ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2
ВИКОНАННЯ БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ НА ОСНОВІ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ

Мета роботи:

Ознайомиться з процедурою проведення ортогонального планування експерименту. Виконати розрахунки за допомогою програми МАТЛАБ.

Основні теоретичні відомості

1. Ортогональне планування експерименту

Структура матриці *C* відіграє важливу роль в реалізації алгоритму визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома. Структура цієї матриці залежить від вибору значень факторів в *N* дослідах. Тому бажано особливим чином вибирати значення факторів в дослідах.

Елемент C_{ii} на головній діагоналі матриці *C* (*i*-тий рядок, *i*-тий стовпець) представляється сумою квадратів значень *i*-того стовпця поєднань факторів матриці *X* в *N* дослідах

$$C_{ii} = \sum_{U=1}^{N} X_{iU}^2 , \quad i=0,1,2,\dots,m. \qquad (2.1)$$

Елементи матриці симетрично розташовані відносно головної діагоналі та рівні між собою, тобто матриця *C* – симетрична.

$$C_{ij}=C_{ji}, \qquad i,j=0,1,2, ..., m, \qquad (2.2)$$

При цьому перший індекс вказує номер стовпця матриці *X*, другий індекс – номер рядка.

Тоді

$$\tilde{N}_{ij} = \sum_{U=1}^{N} x_{iU} x_{jU} , \;\; \mathrm{C_{ji}} = \sum_{U=1}^{N} x_{jU} x_{iU} \qquad (2.3)$$

Щоб існувала матриця C^{-1}, матриця *C* розміру (1+*m*; 1+*m*) має бути невиродженою, тобто її визначник має бути відмінний від нуля. Ця умова виконується, якщо всі *m*+1 стовпці матриці *X* лінійно незалежні. Крім того, необхідно, щоб число різних поєднань факторів в матриці *X* (число дослідів *N*) повинно бути не менше, ніж *m*+1. Ця умова виходить з того, що для визначення *m*+1 коефіцієнтів полінома необхідно не менше *m*+1 рівнянь (дослідів).

Отримані коефіцієнти *B* дозволяють сформувати рівняння функції відгуку при *m*+1 членах рівняння. Якщо точність цього рівняння виявилася недостатньою, то потрібно узяти рівняння з великим числом членів і почати все заново, оскільки всі коефіцієнти *B* виявляються залежними один від одного. Це виникає при використанні пасивного експерименту. Проте, якщо цілеспрямовано використовувати активний експеримент і особливим чином побудувати матрицю поєднань факторів в дослідах *X*, тобто планувати експеримент, то коефіцієнти полінома визначаються незалежно один від одного.

Стратегія застосування планів полягає в принципі поступового планування – поступового ускладнення моделі. Починають з простої моделі, знаходяться для неї коефіцієнти, визначаються її точність. Якщо точність не задовольняє, то планування і модель поступово ускладнюються.

Задача планування полягає в тому, як побудувати матрицю *X*, щоб матриця C_{ij} легко оберталася і коефіцієнти *B* визначалися незалежно один від одного. Ці вимоги виконуються, якщо матриця C_{ij} є діагональною, тобто всі її елементи, що розташовані не на головній діагоналі, дорівнюють нулю:

$$C_{ij}=0; \quad i\neq j;\ i,j=0,1,2,...,m; \qquad (2.4)$$

або

$$\tilde{N} = \begin{vmatrix} \tilde{N}_{00} & 0 & \dots 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\mathrm{N}}_{11} & \dots 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \tilde{\mathrm{N}}_{ii} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 & \dots & \mathrm{C_{mm}} \end{vmatrix} \qquad (2.5)$$

Тоді зворотна матриця визначається як

$$\tilde{N}^{-1}=\begin{vmatrix} \frac{1}{\tilde{N}_{00}} & 0 & \ldots 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{N}_{11}} & \ldots 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & \frac{1}{\tilde{N}_{ii}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & 0 & \ldots & \frac{1}{C_{mm}} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

В цьому випадку система рівнянь розпадається на m+1 незалежних рівнянь і коефіцієнти полінома визначаються як

$$b_i=\frac{1}{C_{ii}}\sum_{u=1}^{N}\left(x_{iu}y_u\right); \qquad i=0,1,2,\ldots,m. \tag{2.7}$$

Якщо врахувати, що C_{ii} визначається як сума квадратів значень факторів

$$C_{ii}=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}^2, \tag{2.8}$$

то коефіцієнти визначаються як

$$b_i=\frac{\sum_{u=1}^{N}x_{iu}y_u}{\sum_{U=1}^{N}x_{iu}^2} \tag{2.9}$$

Вимога виконання умови $C_{ij}=C_{ji}=0$ полягає у виконанні умови

$$\sum_{u=1}^{N}x_{iu}x_{ju}=\sum_{u=1}^{N}x_{ju}x_{iu}=0, \tag{2.10}$$

де i, j – номери стовпців в матриці X; $i,j = 0,1,2 \ldots, m$; при $i \neq j$.

