Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2022. 92 с.

5. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.

Режим доступу: [http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний посібник.pdf](http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf)

6. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

7. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

8. Функція. Границя. Обчислення границь функції: методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» / О. О. Сдвижкова, Д. В. Бабець, С. Є. Тимченко, Д. В. Клименко. Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 42 с.
Режим доступу: <https://vm.nmu.org.ua/libr/metod/113-funkcja,%20granycja.pdf>

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 48

Тема 6. Похідна функції

1. Похідна функції. Механічний і фізичний зміст похідної.
2. Геометричний зміст похідної. Правила знаходження похідних.
3. Похідні основних елементарних функцій. Таблиця похідних.
4. Похідна складеної функції.

Мета: формування вмінь, оволодіння навичками знаходження похідних функцій, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: похідна функції в точці, складена функція, дотична до кривої, нормаль до кривої.
2. Поняття похідної функції в точці. Задачі, які приводять до поняття похідної. Геометричний, фізичний та механічний зміст похідної.
3. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних основних елементарних функцій.
4. Похідна складеної функції.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 1, 2(а, б, в, г, д, е) - С. 256-258: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 1, 2, 4, 5, 10, 27, 47, 48, 49, 53, 57 - С. 258-260 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/Д3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 49

Із завдань 14, 15, 16 потрібно відібрати по два варіанти задач, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: № , $\text{№}+15$.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: $\text{№}-15$, $\text{№}-5$.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: $\text{№}-30$, $\text{№}-25$.

Для прикладу, якщо $\text{№}=7$, то варіанти задач такі: 14.7, 14.22; 15.7, 15.22; 16.7, 16.22.

Для прикладу, якщо $\text{№}=20$, то варіанти задач: 14.5, 14.15; 15.5, 15.15; 16.5, 16.15.

Для прикладу, якщо $\text{№}=39$, то варіанти задач такі: 14.9, 14.14; 15.9, 15.14; 16.9, 16.14.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 14. Продиференціювати задану функцію:

$$14.1. y = 2x^3 + 4\sqrt{x^7} - \operatorname{tg} x.$$

$$14.2. y = \frac{4}{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sin x.$$

$$14.3. y = 3x^2 + 8\sqrt[4]{x} - 5\operatorname{arctg} x.$$

$$14.4. y = \frac{1}{4}x^4 - 2\sqrt{x} + \arcsin x.$$

$$14.5. y = \frac{5}{x^3} + 6\sqrt[3]{x} - 7\log_2 x.$$

$$14.6. y = \frac{2}{x^6} + 10\sqrt[5]{x} - 3e^x.$$

$$14.7. y = 2x^7 + 8\sqrt[4]{x^3} - \cos x.$$

$$14.8. y = \frac{8}{x} + 4\sqrt{x^3} + 2\ln x.$$

$$14.9. y = \frac{1}{2x^4} - 5\sqrt{x^2} + 6\sin x.$$

$$14.10. y = \frac{x^4}{2} + 6\sqrt[3]{x^2} - 3\cos x.$$

$$14.11. y = \frac{2}{x^3} + 5\sqrt[5]{x^2} - 2\arccos x.$$

$$14.12. y = \frac{1}{3x} - 9\sqrt[3]{x^4} - 5 \cdot 4^x.$$

$$14.13. y = \frac{2}{5}x^5 + 8\sqrt[4]{x} - 3\operatorname{arcctg} x.$$

$$14.14. y = \frac{1}{2}x^4 + 6\sqrt[6]{x^2} - 4\log_3 x.$$

$$14.15. y = 7x^3 + 3\sqrt{x^5} - 3^x.$$

$$14.16. y = \frac{6}{x} - 4\sqrt[5]{x^3} + 5 \operatorname{tg} x.$$

$$14.17. y = 3x^4 + 5\sqrt{x^9} - \cos x.$$

$$14.18. y = \frac{1}{5}x^5 - 6\sqrt{x} + \arcsin x.$$

$$14.19. y = 4x^5 + 9\sqrt[4]{x} - 6 \operatorname{arctg} x.$$

$$14.20. y = \frac{4}{x^3} + 8\sqrt[3]{x} - 2e^x.$$

$$14.21. y = \frac{3}{x^2} + 6\sqrt[4]{x} - 5 \log_2 x.$$

$$14.22. y = \frac{9}{x} + 3\sqrt{x^5} + 4 \ln x.$$

$$14.23. y = 4x^3 + 6\sqrt[5]{x^3} - \arccos x.$$

$$14.24. y = \frac{1}{4x^6} - 5\sqrt[4]{x^3} + 9 \arcsin x.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/Д3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 50

$$14.25. y = \frac{x^3}{4} + 8\sqrt[4]{x^3} - 6 \operatorname{ctg} x.$$

$$14.26. y = \frac{2}{5x} - 8\sqrt[5]{x^3} - 6 \cdot 3^x.$$

$$14.27. y = \frac{4}{x^5} + 7\sqrt[5]{x^2} - 2 \operatorname{arcctg} x.$$

$$14.28. y = \frac{1}{3}x^5 + 4\sqrt[5]{x^2} - 2 \log_3 x.$$

$$14.29. y = \frac{2}{7}x^4 + 5\sqrt[4]{x} - 3 \operatorname{arctg} x.$$

$$14.30. y = 9x^2 + 4\sqrt{x^3} - 2^x.$$

Завдання 15. Продиференціювати задану функцію:

$$15.1. y = \sqrt[4]{3x^2 + 5x - 4}.$$

$$15.2. y = \cos(4x^2 + 3x - 2).$$

$$15.3. y = \operatorname{ctg}(2x^2 + x - 4).$$

$$15.4. y = \ln(2x^2 - 3x + 5).$$

$$15.5. y = \sqrt{x^3 - 4x + 5}.$$

$$15.6. y = \operatorname{tg}(3x^2 + x - 2).$$

$$15.7. y = \operatorname{arctg}(2x^2 - 1).$$

$$15.8. y = 3^{2x^3 - 4x + 3}.$$

$$15.9. y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x + 5)^2}.$$

$$15.10. y = \arccos(3x^2 + 5).$$

$$15.11. y = \log_3(2x^2 - 4x + 3).$$

$$15.12. y = 2e^{4x^2 + 3x - 2}.$$

$$15.13. y = \sqrt[3]{(2x^2 + 5x - 3)^2}.$$

$$15.14. y = \sin(2x^2 - 3x + 5).$$

$$15.15. y = \log_4(x^2 + 2x + 7).$$

$$15.16. y = c \operatorname{tg}(3x^4 + 2x - 4).$$

$$15.17. y = \sqrt[3]{3x^2 + 4x - 5}.$$

$$15.18. y = \sqrt{x^4 - 5x + 3}.$$

$$15.19. y = \ln(2x^3 - 4x + 7).$$

$$15.20. y = \operatorname{ctg}(3x^4 - 2).$$

$$15.21. y = \operatorname{tg}(3x^2 + 2x - 1).$$

$$15.22. y = \sqrt[4]{(3x^5 - 4x + 2)^2}.$$

$$15.23. y = 4^{3x^5 - 6x + 7}.$$

$$15.24. y = \log_3(6x^3 - 5x + 4).$$

$$15.25. y = \arccos(5x^3 + 4).$$

$$15.26. y = \sqrt[5]{(3x^3 + 6x - 2)^2}.$$

$$15.27. y = 3e^{5x^2 + 4x - 1}.$$

$$15.28. y = \sin(4x^5 - 6x + 7).$$

$$15.29. y = 3e^{4x^5 + 6x - 2}.$$

$$15.30. y = \sqrt[7]{(4x^2 + 2x - 1)^3}.$$

Завдання 16. Продиференціювати задану функцію:

$$16.1. y = 3^x \ln(4x - 3).$$

$$16.2. y = \frac{e^{5x}}{2x^2 - 3}.$$

$$16.3. y = x^4 \cos(2x^2 - 5).$$

$$16.4. y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(2x + 3)}.$$

$$16.5. y = e^{-2x^2} \operatorname{arcctg} x.$$

$$16.6. y = \frac{\sin(3x + 2)}{\ln x}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 51

