

2. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ГЕОДЕЗІЇ

Тема 2.5: Редукування геодезичних вимірювань з фізичної поверхні на поверхню земного еліпсоїда.

1. Поняття про редуційну задачу
2. Редукування лінійних вимірів
3. Редукування вимірюваних горизонтальних напрямів

1. Поняття про редуційну задачу

Результати геодезичних вимірювань, які виконуються на земній поверхні, відносяться до різних рівневих поверхонь. Це ж саме відноситься і до результатів астрономічних спостережень. Для визначення взаємного положення пунктів в єдиній системі координат за результатами геодезичних і астрономічних вимірів останні повинні бути приведені до однієї рівневої поверхні або взагалі до однієї, певним чином встановленої, відлікової поверхні.

Віднесення результатів астрономічних спостережень і геодезичних вимірювань до поверхні геоїда полягає, в основному, у введенні поправок за висоту пунктів над рівнем Світового океану. Оскільки поверхня геоїда має досить складну форму, а її розміри не відомі, то при математичному опрацюванні результатів геодезичних вимірювань поверхня геоїда замінюється більш простою геометричною відліковою поверхнею – земним еліпсоїдом. Розміри земного еліпсоїда і його положення або орієнтування в тілі Землі повинні бути встановлені так, щоб його поверхня була близькою до поверхні геоїда.

У класичному методі визначення геодезичних координат треба здійснити перехід від довжин ліній і горизонтальних напрямів, вимірюваних на фізичній поверхні Землі, до довжин відповідних геодезичних ліній і до напрямів цих ліній на референц-еліпсоїді. Виникає так звана редуційна задача вищої геодезії.

Редуційною задачею називають теорію переходу від безпосередньо вимірюваних на фізичній поверхні Землі величин (довжин ліній, горизонтальних напрямів та вертикальних кутів, прискорень сили ваги) до відповідних їм величин на поверхні прийнятого еліпсоїда.

У класичній геодезії обчислення планових координат B – геодезичної широти і L – геодезичної довготи пунктів прийнято виконувати окремо від геодезичних висот H . Подальше опрацювання геодезичної мережі ведеться на поверхні земного еліпсоїда і є, фактично, розв'язком двовимірної задачі. При цьому можна, в залежності від практичної необхідності, виконати проектування елементів мережі вже з поверхні еліпсоїда на сферу або площину.

Технологія обчислення геодезичних широт і довгот передбачає проектування пунктів триангуляції з фізичної поверхні Землі на поверхню земного еліпсоїда, переважно, на референц-еліпсоїд. Проекції цих пунктів утворюють ряд точок на поверхні референц-еліпсоїда, що з'єднуються геодезичними лініями. В результаті цього отримують мережу, що складається із сфероїдних трикутників. Із розв'язування цих трикутників визначають довжини їх сторін (довжини геодезичних ліній), а в подальшому, шляхом розв'язування головних геодезичних задач від вихідного пункту мережі, використовуючи при цьому виміряні горизонтальні напрями, знаходять геодезичні координати B, L решти пунктів та геодезичні азимути A для всіх можливих напрямів.

Існує два методи розв'язання редуційної задачі: математично строгий метод – метод проектування, і наближений – метод розгортання.

Для застосування методу проектування вже повинна бути з достатньою точністю відома фігура Землі. А саме, потрібно знати:

- з похибкою декількох хвилин геодезичні координати B, L пунктів та геодезичні азимути A напрямів;
- з похибкою 1-3 м, а в деяких випадках і точніше, геодезичні висоти пунктів H ;
- з похибкою 1-2" складові відхилення прямовисної лінії ξ і η .

Наближені значення геодезичних координат B, L , які необхідні для редукування триангуляції, можна зняти з топографічної карти або обчислити шляхом розв'язування прямих геодезичних задач на поверхні еліпсоїда, використовуючи при цьому виміряні (не редуковані) горизонтальні напрями.

Геодезичну висоту H представляють у вигляді суми $H = H' + \zeta'$, де H' – нормальна висота, що визначається з високою точністю із геометричного нівелювання, ζ' – висота квазігеоїда над референц-еліпсоїдом. Останні висоти визначають із астрономічного чи астрономо-гравіметричного нівелювання.

Складові відхилення прямовисних ліній ξ, η безпосередньо можуть бути обчислені тільки для тих пунктів, де виконані астрономічні визначення широт і довгот. Для решти пунктів їх отримують методом непрямої інтерполяції з використанням гравіметричних даних.