Кожен стовпець матриці X можна представити у вигляді вектора

$$X_i=\begin{vmatrix} x_{i1} \\ \cdot\cdot \\ x_{iu} \\ \cdot\cdot \\ x_{iN} \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{X_j}=\begin{vmatrix} x_{j1} \\ \cdot\cdot \\ x_{ju} \\ \cdot\cdot \\ x_{jN} \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Якщо, $X_i \cdot X_j=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}x_{ju}=0$, то це означає, що скалярний добуток двох векторів X_i і X_j дорівнює нулю, тобто вектори X_i і X_j – ортогональні.

Оскільки будь-який скалярний добуток двох різних стовпців в матриці X має дорівнювати нулю, то ця умова називається умовою ортогональності матриці X, а відповідне планування експерименту (визначення поєднань факторів) називається ортогональним плануванням.

Для ортогонального планування (при u=1,..,N)

$$\sum_{u=1}^{N}x_{0u}x_{iu}=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}=0. \tag{2.12}$$

Таким чином, при ортогональному плануванні сума елементів будь-якого стовпця матриці X, окрім першого, повинна дорівнювати нулю. Це правило використовується при побудові плану експерименту, тобто як потрібно змінювати значення факторів в дослідах. Це правило показує, що в ортогональному плануванні при парному числі рівнів, на яких фіксується кожен фактор, ці рівні мають бути симетрично розташовані відносно центральної точки x=0. При непарному числі рівнів повинна використовуватися і центральна точка.

2. Плани повного факторного експерименту 2^n (плани ПФЕ 2^n)

Плани ПФЕ 2^n є простими планами першого порядку. Основа 2 означає, що прийнято два рівні варіювання, на яких фіксуються фактори, n – число чинників.

Для плану ПФЕ 2^2 число факторів рівне двом (n=2) і число рівнів фіксації факторів також 2. Значення кодованих факторів вибираються у вигляді +1 і –1. Повне число можливих поєднань значень n факторів (число дослідів, а значить і число рядків плану) $N=2^2=4$. Складається план, в якому число стовпців чинників і їх поєднань дорівнює числу доданків у рівнянні. Так для рівняння

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2, \qquad m + 1 = 6 \cdot \quad (2.13)$$

План ПФЕ 2^2 для цього рівняння представляється в наступному вигляді (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

i	0	1	2	3	4	5	
u	x_0	x_1	x_2	$x_3=x_1x_2$	$x_4=x_1^2$	$x_5=x_2^2$	y
1	1	-1	-1	1	1	1	y_1
2	1	1	-1	-1	1	1	y_2
3	1	-1	1	-1	1	1	y_3
4	1	1	1	1	1	1	y_4
$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}$	4	0	0	0	4	4	

В першому стовпці (i=0) у всі чотири комірки заносяться +1. В другому стовпці (i=1) заносяться одиниці із змінними знаками (починаємо з -1). В цьому випадку сума елементу стовпця дорівнює нулю. Третій стовпець заповнюємо одиницями із знаками, що чередуються через 2 елементи. Сума елементів також дорівнює нулю.

Елементи стовпців, відповідних добуткам факторів, отримують шляхом перемножування елементів попередніх стовпців. Таке правило дозволяє гарантувати, що ми не пропустили жодного можливого поєднання факторів в дослідах і в той же час не буде повторень однакових факторів. Останні два стовпці факторів, відповідні їх квадратам, містять тільки +1. Стовпці, обведені потовщеною рамкою, утворюють план експерименту. Стовпець x_1x_2, не обведений потовщеною рамкою, при проведенні дослідів носить допоміжний характер.

Особливості плану ПФЕ 2^n:

1. Різних стовпців в табл. 2.1 вийшло лише чотири. Стовпці, відповідні квадратам факторів, невідмітні від стовпця x_0, – це загальний результат для плану ПФЕ 2^n. Це не дозволяє визначити окремо коефіцієнти при квадратах факторів. Тому плани ПФЕ 2^n називають планами першого порядку. Для визначення коефіцієнтів при квадратах факторів використовують плани другого порядку. Надалі в планах ПФЕ 2^n стовпці квадратів факторів зображатися не будуть.