$$16.7. y = \cos x \cdot \ln(2x - 3).$$

$$16.8. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(2x - 1)}.$$

$$16.9. y = \frac{e^{\cos x}}{3x^2 - 4}.$$

$$16.10. y = \frac{\ln x}{\sin(4x + 3)}.$$

$$16.11. y = 3^{\sin x} (4x - 3).$$

$$16.12. y = \frac{7^{5x}}{2x^2 - 3}.$$

$$16.13. y = \frac{4^{-x}}{2x^2 - 5}.$$

$$16.14. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2x + 3)}.$$

$$16.15. y = \frac{\operatorname{arctg} 6x}{7x^3 - 3x + 2}.$$

$$16.16. y = x^3 \sin(2x^2 - 4).$$

$$16.17. y = 2^x \ln(3x - 5).$$

$$16.18. y = e^{-3x^4} \operatorname{arctg} x.$$

$$16.19. y = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(3x + 4)}.$$

$$16.20. y = \sin x \cdot \ln(4x - 5).$$

$$16.21. y = \frac{\sin(4x + 6)}{\ln x}.$$

$$16.22. y = \frac{e^{\sin x}}{5x^2 - 3}$$

$$16.23. y = \frac{c \operatorname{tg} x}{\ln(4x - 1)}.$$

$$16.24. y = 2^{\cos x} (3x - 2).$$

$$16.25. y = \frac{\ln x}{\cos(5x + 2)}.$$

$$16.26. y = \frac{2^{-x}}{3x^2 - 7}.$$

$$16.27. y = \frac{6^{4x}}{3x^4 - 1}.$$

$$16.28. y = \frac{\operatorname{arctg} 4x}{5x^2 - 2x + 1}.$$

$$16.29. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(x + 5)}.$$

$$16.30. y = \frac{e^{3x}}{7x^3 - 4}.$$

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати означення похідної функції в точці.
2. У чому полягає геометричний зміст похідної?
3. Розкрити механічний зміст похідної.
4. Пояснити фізичний зміст похідної.
5. Сформулювати правила диференціювання функцій.
6. Пояснити, як обчислити похідну складеної функції.

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 2. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр». Житомирська політехніка, 2023. 72 с.
2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова,

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 52

М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

3. Музиченко Світлана, Філон Лідія. Практикум з математичного аналізу. Частина 1. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчальний посібник [електронне видання]. Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2022. 92 с.

4. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.

Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf

5. Похідна та її застосування : навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / Ю.І. Першина, Н.В. Черемська, Т.Т. Черногор – Харків: НТУ «ХПІ», 2023. – 110 с.

6. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

7. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 53

Тема 7. Диференційовність функції. Застосування похідної

1. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя.
2. Локальний екстремум функції. Основні теореми диференціального числення.
3. Найменше і найбільше значення функції на відрізку.
4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину.
5. Асимптоти кривої.
6. Загальна схема дослідження функції.

Мета: формування вмінь, опанування технікою обчислення границь за допомогою правила Лопіталя, дослідження функцій однієї змінної та побудова графіків, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: екстремум функції, локальний максимум, локальний мінімум, проміжки зростання функції, проміжки спадання функції, крива опукла на інтервалі, точка перегину кривої, асимптота кривої, вертикальна асимптота, горизонтальна асимптота, похила асимптота.
2. Основні теореми диференціального числення.
3. Локальний екстремум функції. Умови зростання та спадання функції на проміжку.
4. Необхідна умова локального екстремуму. Достатня умова локального екстремуму.
5. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.
6. Випуклість кривої. Достатня умова випуклості. Точка перегину. необхідна умова випуклості. Достатня умова точки перегину.
7. Вертикальні та похилі асимптоти кривих.
8. Загальна схема дослідження функції.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 18 (а, б, в), 19 (а, б, в) - С. 280; 40 – С. 314-321 : Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин,

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 54

Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 147, 148, 152, 159 - С. 286 та 244, 245, 246, 247 – С. 328 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 17, 18 потрібно відібрати по одному варіанті задач, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо №<31, то варіант задач такий: 17.№, 18.№.

Якщо №>30, то варіант задач такий: 17.№-30, 18.№-30.

Для прикладу, якщо №=7, то варіант задач такий: 17.7, 18.7.

Для прикладу, якщо №=33, то варіант задач такий: 17.3, 18.3.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 17. Знайти границю функції за допомогою правила Лопітала:

$$17.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}.$$

$$17.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 6x}.$$

$$17.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$17.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\ln \cos x}.$$

$$17.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{\ln x}.$$

$$17.6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - e^{-x}} \right).$$

$$17.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x}.$$

$$17.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{-x} - 1)}{x}.$$

$$17.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(1 + x)}.$$

$$17.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$17.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$17.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{1 - \cos 3x}.$$

$$17.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{tg} x}{x \sin x}.$$

$$17.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x - 2}{\ln \cos x}.$$

$$17.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{x-1}.$$

$$17.16. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{x} \right).$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 55

$$17.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 1}{\ln \sin x}.$$

$$17.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin(x-1)}{\ln x}.$$

$$17.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2}{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$17.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - e^x} \right).$$

$$17.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^3})}{x}.$$

$$17.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln(2 + x)}.$$

$$17.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-2)}{x-1}.$$

$$17.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{ctg} x - x}.$$

$$17.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin(x-2)}{x-2}.$$

$$17.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{1 - \sin 3x}.$$

$$17.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^2}.$$

$$17.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \operatorname{ctg} x}{x \cos x}.$$

$$17.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + \sin x - 2}{\ln \sin x}.$$

$$17.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{1 - \cos 6x}.$$

Завдання 18. Виконати загальне дослідження функції:

$$18.1. y = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 - 12x + 3.$$

$$18.2. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$18.3. y = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 5.$$

$$18.4. y = \frac{5x}{4 - x^2}.$$

$$18.5. y = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + 3.$$

$$18.6. y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$$

$$18.7. y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 3.$$

$$18.8. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$18.9. y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 3.$$

$$18.10. y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}.$$

$$18.11. y = x^3 - 12x^2 + 21x + 5.$$

$$18.12. y = \frac{3x^2}{8 - x^3}.$$

$$18.13. y = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 - 20x + 3.$$

$$18.14. y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

$$18.15. y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 3.$$

$$18.16. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}.$$

$$18.17. y = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

$$18.18. y = \frac{5x}{4 - x^2}.$$

$$18.19. y = 2x^3 - 4x^2 - 6x - 3.$$

$$18.20. y = \frac{4x}{4 + x^2}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 56

$$18.21. y = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 4.$$

$$18.22. y = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

$$18.23. y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 3.$$

$$18.24. y = \frac{3x + 6}{x^2 - 4}.$$

$$18.25. y = 4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 16x + 25.$$

$$18.26. y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$18.27. y = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

$$18.28. y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}.$$

$$18.29. y = 5x^3 - 9x^2 + 6x + 3.$$

$$18.30. y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}.$$

Питання для самоконтролю

1. Поясніть розкриття невизначеностей різного виду.
2. Сформулюйте правило Лопітала.
3. Сформулюйте основні теореми диференціального числення функції однієї змінної.
4. Дайте визначення асимптоти кривої.
6. Які асимптоти може мати крива? Охарактеризуйте їх.
7. Яка функція є зростаючою (спадною) на проміжку?
8. У чому полягає достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку?
9. Які точки називаються точками екстремуму функції?
10. У чому полягає достатня умова існування екстремуму?
11. Які точки називають критичними?
12. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку?
13. Яка крива є опуклою (угнутою)?
14. Що називають точкою перегину функції?
15. Сформулюйте необхідну умову існування точки перегину кривої.
16. Сформулюйте достатню умову існування точки перегину кривої.
17. Які кроки включає загальна схема дослідження функції?

Рекомендована література:

1. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Свєрчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 2. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр». Житомирська політехніка, 2023. 72 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 57

2. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

3. Музиченко Світлана, Філон Лідія. Практикум з математичного аналізу. Частина 1. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчальний посібник [електронне видання]. Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2022. 92 с.

4. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків: УкрДУЗТ, 2022. – Ч. 1. – 231 с.

Режим доступу: [http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний посібник.pdf](http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf)

5. Похідна та її застосування : навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / Ю.І. Першина, Н.В. Черемська, Т.Т. Черногор – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – 110 с.

6. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

7. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 58

Тема 8. Невизначений інтеграл

1. Первісна функції, невизначений інтеграл та їх властивості.
2. Таблиця основних невизначених інтегралів.
3. Основні методи інтегрування.
4. Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.