При початковому опрацюванні триангуляції перерахованих вище даних, необхідних для проведення редукування, ще немає. Можна отримати тільки висоти пунктів над геоїдом (квазігеоїдом) із геометричного нівелювання та обчислити наближені значення координат B, L і азимутів напрямів A . З цими даними для редукування результатів геодезичних вимірювань на поверхню референц-еліпсоїда використовується метод розгортання.

При застосуванні методу розгортання геодезичну мережу фактично редукують прямовисними лініями на геоїд, використовуючи для лінійних редукацій висоти над рівнем моря, але вважають, що тим самим виконано редукування на референц-еліпсоїд. Метод розгортання можна трактувати як наближений метод проектування, коли при обчисленні редукацій не акцентується на різниці між геоїдом і референц-еліпсоїдом, а прямовисні лінії розглядаються як нормалі до референц-еліпсоїда. Звісно, різниці між поверхнями референц-еліпсоїда і геоїда будуть відносно малими за величиною лише у тому випадку, коли розміри і орієнтування референц-еліпсоїда визначені під умовою як найбільшої близькості його поверхні до поверхні геоїда. Проте навіть тоді не можна не рахуватися з впливом відступів геоїда на результати опрацювання геодезичних вимірів.

Впливи відступів геоїда від прийнятого референц-еліпсоїда на результати геодезичних визначень можуть бути усунуті тільки застосуванням відповідних способів приведення геодезичних вимірів до поверхні референц-еліпсоїда. Математично однозначне визначення положення пунктів на поверхні референц-еліпсоїда може бути досягнуто тільки при проектуванні їх на цю поверхню нормальми до неї. Отже, правильне опрацювання геодезичних вимірювань, пов'язане з введенням у них редукацій – поправок, що однозначно визначаються відповідними відступами поверхні геоїда від прийнятого референц-еліпсоїда.

З теоретичних позицій для застосування вказаного методу проектування можна прийняти будь-який референц-еліпсоїд, який характеризує фігуру Землі, в тому числі і загальний земний еліпсоїд. Якщо знати відступи геоїда від прийнятого еліпсоїда, то завжди можна достатньо точно визначити ті поправки, які повинні бути введені у результати геодезичних вимірювань для віднесення їх до поверхні цього еліпсоїда. Проте, якщо відступи геоїда будуть досить значними, то відповідні їм редукації геодезичних вимірювань також будуть значними. В цьому випадку результати вимірів, особливо лінійних, після приведення їх до поверхні еліпсоїда

будуть дуже відрізнятися від їх значень, отриманих на поверхні геоїда. З чисто практичних потреб їх використання необхідно, щоб вони не підлягали великим спотворенням, хоча і досить закономірним у математичному плані. Тому при опрацюванні геодезичних вимірювань методом проектування також необхідно застосовувати такий еліпсоїд, який за розмірами та орієнтуванням найбільш близько підходить до фігури геоїда на конкретній ділянці Землі, тобто референц-еліпсоїд.

Розглянемо формули, за якими обчислюють поправки в лінійні вимірювання (вимірювання відстаней між пунктами мережі світло- або радіовіддалемірами чи GPS-методами) та кутові вимірювання (горизонтальні напрями) для редукування їх на референц-еліпсоїд методом проектування.

2. Редукування лінійних вимірів

Якщо D – виміряна похила віддаль між віддалеміром на пункті A і відбивачем на пункті B , приведена до центрів знаків, то для редукування її на референц-еліпсоїд обчислюються геометричні поправки, зміст яких зрозумілий із *рис. 2.4*.

Поправка за нахил лінії

Визначається на основі відомої формули

$$D' - D = \Delta D_1 = -2D \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

де α – кут нахилу даної лінії. Зважаючи на те, що кут нахилу є малою величиною, отримаємо

$$\Delta D_1 = -\frac{(H_2 - H_1)^2}{2D} - \frac{(H_2 - H_1)^4}{(2D)^3}, \quad (2.43)$$