2. Число різних стовпців дорівнює числу різних поєднань факторів, тобто числу рядків плану – числу дослідів N. Це теж загальний результат для цих планів, тобто за допомогою планів ПФЕ 2^n можна визначити всі коефіцієнти лінійного полінома з всіма можливими поєднаннями факторів, включаючи коефіцієнти $b_{12\ldots n}$, що відображають максимальну взаємодію факторів виду $x_1x_2\ldots x_n$.

3. У плані ПФЕ 2^n сума квадратів елементів будь-якого стовпця

$$\sum x_{iu}^2 = 2^n = N \cdot$$

Звідси на основі (5.7) для планів ПФЕ 2^n

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u}{N} \cdot \qquad (2.14)$$

Для плану ПФЕ 2^3 число факторів n = 3. Виконується $N = 2^3 = 8$ дослідів. Рівняння може містити до восьми членів

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 \,. \quad (2.15)$$

Таким чином формується план з восьми рядків і восьми стовпців. У четвертому стовпці (i=3) записуються одиниці із знаками, що змінюються через чотири елементи. План складається подібно

плану
ПФЕ 2^2.

3. Плани другого порядку

Плани другого порядку дозволяють сформувати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома, який містить більше число доданків, ніж неповний квадратичний поліном, сформований по планах першого порядку, і тому вимагають більшого числа виконуваних дослідів. Повний квадратичний поліном при n =2 містить 6 доданків

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2, \qquad (2.16)$$

при n = 3 містить 11 доданків

$$\begin{aligned} Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + \\ + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Відомо, що для отримання квадратичної залежності кожен фактор повинен фіксуватися як мінімум на трьох рівнях.

Для планів другого порядку область планування може:

- Бути природною, тобто включати область планування для планів першого порядку і додаткові точки (такі плани називаються композиційними). Додаткові точки можуть виходити за область плану першого порядку – одиничного гіперкуба. В цьому випадку досліди в них реалізуються при встановленні факторів за межами варіювання. Це треба враховувати при визначенні області сумісності факторів.
- Не виходити за межі одиничного гіперкуба.
- Не виходити за межі одиничної гіперкулі.

У другому і третьому випадках використовують спеціальні прийоми виконання приведених співвідношень в плані. План з однією областю планування можна перебудувати в план з іншою областю планування.

Якщо вже був раніше сформований план ПФЕ, але точність його функції відгуку не задовольняє, то ми можемо добудувати цей план до плану другого порядку і сформувати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома без втрати інформації про раніше зроблені досліди.

4. Ортогональний центрально-композиційний план другого порядку

Як було визначено, ортогональним планом називається такий план, в якому матриця планування X будується так, що матриця $C=X_tX$ є діагональною. Використаємо цей підхід і при побудові планів другого порядку. План називається центральним, якщо всі точки розташовані симетрично щодо центру плану. ОЦКП – ортогональний центральний симетричний композиційний план.

У ОЦКП входять: ядро – план ПФЕ з $N_0 = 2^n$ точками плану, n_0 (одна для цього плану) центральна точка плану (x_i=0, i=1,2,3, … n) і по дві точки для кожного фактору

$$x_i = \pm\lambda, \quad x_j = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \;\; j = 1,\ldots,n, \;\; i \neq j, \qquad (2.18)$$

де λ– плече цих точок.

Загальна кількість точок в плані ОЦКП

$$N=2^n + 2n + n_0, \qquad (2.19)$$

де для ОЦКП n_0=1.

При $n > 2$ в ОЦКП менша кількість точок, ніж в плані ПФЕ 3^n. Число точок в плані для ОЦКП і ПФЕ 3^2 при n від 2 до 6 дано в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

n	2	3	4	5	6
ОЦКП	9	15	25	43	77
ПФЭ 3^n	9	27	81	243	729

Для ортогонального плану необхідно, щоб виконувалося співвідношення (2.12). Це означає необхідність виконання вимоги, щоб сума елементів будь-якого стовпця (окрім j=0), включаючи стовпці, відповідні квадратам чинника, мала дорівнювати нулю. Це можливо, якщо елементистовпців, відповідних квадратам факторів, перетворені, інакше сума квадратів факторів не може дорівнювати нулю.

Перетворення елементів цих стовпців здійснюється у вигляді

$$x'_{ju} = x_{ju}^2 - \grave{a}\,, \tag{2.20}$$

де a – величина, залежна від числа факторів.