Мета: систематизація знань здобувачів освіти стосовно понять первісної та невизначеного інтеграла; формування вмінь; опанування технікою обчислення інтегралів методами: безпосереднього інтегрування, заміни змінних, інтегрування частинами; розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: первісна функції, невизначений інтеграл, стала інтегрування.
2. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.
3. Властивості невизначеного інтеграла.
4. Основні методи обчислення невизначеного інтеграла:
 - 4.1. Метод безпосереднього інтегрування.
 - 4.2. Метод заміни змінних.
 - 4.3. Метод інтегрування частинами.
5. Інтегрування раціональних функцій.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 1 (а, б); 2 (а, б) - С. 369-370; 3 (а, б, в, г) – С. 371; 4 (а, б, в) – С. 373-374: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 1 (а, б) - С. 368; 3 (в, г) – С. 372; 4 (а, в, г) – С. 375 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук,

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 59

А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 19, 20, 21, 22 потрібно відібрати по два варіанти задач, послуговуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: № , $\text{№}+15$.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: $\text{№}-15$, $\text{№}-5$.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: $\text{№}-30$, $\text{№}-25$.

Для прикладу, якщо $\text{№}=6$, то варіанти задач такі: 19.6, 19.21; 20.6, 20.21; 21.6, 21.21; 22.6, 22.21.

Для прикладу, якщо $\text{№}=18$, то варіанти задач такі: 19.3, 19.13; 20.3, 20.13; 21.3, 21.13; 22.3, 22.13.

Для прикладу, якщо $\text{№}=37$, то варіанти задач такі: 19.7, 19.12; 20.7, 20.12; 21.7, 21.12; 22.7, 22.12.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 19. Знайти інтеграл (методом безпосереднього інтегрування):

$$19.1. \int \left(3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx .$$

$$19.2. \int (4x^3 - 5e^x + 1) dx .$$

$$19.3. \int \left(\frac{3}{4} \sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx .$$

$$19.4. \int \left(\frac{3}{\sqrt{9-x^2}} + 4 \operatorname{tg} x - 9 \right) dx .$$

$$19.5. \int \left(8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx .$$

$$19.6. \int \left(2x^3 - \sqrt{x} + \frac{4}{x} \right) dx .$$

$$19.7. \int (\sqrt[3]{x} - \operatorname{ctg} x + 3) dx .$$

$$19.8. \int \left(3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx .$$

$$19.9. \int \left(5x^4 - 3e^x + \frac{8}{x^3} \right) dx .$$

$$19.10. \int \left(\cos x - \frac{4}{x^2 + 16} + x \right) dx .$$

$$19.11. \int \left(5x - 3 \operatorname{ctg} x + \frac{4}{x^3} \right) dx .$$

$$19.12. \int \left(4^x - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx .$$

$$19.13. \int \left(x^2 - \frac{3}{\sin^2 x} - 5 \right) dx .$$

$$19.14. \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx .$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 60

$$19.15. \int \left(2x^3 - \frac{4}{\sqrt{5+x^2}} + 7 \right) dx .$$

$$19.16. \int \left(4x^5 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx .$$

$$19.17. \int \left(7\sqrt[4]{x^3} - 3e^x + \frac{4}{x} \right) dx .$$

$$19.18. \int (3x^2 - 5\operatorname{tg} x + 2) dx .$$

$$19.19. \int \left(7x^6 + \frac{3}{x^2 - 9} + 2 \right) dx .$$

$$19.20. \int \left(5x^4 + 4\sin x - \frac{2}{x} \right) dx .$$

$$19.21. \int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx .$$

$$19.22. \int \left(2x^3 + \frac{6}{\cos^2 x} - 5 \right) dx .$$

$$19.23. \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx .$$

$$19.24. \int \left(3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4} + 2 \right) dx .$$

$$19.25. \int \left(\sqrt[5]{x^3} - \frac{4}{x^5} + 2\sin x \right) dx .$$

$$19.26. \int \left(3x - \frac{5}{x^2 + 4} - 1 \right) dx .$$

$$19.27. \int \left(3\operatorname{tg} x - \frac{2}{x^4} + 5 \right) dx .$$

$$19.28. \int \left(4x^3 - \cos x + \frac{6}{x^3} \right) dx .$$

$$19.29. \int \left(\frac{3}{5+x^2} - \frac{7}{x^3} + 5x \right) dx .$$

$$19.30. \int \left(3\operatorname{ctg} x - 5\sqrt[3]{x^2} + 2^x \right) dx .$$

Завдання 20. Знайти інтеграл:

$$20.1. \int \sqrt{3+x} dx .$$

$$20.2. \int \sin(3x-2) dx .$$

$$20.3. \int \sqrt[3]{(1+x)^2} dx .$$

$$20.4. \int \frac{dx}{\cos^2(4x-3)} .$$

$$20.5. \int \frac{dx}{\sin^2(3x+7)} .$$

$$20.6. \int e^{2x+3} dx .$$

$$20.7. \int (5-4x)^7 dx .$$

$$20.8. \int \operatorname{tg}(2+3x) dx .$$

$$20.9. \int \sin(5+3x) dx .$$

$$20.10. \int \sqrt[3]{2+5x} dx .$$

$$20.11. \int \frac{3}{\sqrt{5-4x}} dx .$$

$$20.12. \int \frac{dx}{\sin^2(2x-5)} .$$

$$20.13. \int \operatorname{ctg}(4x-3) dx .$$

$$20.14. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} .$$

$$20.15. \int \frac{dx}{(5x+6)^2} .$$

$$20.16. \int 3^{2x-5} dx .$$

$$20.17. \int \frac{5}{\cos^2(4x+7)} dx .$$

$$20.18. \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}} .$$

$$20.19. \int \sin(7x-5) dx .$$

$$20.20. \int \frac{dx}{(3x-5)^4} .$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 61

$$20.21. \int \frac{dx}{(2+x)^3}.$$

$$20.22. \int \operatorname{ctg}(5-3x) dx.$$

$$20.23. \int e^{5x+4} dx.$$

$$20.24. \int \sqrt[5]{(6-5x)^2} dx.$$

$$20.25. \int \frac{2 dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$$

$$20.26. \int \sin(4x+3) dx.$$

$$20.27. \int \sqrt{3-4x} dx.$$

$$20.28. \int \frac{7 dx}{\sin^2(2x-5)}.$$

$$20.29. \int \operatorname{ctg}(7x+4) dx.$$

$$20.30. \int \frac{6 dx}{2x+5}.$$

Завдання 21. Знайти інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної:

$$21.1. \int \frac{dx}{(3x+2)\ln^2(3x+2)}.$$

$$21.2. \int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$21.3. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x}.$$

$$21.4. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}.$$

$$21.5. \int \frac{5}{\operatorname{ctg}^4 x \sin^2 x} dx.$$

$$21.6. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$21.7. \int \frac{5}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$21.8. \int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

$$21.9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}.$$

$$21.10. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$21.11. \int \cos x e^{\sin x} dx.$$

$$21.12. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}{x+1} dx.$$

$$21.13. \int \frac{2}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx.$$

$$21.14. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos x}}.$$

$$21.15. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arccctg} x}}{x^2+1} dx.$$

$$21.16. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}.$$

$$21.17. \int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1} dx.$$

$$21.18. \int \frac{3 dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x}}.$$

$$21.19. \int \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$21.20. \int \frac{4}{(1+x^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}} dx.$$

$$21.21. \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$21.22. \int \cos x \sqrt{\sin^3 x} dx.$$

$$21.23. \int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5} dx.$$

$$21.24. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 62

$$21.25. \int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arccotg}^4 x}.$$

$$21.26. \int \frac{\sqrt[3]{\log_2(x-8)}}{x-8} dx.$$

$$21.27. \int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{3x^2} dx.$$

$$21.28. \int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{x^3-4}}.$$

$$21.29. \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$21.30. \int 5x \operatorname{tg}(1+x^2) dx.$$