тут

$$H_1 = H'_1 + \zeta'_1, \quad H_2 = H'_2 + \zeta'_2.$$

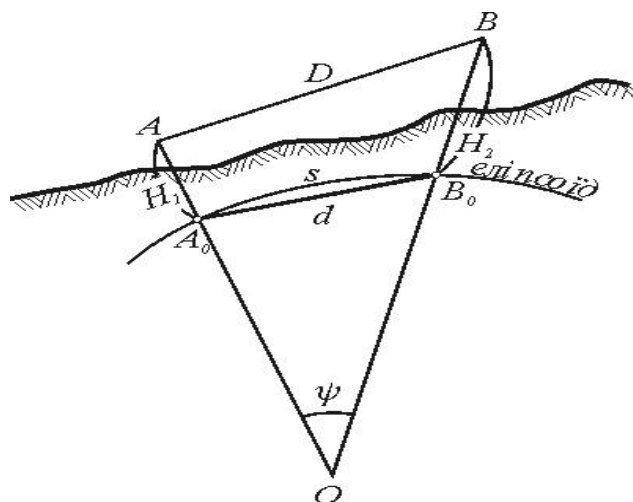


Рис. 2.4.

У формулах (2.43): H_1 і H_2 – геодезичні висоти відповідно віддалеміра та відбивача; H'_1, H'_2 – висоти пунктів A і B над квазігеоїдом; ζ'_1, ζ'_2 – висоти квазігеоїда над референц-еліпсоїдом.

Поправка за висоту

Визначається дана поправка із подібних трикутників ABO та A_0B_0O

$$d - D' = \Delta D_2 = -\frac{H_m}{R_A} D + \frac{H_m^2}{R_A^2} D, \quad (2.44)$$

де $H_m = \frac{H_1 + H_2}{2}$; R_A – радіус кривини нормального перерізу еліпсоїда, що відповідає заданій лінії. Величину R_A з достатньою точністю можна обчислити за формулою (2.43) або

$$R_A \approx a(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_m - e^2 \cos^2 B_m \cos^2 A_m), \quad (2.45)$$

де B_m – широта середньої точки лінії; A_m – середній азимут лінії.

Тоді довжина хорди $A_0 B_0 = d$ буде визначатися на основі формули

$$d = D + \Delta D_1 + \Delta D_2. \quad (2.46)$$

Введемо кут ψ при центрі сфери O (див. *рис. 2.4*). Отримаємо

$$s = R_A \psi. \quad (2.47)$$

Із трикутника ABO маємо

$$D^2 = (R_A + H_1)^2 + (R_A + H_2)^2 - 2(R_A + H_1)(R_A + H_2)\cos\psi.$$

Довжина хорди d буде дорівнювати

$$\frac{d}{2} = R_A \sin \frac{\psi}{2}. \quad (2.48)$$

Враховуючи, що

$$\sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\psi),$$

остаточно отримаємо інший вигляд формули для обчислення довжини хорди d

$$d = \sqrt{\frac{(D + \Delta H)(D - \Delta H)}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}}, \quad (2.49)$$

де $\Delta H = H_2 - H_1$, а R_A обчислюється за формулою (2.45).

Для обчислення довжини s дуги $A_0 B_0$ скористаємося формулами (2.47) та (2.48). Шляхом розкладу $\sin$ малого кута в ряд отримаємо

$$s = d + \frac{d^3}{24R_A^2} + \dots \quad (2.50)$$

Наведені вище формули можна використовувати для редукування відстаней до сотні кілометрів.

3. Редукування виміряних горизонтальних напрямів

Безпосередньо виміряний горизонтальний кут в пункті M , що розташований на земній поверхні, між напрямками на пункти A і B – це двогранний кут, ребром якого є лінія Mm , що збігається з вертикальною віссю кутомірного приладу, тобто прямовисна лінія (*рис. 2.5*).

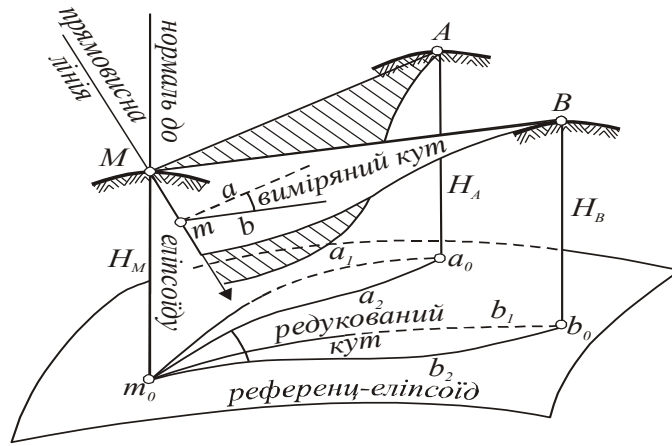


Рис. 2.5.

