

2. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

Тема 2.2: Зв'язки між координатами

1. Зв'язок між геодезичною, приведеною і геоцентричною широтами.
2. Зв'язки між різними видами координат.

1. Зв'язок між геодезичною, приведеною і геоцентричною широтами.

Для того щоб встановити зв'язок геодезичної широти B з приведеною u , розглянемо який-небудь меридіан, наприклад, такий, площиною якого є площина zx . Для цього меридіана $L = \text{const}$ і його рівняння в параметричній формі отримаємо із рівнянь (2.10).

$$x = a \cos u, \quad z = b \sin u.$$

Тангенс кута, утвореного нормаллю з віссю x (рис. 2.4), рівний похідній $\frac{dx}{dz}$, взятій з оберненим знаком, тобто

$$\operatorname{tg} B = -\frac{dx}{dz},$$

або

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} u \frac{a}{b}.$$

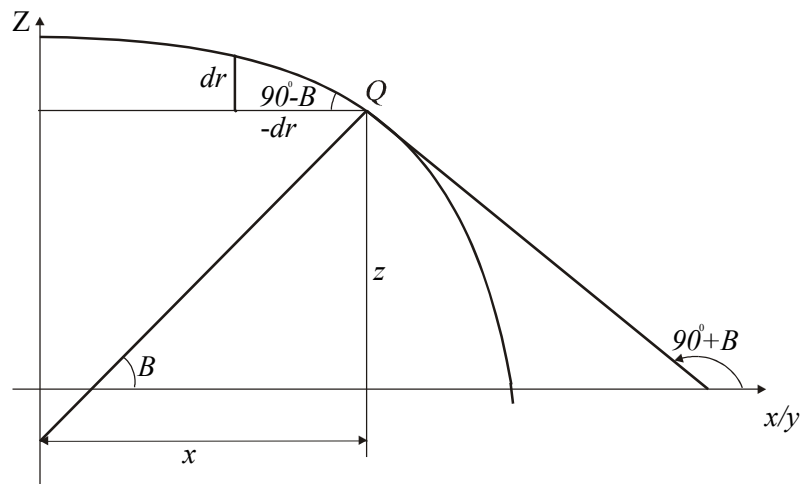


Рис. 2.4

Із останньої формули легко можна отримати

$$\sin B = \frac{a \sin u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}},$$

$$\cos B = \frac{a \sqrt{1 - e^2} \cos u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}.$$

Ввівши позначення

$$V = \frac{a}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}},$$

отримаємо наступні формули зв'язку між геодезичною B та приведеною u широтами

$$\cos B = V \sqrt{1 - e^2} \cos u; \quad \sin B = V \sin u. \quad (2.18)$$

Приймаючи до уваги третю формулу (2.5), отримаємо

$$tgu = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B. \quad (2.19)$$

На основі формул (2.15) та (2.19) зв'язок між геоцентричною широтою Φ та геодезичною B буде наступним

$$\operatorname{tg} \Phi = (1-e^2) \operatorname{tg} B. \quad (2.20)$$

Для подальшого викладу нам будуть необхідні ще наступні залежності, що отримуються із (2.19)

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}, \\ \sin u &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Якщо ввести позначення

$$W = \sqrt{1-e^2 \sin^2 B}, \quad (2.22)$$

то формули (2.21) будуть мати наступний вид

$$\cos u = \frac{\cos B}{W}; \quad \sin u = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin B}{W}. \quad (2.23)$$

Згідно формул (2.23) і (2.18) можна записати зв'язок між величинами V та W

$$W = V \sqrt{1-e^2}. \quad (2.24)$$

Із формули (2.24) з врахуванням (2.22) та зв'язку між ексцентриситетами (перша формула із 2.5) отримаємо вираз для V у функції геодезичної широти B

$$V = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B}. \quad (2.25)$$

Функції V та W називають ще *основними сфероїдними функціями геодезичної широти*.

У сфероїдній геодезії часто використовується позначення

$$e' \cos B = \eta, \quad (2.26)$$

тоді

$$V^2 = 1 + \eta^2. \quad (2.27)$$

2. Зв'язки між різними видами координат.

Між просторовими прямокутними (декартовими) X, Y, Z та геоцентричними Φ, L координатами, на основі формул (2.10)

$$X = r \cos L,$$

$$Y = r \sin L,$$

$$Z = z,$$

та отриманих співвідношень (2.16), існують прості математичні залежності

$$X = r_e \cos \Phi \cos L,$$

$$Y = r_e \cos \Phi \sin L, \quad (2.28)$$

$$Z = r_e \sin \Phi.$$

Радіус-вектор еліпсоїда r_e визначається із (2.17).