Завдання 22. Знайти інтеграл за формулою інтегрування частинами:

$$22.1. \int (2x-7) \cos x dx.$$

$$22.2. \int (3x-4) e^x dx.$$

$$22.3. \int (x-5) \ln x dx.$$

$$22.4. \int 3 \arcsin x dx.$$

$$22.5. \int (4x+3) \sin x dx.$$

$$22.6. \int x^3 \ln x dx.$$

$$22.7. \int (2x-9) 3^x dx.$$

$$22.8. \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$22.9. \int 4x^3 \ln x dx.$$

$$22.10. \int (3x+5) \sin x dx.$$

$$22.11. \int x^2 e^{-x} dx.$$

$$22.12. \int \operatorname{arccotg} x dx.$$

$$22.13. \int (x-3) \log_2 x dx.$$

$$22.14. \int (3x+4) \cos x dx.$$

$$22.15. \int (6x+2) e^x dx.$$

$$22.16. \int 3x^2 \ln x dx.$$

$$22.17. \int \arccos x dx.$$

$$22.18. \int (5x-2) 3^x dx.$$

$$22.19. \int (5x+4) \cos x dx.$$

$$22.20. \int 7x \ln x dx.$$

$$22.21. \int (2x+3) \log_3 x dx.$$

$$22.22. \int (3x-5) \sin x dx.$$

$$22.23. \int (3x-4) e^x dx.$$

$$22.24. \int 4x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$22.25. \int x \cos(x+6) dx.$$

$$22.26. \int (3x^2-4) \ln x dx.$$

$$22.27. \int \ln(2x-1) dx.$$

$$22.28. \int (2x+3) \sin x dx.$$

$$22.29. \int (5x-4) 3^x dx.$$

$$22.30. \int 2x \operatorname{arccotg} x dx.$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається первісною функції?
2. Дайте визначення невизначеного інтеграла.
3. Перерахуйте властивості невизначеного інтеграла.
4. Запишіть первісні основних елементарних функцій.
5. Назвіть методи знаходження невизначених інтегралів. Поясніть їх застосування на

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 63

прикладах.

6. Запишіть формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.

Рекомендована література:

1. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

2. Методичні рекомендації до лабораторних робіт з математичного аналізу: [для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди/ В. М. Бондарчук, Р. М. Головня, С. П. Давидчук, С. П. Семенець. Житомир : «Житомирська політехніка», 2021. 68 с.

3. Невизначений та визначений інтеграли : навч.-метод. посіб. / Першина Ю. І., Пріщенко О. П., Черемська Н. В., Черногор Т. Т. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с. Режим доступу: https://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2022/11/posibnyk_neviz-viz-integrali.pdf

4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 64

Тема 9. Визначений інтеграл

1. Визначений інтеграл.
2. Основні властивості визначеного інтеграла.
3. Геометричний зміст визначеного інтеграла.
4. Формула Ньютона-Лейбніца.
5. Методи обчислення визначеного інтеграла.
6. Загальна схема застосування інтеграла.

Мета: систематизація знань здобувачів освіти стосовно понять визначеного інтеграла; формування вмінь; застосування формули Ньютона-Лейбніца; опанування технікою обчислення інтегралів методами: заміни змінних, інтегрування частинами; оволодіння навичками використання визначеного інтеграла для обчислення площі плоскої фігури в системі декартових координат; розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: первісна функції, визначений інтеграл.
2. Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
3. Властивості визначеного інтеграла та їх застосування.
3. Формула Ньютона-Лейбніца та її застосування.
5. Основні методи обчислення визначеного інтеграла:
 - 5.1. Метод заміни змінних.
 - 5.2. Метод інтегрування частинами.
6. Застосування визначеного інтеграла для обчислення площі плоскої фігури в системі декартових координат.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 11 - С. 399; 13 – С. 400; 14 – С. 400; 19 – С. 407-408; Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 65

/ В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 11 - С. 401; 13 – С. 401; 14 – С. 401; 17 – С. 410 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 23, 24 потрібно відібрати по два варіанти задач, послуговуючись формулою:
№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: № , $\text{№}+15$.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: $\text{№}-15$, $\text{№}-5$.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: $\text{№}-30$, $\text{№}-25$.

Для прикладу, якщо $\text{№}=5$, то варіанти задач такі: 23.5, 23.20; 24.5, 24.20.

Для прикладу, якщо $\text{№}=17$, то варіанти задач такі: 23.2, 23.12; 24.2, 24.12.

Для прикладу, якщо $\text{№}=36$, то варіанти задач такі: 23.6, 23.9; 24.6, 24.9.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 23. Обчислити інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$23.1. \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4 dx}{x^2 + 5}$$

$$23.2. \int_{-3}^0 \frac{3 dx}{\sqrt{25 + 5x}}$$

$$23.3. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7 dx}{4 \sin^2 3x}$$

$$23.4. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$$

$$23.5. \int_{-\pi}^{\pi} 3 \sin \frac{x}{2} dx$$

$$23.6. \int_3^8 6 \sqrt{x+1} dx$$

$$23.7. \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$$

$$23.8. \int_0^1 \frac{2 dx}{\sqrt{4 - 3x}}$$

$$23.9. \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$$

$$23.10. \int_1^e \left(3 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$23.11. \int_1^2 \frac{3 dx}{2 \sqrt{x^2 + 16}}$$

$$23.12. \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{7 dx}{\sqrt{8 - x^2}}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/Д3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 66

$$23.13. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 \cos^2 5x}$$

$$23.14. \int_3^5 \frac{5 dx}{3 - x^2}$$

$$23.15. \int_{-\pi}^{\pi} \left(2x + \cos \frac{x}{3} \right) dx$$

$$23.16. \int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx$$

$$23.17. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (3x - 2 \operatorname{tg} x) dx$$

$$23.18. \int_{-2}^2 \frac{4 dx}{11 + x^2}$$

$$23.19. \int_{-1}^0 \left(4 + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

$$23.20. \int_1^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$23.21. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 dx}{5 \cos^2 x}$$

$$23.22. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$$

$$23.23. \int_0^1 (3x^2 - 2^x) dx$$

$$23.24. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$23.25. \int_0^1 (3e^x - 2\sqrt{7x}) dx$$

$$23.26. \int_1^2 (4x+9)^3 dx$$

$$23.27. \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} (4x - 3 \operatorname{tg} 2x) dx$$

$$23.28. \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4x + 3 \cos 5x) dx$$

$$23.29. \int_1^2 \frac{6 dx}{x^2 - 9}$$

$$23.30. \int_1^2 \left(3x + \frac{4}{x^3} \right) dx$$

Завдання 24. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$$24.1. y = x^2 - 2x + 4, y = 3x - 2.$$

$$24.2. y = \left(\frac{1}{2} \right)^x, y = 0, x = 1, x = 2.$$

$$24.3. y = x^2 - 3x + 2, y = x + 2.$$

$$24.4. y = x^2 - 2, y = 3x + 2.$$

$$24.5. y = x^2, y = 3 - x.$$

$$24.6. y = x^2 + 1, y = x - 1, x = 0, x = 3.$$

$$24.7. y = \frac{1}{1+x^2}, y = x, x = 0, x = 2.$$

$$24.8. y = \sqrt{x}, y = x^3.$$

$$24.9. y = 2x^2, y = x + 6$$

$$24.10. y = e^x, y = x, x = -1, x = 1.$$

$$24.11. y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$$

$$24.12. y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}.$$

$$24.13. y = \frac{1}{3+x^2}, y = \frac{x^2}{4}.$$

$$24.14. y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$24.15. y = 2\sqrt{x}, y = 2x^2.$$

$$24.16. y = 3^x, y = 0, x = 1, x = 2.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 67

24.17. $y^2 = 9x, y = 3x$.

24.18. $y = 6x - x^2 + 3, y = x^2 + 3$.

24.19. $x = \sqrt{4 - y^2}, x = 0, y = 0, y = 1$.

24.20. $y^2 = 4x, x^2 = 4y$.

24.21. $y = 3x^2 - 1, y = 4x + 3$.

24.22. $y = 2x - x^2, y = 0, x = 0, x = 3$.

24.23. $y = -2x^2 + 1, y = -2x - 3$.

24.24. $y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1$.

24.25. $y = x^3, y = 1, x = 0$.

24.26. $y = x + 1, y = \cos x, y = 0$.

24.27. $xy = 6, x + y - 7 = 0$.

24.28. $x^2 = 4y, y = \frac{8}{x^2 + 4}$.

24.29. $y = x^2, y = 2 - x^2$.

24.30. $y = \sqrt[3]{x} + 2, y = \frac{1}{2}x + 2$.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте означення визначеного інтеграла.
3. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
4. Перерахуйте властивості визначеного інтеграла.
5. Поясніть сутність формули Ньютона-Лейбніца.
6. Назвіть методи знаходження визначених інтегралів. Поясніть їх застосування на прикладах.
7. Як виконують заміну змінної у визначеному інтегралі?
8. Запишіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
9. Прокоментуйте, як обчислити площу плоскої фігури в системі декартових координат.