Після редукування на поверхню референц-еліпсоїда це повинен бути двогранний кут, ребром якого є нормаль Mm_0 до референц-еліпсоїда, що проходить через пункт M , а гранями – нормальні площини в пункті M , що включають проекції пунктів A і B на еліпсоїд.

Перехід від виміряного кута до редукованого досягається введенням в безпосередньо виміряні напрями поправок: δ^I – за відхилення прямовисної лінії, δ^{II} – за висоту точки спостереження.

Поправка δ^I відповідає суміщенню вертикальної осі приладу з нормаллю до поверхні референц-еліпсоїда. Після її введення одержуємо напрям нормального перерізу, утвореного площиною, що проходить через візирну ціль. Вигляд цієї поправки дається формулою (2.11).

Поправка δ^{II} забезпечує перехід до прямого нормального перерізу, утвореного площиною, що проходить через проекцію (по нормалі) центра знаку візування на референц-еліпсоїд. Ця редукція зумовлена тим, що нормалі до еліпсоїда у загальному випадку є перехресними прямими. тому проекція пункту, що спостерігається, на референц-еліпсоїд по нормалі не лежить у площині, що включає нормаль до пункту спостереження та виміряний напрям.

Отже, у кожний виміряний на земній поверхні горизонтальний напрям, попередньо приведений до центрів знаків, повинні бути введені наступні поправки:

- поправка за відхилення прямовисної лінії в пункті спостереження

$$\delta^I = (\eta_1 \cos A_{12} - \xi_1 \sin A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12}. \quad (2.51)$$

- поправка за висоту візирної цілі над поверхнею референц-еліпсоїда

$$\delta^{II} = \frac{e^2}{2M_2} H_2 \cos^2 B_2 \sin 2A_{12} \rho''. \quad (2.52)$$

Після введення вказаних поправок у виміряні горизонтальні напрями отримаємо на поверхні референц-еліпсоїда кут між прямими нормальними перерізами $m_0a_1a_0$ та $m_0b_1b_0$ із точки m_0 на точки a_0 і b_0 (див. рис. 2.5). Оскільки точки на поверхні еліпсоїда з'єднуються геодезичними лініями, то, очевидно, необхідно перейти від напрямів прямих нормальних перерізів до напрямів геодезичних ліній. Ці питання розглядаються у розділі вищої геодезії “Сфероїдна геодезія”, тому наведемо лише остаточний вигляд цієї поправки:

- поправка за перехід від нормального перерізу до геодезичної лінії

$$\delta^{III} = \frac{e^2}{12N_1^2} s_{12}^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_{12} \rho''. \quad (5.53)$$

В формулах (2.50) – (2.53) індекс 1 відповідає точці встановлення приладу, а індекс 2 – точці спостереження; A_{12} – геодезичний азимут напрямку з точки 1 на точку 2; z_{12} – астрономічна (виміряна) зенітна відстань візирної цілі; H_2 – геодезична висота візирної цілі; M і N – радіуси кривини меридіана і першого вертикала відповідно; s – віддаль між точками, що віднесені до поверхні еліпсоїда; B_1, B_2 – геодезичні широти.

Якщо зенітна віддаль не вимірювалась, але відомі висоти H'_1 і H'_2 центрів знаків над поверхнею квазігеоїда, то $ctgz_{12}$ можна обчислити за формулою:

$$ctgz_{12} = \frac{(H'_2 + \nu_2) - (H'_1 + i_1)}{s_{12}} - \frac{s_{12}}{2R}, \quad (2.54)$$

де i_1 і ν_2 – висоти приладу та візирної цілі над центрами відповідних знаків; R – середній радіус Землі ($R = 6\,371$ км).

Кожну із поправок, що визначаються формулами (5.50) – (5.53) прийнято вираховувати з похибкою 0,001". Сумарна поправка $\delta = \delta^I + \delta^{II} + \delta^{III}$ заокруглюється до 0,01" і вводиться у виміряний горизонтальний напрям при опрацюванні геодезичних мереж вищих класів.

Поправку в горизонтальний кут дістаємо як різницю поправок відповідних напрямів.

При застосуванні методу розгортання поправка за відхилення прямовисної лінії δ^I не вводиться, оскільки вважається, що нормаль до референц-еліпсоїда збігається з прямовисною лінією; у всіх інших формулах замість геодезичних висот використовуються висоти над рівнем моря.