Обернені залежності, на основі (2.28), будуть мати наступний вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{Y}{X}, \\ \operatorname{tg} \Phi &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Між просторовими прямокутними координатами X, Y, Z , приведеною широтою u та геодезичною довготою L на основі формул (2.10) та отриманих співвідношень між великою та малою півосями (див. третю формулу (2.5)), існують наступні залежності

$$\begin{aligned} X &= a \cos u \cos L, \\ Y &= a \cos u \sin L, \\ Z &= a \sqrt{1-e^2} \sin u. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Обернені залежності, на основі (2.30), будуть мати наступний вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{Y}{X}, \\ \operatorname{tg} u &= \frac{Z \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Враховуючи співвідношення (2.20) та (2.30), для поверхневих еліпсоїдних координат B, L та декартових X, Y, Z формули зв'язку мають вид

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \cos B \cos L, \\ Y &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \cos B \sin L, \\ Z &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} (1-e^2) \sin B. \end{aligned}$$

Вираз $\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$ позначимо через N і, як буде видно із подальшого викладу, це є рівняння для радіуса кривини першого вертикалу заданої точки на поверхні еліпсоїда у функції геодезичної широти. Остаточно, формули зв'язку будуть наступними:

$$\begin{aligned} X &= N \cos B \cos L, \\ Y &= N \cos B \sin L, \\ Z &= N(1-e^2) \sin B, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Обернені залежності будуть мати наступний вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{Y}{X}, \\ \operatorname{tg} B &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \frac{1}{(1-e^2)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Перша формула (2.33) отримана простим перетворенням (шляхом ділення другої формули (2.32) на першу). Друга формула (2.33) отримана наступним чином. Із перших двох формул (2.32) отримаємо

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = N \cos B.$$

Поділивши третє рівняння (2.32) на отримане, дістанемо остаточно друге рівняння (2.33).

Зв'язок між геодезичними координатами B, L, H та декартовими X, Y, Z отримаємо наступним чином. Спроектуємо висоту H на відповідні осі. Тоді проекції висоти будуть виражені залежностями

$$\begin{aligned} \Delta X &= H \cos B \cos L, \\ \Delta Y &= H \cos B \sin L, \\ \Delta Z &= H \sin B. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} X &= X + \Delta X = (N + H) \cos B \cos L, \\ Y &= Y + \Delta Y = (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= Z + \Delta Z = (N(1 - e^2) + H) \sin B. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Обернені залежності будуть мати наступний вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{Y}{X}, \\ \operatorname{tg} B_{i+1} &= \frac{Z}{R} + \frac{b \operatorname{tg} B_i}{c + \operatorname{tg}^2 B_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \operatorname{tg} B_1 &= \frac{Z}{R}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}}, \quad c = \frac{1}{1-e^2},$$

$$H = \frac{Z}{\sin B} - (1 - e^2)N.$$

Вираз для обчислення довготи L знаходимо аналогічно (2.33), а обчислення широти B , як видно із (2.35) вимагає застосування процесу наближень. Формула для B отримана наступним чином. На основі рівнянь (2.34), після нескладних перетворень, можемо отримати

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \operatorname{tg} B \left(1 - \frac{e^2 N}{N + H} \right),$$

а також

$$(N + H) \cos B = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Тоді

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \operatorname{tg} B \left(1 - \frac{ae^2 \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \sqrt{X^2 + Y^2}} \right),$$

або

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{R} + \frac{ae^2 \operatorname{tg} B \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} R}. \quad (2.36)$$

Поділимо чисельник і знаменник у другому доданку (2.36) на $\cos B$ і в результаті перетворень отримаємо

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{R} + \frac{ae^2 \operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B - e^2 \operatorname{tg}^2 B} R},$$

а помноживши знаменник другого доданку ще на $\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}$ та після деяких перетворень,

остаточно отримаємо формулу, яка після відповідних позначень буде відповідати (2.35).

Що стосується переходу від поверхневих еліпсоїдних координат B, L до плоских x, y , то вид формул залежить від способу зображення (проекції) поверхні еліпсоїда на площині. Для проекції Гаусса-Крюгера формули зв'язку будуть приведені при розгляді відповідної теми.