Рекомендована література:

1. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf
2. Методичні рекомендації до лабораторних робіт з математичного аналізу: [для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди/ В. М. Бондарчук, Р. М. Головня, С. П. Давидчук, С. П. Семенець. Житомир : «Житомирська політехніка», 2021. 68 с.
3. Невизначений та визначений інтеграли : навч.-метод. посіб. / Першина Ю. І., Пріщенко О. П., Черемська Н. В., Черногор Т. Т. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с. Режим доступу: https://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2022/11/posibnyk_neviz-viz-integrali.pdf
4. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 68

Тема 10. Диференціальні рівняння 1-го і 2-го порядку

Диференціальні рівняння 1-го порядку

1. Основні поняття диференціальних рівнянь.
2. Диференціальні рівняння першого порядку.

Мета: формування вмінь, набуття навичок розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: диференціальне рівняння, розв'язок диференціального рівняння, диференціальні рівняння першого порядку, лінійні диференціальні рівняння.
2. Диференціальні рівняння першого порядку:
 - 2.1. з відокремлюваними змінними;
 - 2.2. лінійні;
 - 2.3. метод Бернуллі.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 1 (а, б) – С. 524; 2 - С. 525-526; 8 (а) – С. 541-542; 16 – С. 556-557: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання: 1 (а, б) - С. 531; 8 (б) – С. 545; 13 – С. 557 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 25, 26 потрібно відібрати по два варіанти задач, послугуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: № , $\text{№} + 15$.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: $\text{№} - 15$, $\text{№} - 5$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 69

Якщо №>35, то варіанти задач: №-30, №-25.

Для прикладу, якщо №=5, то варіанти задач такі: 25.5, 25.20; 26.5, 26.20.

Для прикладу, якщо №=17, то варіанти задач такі: 25.2, 25.12; 26.2, 26.12.

Для прикладу, якщо №=36, то варіанти задач такі: 25.6, 25.9; 26.6, 26.9.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 25. Розв'язати диференціальне рівняння:

25.1. $xy' = 1 + y^2$.

25.2. $yy'\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+y^2}$.

25.3. $y' = \frac{x^2y+y}{\sqrt{4+y^2}}$.

25.4. $x + xy + y'(y + xy) = 0$,

25.5. $(y - x^2y)y' = 4x - 5xy^2$.

25.6. $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

25.7. $y' \operatorname{tg} x = y$.

25.8. $(e^{2x} + 5)y' = ye^{2x}$.

25.9. $e^{2x}(2y-1)y' = y$.

25.10. $(x+4)y' = y^2 - 1$.

25.11. $(1+e^x)yy' = e^x$.

25.12. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.

25.13. $(e^x + 8)y' = ye^x$.

25.14. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0$

25.15. $y' \operatorname{ctg} x = y^4$.

25.16. $y'y\sqrt{1-x^2} = \sqrt{5+y^2}$.

25.17. $(2x - xy^2)dx = (y + yx^2)dy$.

25.18. $y \ln y + xy' = 0$.

25.19. $xy' + y = y^2$.

25.20. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.

25.21. $xy' - 2y = yx^3$.

25.22. $xy' = y(1 + \ln y)$.

25.23. $(3+e^x)yy' = e^x$.

25.24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$.

25.25. $y' \sin x = y \ln y$.

25.26. $(1+e^x)yy' = e^x$.

25.27. $yy' = e^x(4+y^2)$.

25.28. $\sqrt{4-x^2}y' = 3x + xy^2$.

25.29. $y' \operatorname{ctg} y = x^3$.

25.30. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$.

Завдання 26. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задану початкову умову:

26.1. $y' - \frac{y}{x} = x^2$,

$y(1) = 0$.

26.2. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$,

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 70

$$26.3. \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad y(0) = 0.$$

$$26.4. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$26.5. \quad y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}.$$

$$26.6. \quad y' - \frac{x}{x+1} y = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$$

$$26.7. \quad y' - \frac{y}{x} = x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$26.8. \quad y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$$

$$26.9. \quad y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$$

$$26.10. \quad y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$26.11. \quad y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$26.12. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

$$26.13. \quad y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$26.14. \quad y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$$

$$26.15. \quad y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$$

$$26.16. \quad y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3.$$

$$26.17. \quad y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$$

$$26.18. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

$$26.19. \quad y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

$$26.20. \quad y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$26.21. \quad y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$26.22. \quad y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 71

$$26.23. \quad y' - \frac{2}{x+1}y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$$

$$26.24. \quad y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$$

$$26.25. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$26.26. \quad y' - y \cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$$

$$26.27. \quad y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$26.28. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$26.29. \quad y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0.$$

$$26.30. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$$

Питання для самоконтролю

1. Яке рівняння називають диференціальним?
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку?
4. Що називають розв'язком диференціального рівняння?
5. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння з відокремленими змінними?
6. У чому суть методу Бернуллі?

Рекомендована література:

1. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

2. Методичні рекомендації до лабораторних робіт з математичного аналізу: [для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди/ В. М. Бондарчук, Р. М. Головня, С. П. Давидчук, С. П. Семенець. Житомир : «Житомирська політехніка», 2021. 68 с.

3. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

4. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 72

Диференціальні рівняння 2-го порядку

1. Основні поняття теми.
2. Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку.

Мета: формування вмінь, набуття навичок розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: диференціальне рівняння, розв'язок диференціального рівняння, диференціальні рівняння другого порядку.

2. Диференціальні рівняння другого порядку:

2.1. Рівняння, які допускають пониження порядку.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 17 (а, б, в) - С. 561: Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

2. Виконати завдання 15 (а, б) - С. 566 з практикуму з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдань 27, 28 потрібно відібрати по два варіанти задач, послугуючись формулою:
№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: №, №+15.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: №-15, №-5.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: №-30, №-25.

Для прикладу, якщо №=5, то варіанти задач такі: 27.5, 27.20; 28.5, 28.20.

Для прикладу, якщо №=17, то варіанти задач такі: 27.2, 27.12; 28.2, 28.12.

Для прикладу, якщо №=36, то варіанти задач такі: 27.6, 27.9; 28.6, 28.9.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 73

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 27. Розв'язати диференціальне рівняння:

27.1. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

27.2. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

27.3. $x^3y'' + x^2y' = 1$.

27.4. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

27.5. $y''x \ln x = y'$.

27.6. $xy'' - y' = x^2e^x$.

27.7. $y''x \ln x = 2y'$.

27.8. $x^2y'' + xy' = 1$.

27.9. $y'' = -\frac{x}{y}$.

27.10. $xy'' = y'$.

27.11. $y'' = y' + x$.

27.12. $xy'' = y' + x^2$.

27.13. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

27.14. $xy'' + y' = \ln x$.

27.15. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

27.16. $y'' + 2x(y')^2 = 0$.

27.17. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

27.18. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$.

27.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$.

27.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.

27.21. $y'' + 4y' = 2x^2$.

27.22. $xy'' - y' = 2x^2e^x$.

27.23. $x(y'' + 1) + y' = 0$.

27.24. $y'' + 4y' = \cos 2x$.

27.25. $y'' + y' = \sin x$.

27.26. $x^2y'' = (y')^2$.

27.27. $2xy''y' = (y')^2 - 4$.

27.28. $y'''x \ln x = y''$.

27.29. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$.

27.30. $(1+x^2)y'' = 2xy$.

Завдання 28. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови:

28.1. $y'' = y'e^y$,

$y(0) = 0, y'(0) = 1$.

28.2. $(y')^2 + 2yy'' = 0$,

$y(0) = 1, y'(0) = 1$.

28.3. $yy'' + (y')^2 = 0$,

$y(0) = 1, y'(0) = 1$.

28.4. $y'' + 2y(y')^3 = 0$,

$y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$.

28.5. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$,

$y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 2$.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 74

$$28.6. \quad 2yy'' = (y')^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$$

$$28.7. \quad yy'' - (y')^2 = y^4, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$$

$$28.8. \quad y'' = -\frac{1}{2y^3}, \quad y(0)=\frac{1}{2}, \quad y'(0)=\sqrt{2}.$$

$$28.9. \quad y'' = 1 - (y')^2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$$

$$28.10. \quad (y'')^2 = y', \quad y(0)=\frac{2}{3}, \quad y'(0)=1.$$

$$28.11. \quad 2yy'' - (y')^2 + 1, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=1.$$

$$28.12. \quad y'' = 2 - y, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$$

$$28.13. \quad y'' = \frac{1}{y^3}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$$

$$28.14. \quad yy'' - 2(y')^2 = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

$$28.15. \quad y'' = y' + (y')^2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

$$28.16. \quad y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

$$28.17. \quad y''(1+y) = 5(y')^2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

$$28.18. \quad y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=3.$$

$$28.19. \quad 4(y'')^2 = 1 + (y')^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$$

$$28.20. \quad 2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$$

$$28.21. \quad 1 + (y')^2 = yy'', \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$$

$$28.22. \quad y'' + y(y')^3 = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

$$28.23. \quad yy'' - (y')^2 = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

$$28.24. \quad yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$$

$$28.25. \quad y'' - \frac{(1+\ln y)(y')^2}{y(1-\ln y)} = 0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$$

$$28.26. \quad y''(1+y) = (y')^2 + y', \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$$

$$28.27. \quad y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

$$28.28. \quad y^3 y' y'' + 1 = 0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 75

28.29. $yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

28.30. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Питання для самоконтролю

1. Яке рівняння називають диференціальним?
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням другого порядку?
4. Що називають розв'язком диференціального рівняння?

Рекомендована література:

1. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. – 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf

2. Методичні рекомендації до лабораторних робіт з математичного аналізу: [для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди/ В. М. Бондарчук, Р. М. Головня, С. П. Давидчук, С. П. Семенець. Житомир : «Житомирська політехніка», 2021. 68 с.

3. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. – 623 с.

4. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 76

Тема 11. Предмет теорії ймовірностей. Алгебра випадкових подій

1. Теорія ймовірностей як наука.
2. Простір елементарних подій.
3. Випадкові події та операції над ними.
4. Елементи комбінаторики.
5. Ймовірності подій.

Мета: формування вмінь, набуття навичок розв’язування ймовірнісних задач, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: подія, експеримент, елементарна подія, простір подій, випадкова подія, неможлива подія, достовірна подія, ймовірність, ймовірність події, класична ймовірність події, статистична ймовірність події, геометрична ймовірність події.

2. Теорія ймовірностей як наука.
3. Простір елементарних подій:
 - 3.1. Операції над подіями (сума подій, добуток подій).
 - 3.2. Властивості операцій додавання і множення.
4. Випадкові події та операції над ними.
5. Елементи комбінаторики:
 - 5.1. Основні принципи комбінаторики (правило додавання, правило множення).
 - 5.2. Основні види комбінаторних задач (перестановки, розміщення, сполучення).
6. Ймовірності подій (класична, статистична, геометрична).

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв’язання задач: 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.10 на сторінках: 13; 16; 18; 20; 30: Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 77

О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт).
Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

2. Виконати завдання:

Задача 2.1. Студент на екзамені відповідає на білет, у якому три питання. Нехай подія A_i – студент відповів на i -те питання. Виразити через A_i наступні події:

B – студент відповів принаймні на 2 питання;

C – студент не відповів на жодне питання;

D – студент відповів тільки на 1 питання.

Задача 2.2. Стрілець виконує чотири постріли в мішень. Нехай подія A_i – влучення в мішень при i -му пострілі. Виразити через A_i наступні події:

B – три влучення;

C – хоча б один промах;

D – не більше одного влучення;

E – хоча б одне влучення.

Задача 2.3. Абонент протягом години чекає телефонного дзвінка. Яка ймовірність того, що йому зателефонують протягом перших 20 хв?

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдання 29 (використовуючи дані з таблиці 1) потрібно відібрати по два варіанти задач, послуговуючись формулою:

N_0 - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $N_0 < 16$, то варіанти задач: N_0 , $N_0 + 15$.

Якщо $15 < N_0 < 36$, то варіанти задач: $N_0 - 15$, $N_0 - 5$.

Якщо $N_0 > 35$, то варіанти задач: $N_0 - 30$, $N_0 - 25$.

Для прикладу, якщо $N_0 = 4$, то варіанти задач такі: 29.4, 29.19.

Для прикладу, якщо $N_0 = 18$, то варіанти задач такі: 29.3, 29.13.

Для прикладу, якщо $N_0 = 37$, то варіанти задач такі: 29.7, 29.12.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 29. Ймовірність своєчасної сплати податків для першого підприємства дорівнює p , для другого – q , для третього – w . Визначити ймовірність своєчасної сплати податків:

а) не більше ніж одним підприємством;

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 78

б) лише одним підприємством;

в) двома підприємствами;

г) жодним підприємством

д) хоча б одним підприємством.

Таблиця 1. Варіанти задач до завдання 29

Номер варіанта	p	q	w
1	0,6	0,8	0,55
2	0,75	0,63	0,6
3	0,5	0,8	0,6
4	0,58	0,6	0,75
5	0,55	0,65	0,8
6	0,82	0,68	0,5
7	0,84	0,8	0,65
8	0,7	0,62	0,8
9	0,62	0,84	0,66
10	0,65	0,78	0,82
11	0,55	0,6	0,8
12	0,6	0,75	0,63
13	0,6	0,5	0,8
14	0,8	0,7	0,5
15	0,75	0,58	0,6
16	0,8	0,55	0,65
17	0,5	0,82	0,68
18	0,65	0,84	0,8
19	0,8	0,7	0,62
20	0,66	0,72	0,84
21	0,8	0,55	0,6
22	0,63	0,6	0,75
23	0,8	0,6	0,5
24	0,6	0,58	0,8
25	0,65	0,56	0,8

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 79

Номер варіанта	p	q	w
26	0,67	0,5	0,82
27	0,8	0,65	0,84
28	0,62	0,8	0,7
29	0,84	0,66	0,73
30	0,78	0,75	0,82

Питання для самоконтролю

1. У яких галузях людської діяльності використовуються методи теорії ймовірностей?
2. За яких умов явище вважається випадковим?
3. Дати означення поняття «подія».
4. Назвати властивості операцій над подіями.
5. Дати означення поняття «експеримент».
6. Що називають ймовірністю події?
7. Перелічити види подій. Схарактеризуйте їх.
8. Яку подію називають випадковою?
9. Що називають сумою двох випадкових подій A і B?
10. Що називають добутком двох випадкових подій A і B?
11. Що називають різницею двох випадкових подій A і B?
12. У чому полягає класичний спосіб визначення ймовірності? Навести приклади.
13. Сформулювати означення статистичної ймовірності події.
14. У чому сутність геометричної ймовірності події?

Рекомендована література:

1. Мазманішвілі О. С., Мельников О. С. Практикум з теорії ймовірностей : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей. Харків : НТУ «ХП», Видавець : О. А. Мірошніченко, 2025. 320 с. Режим доступу : <https://repository.kpi.kharkov.ua/entities/publication/1f9d60aa-93a6-4d00-940b-0942f46b0052>
2. Самойленко М. І., Кузнецов А. І., Костенко О. Б. Теорія ймовірностей : підручник. Харків : ХНАМГ, 2008. 194 с. Режим доступу: <https://core.ac.uk/download/pdf/11315952.pdf>
3. Синявська О. О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2019. 58 с. Режим доступу: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/21621>
4. Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 80

Тема 12. Основні теореми теорії ймовірностей

1. Формула повної ймовірності.
2. Формула Байєса. Переоцінка гіпотез.
3. Схема та формула Бернуллі.
4. Граничні теореми в схемі Бернуллі.

Мета: формування вмінь, набуття навичок розв’язування ймовірнісних задач, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: умовна ймовірність, повна ймовірність, локальна функція Лапласа, інтегральна функція Лапласа.
2. Теореми додавання та добутку ймовірностей. Умовна ймовірність.
3. Формула повної ймовірності.
4. Формула Байєса. Переоцінка гіпотез.
5. Схема та формула Бернуллі.
6. Локальна функція Лапласа.
7. Інтегральна функція Лапласа.
8. Локальна теорема Муавра-Лапласа.
9. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв’язання задач: 1.18, 1.19 на сторінках 42-43; 1.22, 1.23 - С. 52: Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 81

2. Опрацювати приклади розв'язання задач (формула Бернуллі) на сторінках 24-25 з рекомендованої літератури: джерело [1].

3. Виконати завдання:

Задача 3.1. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Задача 3.2. Знайти ймовірність того, що подія А з'явиться рівно 60 разів в 233 випробуваннях, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні рівна 0,15.

Задача 3.3. Восени садівник посадив 70 саджанців персиків. Ймовірність того, що саджанець прийметься, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що тільки 10 саджанців не розпустять листя весною.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Із завдання 30, 31 (використовуючи дані з таблиці 2, 3) потрібно відібрати по два варіанти задач, послугуючись формулою:

№ - порядковий номер у списку академічної групи.

Якщо $\text{№} < 16$, то варіанти задач: №, №+15.

Якщо $15 < \text{№} < 36$, то варіанти задач: №-15, №-5.

Якщо $\text{№} > 35$, то варіанти задач: №-30, №-25.

Для прикладу, якщо №=6, то варіанти задач такі: 30.6, 30.21; 31.6, 31.21.

Для прикладу, якщо №=20, то варіанти задач такі: 30.5, 30.15; 31.5, 31.15.

Для прикладу, якщо №=39, то варіанти задач такі: 30.9, 30.14; 31.9, 31.14.

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 30. Знайти ймовірність того, що подія А настане рівно m раз у n випробуваннях, якщо ймовірність появи події А в кожному випробуванні дорівнює p .

Таблиця 2. Варіанти задач до завдання 30

Номер варіанта	N	m	p
1	400	76	0,2
2	800	231	0,3

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ	Ф-19.09-
	ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»	05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11-
	Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 82

Номер варіанта	N	m	p
3	350	145	0,4
4	780	400	0,5
5	850	504	0,6
6	825	575	0,7
7	700	146	0,21
8	725	220	0,3
9	710	300	0,42
10	410	133	0,33
11	420	90	0,23
12	430	131	0,3
13	440	130	0,29
14	510	183	0,38
15	520	204	0,4
16	530	285	0,5
17	545	336	0,6
18	540	587	0,7
19	550	448	0,8
20	560	179	0,31
21	575	190	0,32
22	565	191	0,33
23	460	162	0,34
24	465	193	0,4
25	470	244	0,5
26	475	295	0,6
27	480	98	0,2
28	485	147	0,3
29	490	198	0,4
30	495	259	0,5

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 83

Завдання 31. Імовірність того, що деталь не пройшла перевірки ВТК, дорівнює p . Знайти імовірність того, що серед n випадково відібраних деталей виявиться неперевіреними від k_1 до k_2 деталей.

Таблиця 2. Варіанти задач до завдання 31

Номер варіанта	n	p	k_1	k_2
1	500	0,1	60	80
2	510	0,1	59	78
3	520	0,1	51	69
4	530	0,5	70	90
5	540	0,1	62	70
6	525	0,14	64	85
7	535	0,13	70	90
8	540	0,12	61	82
9	545	0,1	50	80
10	535	0,1	50	70
11	525	0,11	45	62
12	550	0,1	55	72
13	555	0,14	56	83
14	560	0,13	80	95
15	565	0,21	100	113
16	570	0,2	125	130
17	575	0,2	90	110
18	580	0,2	92	115
19	585	0,15	82	105
20	590	0,3	180	200
21	595	0,12	75	100
22	596	0,1	61	78
23	600	0,12	65	100
24	624	0,11	74	100
25	614	0,13	76	98
26	620	0,14	69	100

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 84

Номер варіанта	n	p	k1	k2
27	527	0,12	70	90
28	538	0,11	55	88
29	542	0,41	71	99
30	538	0,13	82	99

Питання для самоконтролю

1. Що розуміється під умовною ймовірністю події?
2. Записати формулу повної ймовірності.
3. Що називають схемою дослідів Бернуллі?
4. Які випробовування називають незалежними?
5. Записати формулу Бернуллі. Коли вона використовується?
6. Записати локальну функцію Лапласа.
7. Записати інтегральну функцію Лапласа.
8. Сформулювати локальну теорему Муавра-Лапласа. У яких випадках вона використовується?
9. Сформулювати інтегральну теорему Муавра-Лапласа. У яких випадках вона використовується?

Рекомендована література:

1. Мазманішвілі О. С., Мельников О. С. Практикум з теорії ймовірностей : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей. Харків : НТУ «ХП». Видавець : О. А. Мірошніченко, 2025. 320 с. Режим доступу : <https://repository.kpi.kharkov.ua/entities/publication/1f9d60aa-93a6-4d00-940b-0942f46b0052>
2. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей / Алілуйко А. М., Дзюбановська Н. В., Єршоменко В. О., Мартинюк О. М., Шинкарик М. І. Тернопіль : підручники і посібники, 2018. 352 с. Режим доступу : <https://dspace.wunu.edu.ua/handle/316497/32236>
3. Самойленко М. І., Кузнєцов А. І., Костенко О. Б. Теорія ймовірностей : підручник. Харків : ХНАМГ, 2008. 194 с. Режим доступу: <https://core.ac.uk/download/pdf/11315952.pdf>
4. Синявська О. О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2019. 58 с. Режим доступу: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/21621>
5. Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 85

Тема 13. Випадкові величини

1. Означення випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини.
2. Закон розподілу випадкової величини.
3. Інтегральна функція розподілу випадкової величини.
4. Диференціальна функція розподілу випадкової величини.
5. Рівномірний та нормальний закони розподілу випадкової величини.

Мета: формування вмінь, набуття навичок розв’язування ймовірнісних задач, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: випадкова величина, дискретна випадкова величина, неперервна випадкова величина, функція розподілу випадкової величини, закон розподілу випадкової величини.

2. Означення випадкової величини та класифікація випадкових величин.
3. Закон розподілу випадкової величини.
4. Дії над випадковими величинами.
5. Інтегральна функція розподілу випадкової величини.
6. Диференціальна функція розподілу випадкової величини.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв’язання задач: приклад 2.2. на сторінках 66-68: Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 86

2. Виконати завдання:

Задача 2.1. На шляху руху автомобіля 5 світлофорів, кожний з яких або дозволяє, або забороняє наступний рух з ймовірністю 0,5. Знайти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X , яка дорівнює числу світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки.

Задача 2.2. Відомо, що в наборі з 20 деталями знаходиться 2 бракованих. Навмання береться 3 деталі з цього набору. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількості бракованих деталей серед трьох взятих. Побудувати многокутник розподілу та знайти вираз функції розподілу $F(x)$.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 32. Студент складає іспити з трьох предметів. Ймовірність здати перший, другий і третій іспити відповідно дорівнюють p_1 ; p_2 ; p_3 .

- 1) Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа іспитів, які складе студент.
- 2) Побудувати многокутник розподілу ймовірностей.
- 3) Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік, якщо $p_1=0,9-N/100$; $p_2=0,8-N/100$; $p_3=0,7-N/100$, де N – порядковий номер у списку академічної групи.

Задача 33. Студент підготував до заліку M питань з K питань програми. Білет містить n питань.

1. Скласти закон розподілу ДВВХ – числа питань, на які студент знає відповіді.
2. Побудувати многокутник розподілу ймовірностей.

Варіанти 1-10: $K = N + 30$, $M = N + 20$, $n = 3$, де N – порядковий номер у списку академічної групи.

Варіанти 11-20: $K = N + 20$, $M = N + 11$, $n = 4$, де N порядковий номер у списку академічної групи.

Варіанти 21-30: $K = N + 10$, $M = N + 2$, $n = 5$, де N – порядковий номер у списку академічної групи.

Питання для самоконтролю

1. Що називається випадковою величиною? Навести приклади.
2. Назвати типи випадкових величин.
3. Що називають законом розподілу?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 87

4. Дати означення функції розподілу випадкової величини.
5. Перерахувати властивості функції розподілу випадкової величини.
6. Що таке ряд розподілу, многокутник розподілу?
7. У якому випадку випадкова величина називається дискретною?
8. Сформулювати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.
9. Прокоментувати, що являє собою табличний запис закону розподілу.
10. Як можна визначити функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X ?

Рекомендована література:

1. Мазманішвілі О. С., Мельников О. С. Практикум з теорії ймовірностей : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей. Харків : НТУ «ХП». Видавець : О. А. Мірошніченко, 2025. 320 с. Режим доступу : <https://repository.kpi.kharkov.ua/entities/publication/1f9d60aa-93a6-4d00-940b-0942f46b0052>
2. Самойленко М. І., Кузнєцов А. І., Костенко О. Б. Теорія ймовірностей : підручник. Харків : ХНАМГ, 2008. 194 с. Режим доступу: <https://core.ac.uk/download/pdf/11315952.pdf>
3. Синявська О. О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2019. 58 с. Режим доступу: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/21621>
4. Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 88

Тема 14. Числові характеристики випадкових величин

1. Математичне сподівання дискретної та неперервної випадкової величини.
2. Дисперсія дискретної та неперервної випадкової величини.
3. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини. Принцип практичної впевненості.
4. Приклади розв'язування задач на знаходження числових характеристик випадкових величин.

Мета: формування вмінь, набуття навичок розв'язування задач на математичне сподівання, дисперсію випадкової величини, середнє квадратичне відхилення випадкової величини, розвиток структурно-математичного мислення та виховання математичної культури здобувачів вищої освіти.

Під час підготовки до практичного заняття: опрацювати матеріал лекції з теми заняття та відповідну рекомендовану літературу.

План

I. К-захист виконаних робіт та перевірка засвоєння основних теоретичних положень із теми.

1. Основні поняття теми: випадкова величина, математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.
2. Математичне сподівання дискретної випадкової величини та його властивості.
3. Дисперсія дискретної випадкової величини та її властивості.
4. . Середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

II. Практична частина:

1. Опрацювати приклади розв'язання задач: 2.3 – С. 70; 2.4 - С. 72: Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

2. Виконати завдання:

Задача 2.1. Монету підкидають тричі. Випадкова величина X – число появи герба. Знайти розподіл ймовірностей даної величини, якщо при кожному підкиданні ймовірність

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/ДЗ.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 89

появи герба дорівнює 0,5. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Задача 2.2. Дискретна випадкова величина задана таблицею:

<i>X</i>	-2	0	1	3	4
<i>P</i>	0,1	0,5	0,15	0,3	P ₅

Обчислити ймовірність $P_5 = P(X = 4)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

3. Виконати індивідуальне домашнє завдання:

Завдання виконуються в зошиті. Індивідуальна домашня робота захищається на наступному практичному занятті: К-захист (компетентнісний захист).

Завдання 34. Студент підготував до заліку *M* питань з *K* питань програми. Білет містить *n* питань. Обчислити числові характеристики розподілу:

а) математичне сподівання випадкової величини - $M(X)$;

б) дисперсію випадкової величини - $D(X)$;

в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\sigma(X)$, при таких значеннях *K*, *M*, *n* (де *N* – порядковий номер у списку академічної групи):

Варіанти 1-10: $K = N + 30$, $M = N + 20$, $n = 3$, де *N* – порядковий номер у списку академічної групи.

Варіанти 11-20: $K = N + 20$, $M = N + 11$, $n = 4$, де *N* порядковий номер у списку академічної групи.

Варіанти 21-30: $K = N + 10$, $M = N + 2$, $n = 5$, де *N* – порядковий номер у списку академічної групи.

Питання для самоконтролю

1. Що таке математичне сподівання випадкової величини?
2. Назвати властивості математичного сподівання.
3. Дати означення дисперсії випадкової величини.
4. Перерахувати властивості дисперсії.
5. Сформулювати визначення «середнє квадратичне відхилення випадкової величини»?
6. Записати формулу середнього квадратичного відхилення випадкової величини.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 90

Рекомендована література:

1. Мазманішвілі О. С., Мельников О. С. Практикум з теорії ймовірностей : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей. Харків : НТУ «ХП». Видавець : О. А. Мірошніченко, 2025. 320 с. Режим доступу : <https://repository.kpi.kharkov.ua/entities/publication/1f9d60aa-93a6-4d00-940b-0942f46b0052>
2. Самойленко М. І., Кузнєцов А. І., Костенко О. Б. Теорія ймовірностей : підручник. Харків : ХНАМГ, 2008. 194 с. Режим доступу: <https://core.ac.uk/download/pdf/11315952.pdf>
3. Синявська О. О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2019. 58 с. Режим доступу: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/21621>
4. Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. : О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 91

Список використаної літератури

1. Барабаш О. В., Дзядик С. Ю., Жданова Ю. Д., Омецинська О. Б., Онищенко В.В., Шевченко С. М.. «Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних». К, 2015 225 с. Режим доступу: <http://www.dut.edu.ua/ua/lib/1/category/725/view/1597>.
2. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Свєрчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр», 2023. 64 с.
3. Бондарчук В. М., Головня Р. М., Свєрчевська І. А. Методичні рекомендації для проведення практичних (лабораторних) занять з навчальної дисципліни «Вища математика». Частина 2. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної для здобувачів освіти освітнього ступеня «Бакалавр». Житомирська політехніка, 2023. 72 с.
4. Вища математика. Практикум. Навчальний посібник / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. – К. : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. 409 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf
5. Мазманішвілі О. С., Мельников О. С. Практикум з теорії ймовірностей : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей. Харків : НТУ «ХП». Видавець : О. А. Мірошніченко, 2025. 320 с. Режим доступу : <https://repository.kpi.kharkov.ua/entities/publication/1f9d60aa-93a6-4d00-940b-0942f46b0052>
6. Методичні рекомендації до лабораторних робіт із математичного аналізу: [для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. Ч. 1. Введення в математичний аналіз / С.П. Семенець, В.М. Бондарчук, Р.М. Головня, С.П. Давидчук. – Житомир: «Житомирська політехніка», 2020. 51 с.
7. Методичні рекомендації до лабораторних робіт з математичного аналізу: [для здобувачів вищої освіти освітнього рівня «бакалавр»]. Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди / В. М. Бондарчук, Р. М. Головня, С. П. Давидчук, С. П. Семенець. Житомир : «Житомирська політехніка», 2021. 68 с.
8. Музиченко Світлана, Філон Лідія. Практикум з математичного аналізу. Частина 1. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навчальний посібник [електронне видання]. Чернівці: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2022. 92 с.
9. Невизначений та визначений інтеграли : навч.-метод. посіб. / Першина Ю. І., Пріщенко О. П., Черемська Н. В., Черногор Т. Т. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. 188 с. Режим доступу: https://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2022/11/posibnyk_neviz-viz-integrali.pdf
10. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посібник. – Харків : УкрДУЗТ, 2022. Ч. 1. 231 с.
Режим доступу: http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/10149/3/навчальний_посібник.pdf
11. Похідна та її застосування : навчально-методичний посібник для студентів

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015 та ДСТУ ISO 21001:2019	Ф-19.09- 05.02/2/D3.00.1/Б/ОК11- 2025
	Екземпляр № 1	Арк 92 / 92

технічних спеціальностей усіх форм навчання / Ю.І. Першина, Н.В. Черемська, Т. Т. Черногор – Харків: НТУ «ХП», 2023. 110 с.

12. Практикум з вищої математики. Частина 1: навчальний посібник / В. М. Мойсишин, Я. І. Савчук, А. І. Бандура та ін.; за ред. В. М. Мойсишина, Я. І. Савчука. Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2022. 623 с.

13. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей / Алілуйко А. М., Дзюбановська Н. В., Єрмоменко В. О., Мартинюк О. М., Шинкарик М. І. Тернопіль : підручники і посібники, 2018. 352 с. Режим доступу : <https://dspace.wunu.edu.ua/handle/316497/32236>

14. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів освіти спеціальності 101 Екологія факультету хімії та екології. Луцьк, 2024. 55 с.

15. Самойленко М. І., Кузнецов А. І., Костенко О. Б. Теорія ймовірностей : підручник. Харків : ХНАМГ, 2008. 194 с. Режим доступу: <https://core.ac.uk/download/pdf/11315952.pdf>

16. Синявська О. О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2019. 58 с. Режим доступу: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/21621>

17. Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. В. Барабаш, А. П. Мусієнко, О. В. Свинчук. Електронні текстові дані (1 файл: 3705 Кбайт). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 193 с.

18. Функція. Границя. Обчислення границь функції: методичні рекомендації до практичних занять з дисципліни «Математичний аналіз» для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» / О. О. Сдвижкова, Д. В. Бабець, С. Є. Тимченко, Д. В. Клименко. Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро : НТУ «ДП», 2024. 42 с. Режим доступу: <https://vm.nmu.org.ua/libr/metod/113-funkcja,%20grancja.pdf>

Інформаційні ресурси в Інтернеті

Бібліотечно-інформаційний ресурс (книжковий фонд, періодика, фонди на електронних носіях тощо) бібліотеки:

1. Бібліотека Державного університету «Житомирська політехніка»: <https://lib.ztu.edu.ua/>

2. Бібліотека українських підручників [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://pidruchniki.ws/>

3. Житомирська обласна універсальна наукова бібліотека ім. Олега Ольжича [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://www.lib.zt.ua/>

4. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського: режим доступу: <http://nbuv.gov.ua>