Сума елементів стовпця, відповідного квадратам факторів

$$\sum_{u=1}^{N} x'_{ju} = \sum_{u=1}^{N} (x_{ju}^2 - a) = \sum_{u=1}^{N} x_{ju}^2 - N \cdot a = 0\,. \tag{2.21}$$

Звідки

$$\grave{a} = \frac{\sum\limits_{u=1}^{N} x_{ju}^2}{N}\,. \tag{2.22}$$

У ОЦКП кожен фактор фіксується в загальному випадку на п'яти рівнях (-λ -1, 0, 1, +λ).

Для визначення невідомих “a” і “λ” потрібно сформувати і вирішити систему з двох рівнянь. Одне з них для “a” ми записали раннє. Інше рівняння отримаємо з умови ортогональності для стовпців x'_4 і x'_5:

$$\sum_{u=1}^{N} x'_{4u} \cdot x'_{5u} = N_0(1-a)^2 - 4a(\lambda^2 - a) + a^2(2n-4) + n_0 a^2 = 0\,. \tag{2.23}$$

Після простих перетворень з урахуванням того, що $N=N_0+2n+n_0$ – загальне число дослідів в плані, отримуємо співвідношення

$$\frac{N_0}{N} - 2a \cdot \frac{N_0 + 2\lambda^2}{N} + a^2 = 0\,. \tag{2.24}$$

Співвідношення для a при j=1, 2 або 3 може бути записано як

$$\grave{a} = \frac{\sum\limits_{u=1}^{N} x_{ju}^2}{N} = \frac{N_0 + 2 \cdot \lambda^2}{N}\,. \tag{2.25}$$

Підставивши його в рівняння (2.24), отримуємо

$$\frac{N_0}{N} - 2a^2 + a^2 = 0\,, \tag{2.26}$$

звідки константа перетворення a

$$a = \sqrt{\frac{N_0}{N}} = \sqrt{\frac{2^n}{2^n + 2n + n_0}}\,. \tag{2.27}$$

Тоді

$$\frac{N_0 + 2a^2}{N} = a = \sqrt{\frac{N_0}{N}} \tag{2.28}$$

і плече точок

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{N \cdot N_0} - N_0\right)}\,. \tag{2.29}$$

Значення параметрів ОЦКП при числі факторів n приведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

n	2	3	4	5	6	7	8
λ	1	1,215	1,414	1,596	1,761	1,909	2,045
a	0,667	0,73	0,8	0,86	0,91	0,946	0,968
N	9	15	25	43	77	143	273

5. Перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії і адекватності рівняння експерименту

Для оцінки значущості коефіцієнтів рівняння регресії і перевірки адекватності рівняння експерименту досить провести серію паралельних дослідів, виконаних при якомусь одному поєднанні факторів.

Хай в центрі плану (у точках (X_{10},X_{20}) і (X_{10},X_{20},X_{30}) для ПФЕ 2^2 і 2^3 відповідно) проведена серія з m дослідів. Тоді вибіркова дисперсія відтворюваності, що характеризує вплив випадкових факторів, дорівнює:

$$s^2_{воспр} = \frac{\sum_{i-1}^{m}(y_{i0} - \bar{y}_0)^2}{m-1}, \tag{2.30}$$

де y_{u0} – результат u-го досліду (i = 1,2, m), $\bar{y}_0$ – середнє значення серії дослідів. У математичній статистиці доводиться, що для спланованих експериментів всі коефіцієнти рівнянь регресії визначаються з однаковою випадковою похибкою, рівною

$$s(b_j) = \frac{s_{âîñïð}}{\sqrt{N}}. \tag{2.31}$$

Значущість коефіцієнтів перевіряється по критерію Стьюдента. В умовах нульової гіпотези H_0 відношення абсолютної величини коефіцієнта до його помилки має розподіл Стьюдента. Для кожного коефіцієнта визначається t-відношення:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} = \frac{|b_j|}{s_{воспр}}\sqrt{N}, \tag{2.32}$$

яке порівнюється з табличним значенням критерію Стьюдента $t_\gamma(k)$ (додаток 1) для вибраного рівня значущості q=1-γ (зазвичай q береться 0,05) і числа степенів свободи k= m-1. Якщо для даного коефіцієнта $tj > t_\gamma(k)$, то він значно відрізняється від нуля. Вибіркові коефіцієнти, для яких $t_j \le t_\gamma(k)$, незначущі, і їх слід виключити з рівняння регресії.

Допустимо, при перевірці значущості коефіцієнтів рівняння (2.15) виявилось, що всі коефіцієнти, що характеризують ефекти взаємодії факторів, незначущі. Після їх виключення отримуємо рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \tag{2.33}$$

при цьому значення b_o, b_1, b_2 і b_3 не потрібно обчислювати наново через те, що коефіцієнти рівняння некорельовані між собою. На відміну від класичного регресійного аналізу, виключення незначущого коефіцієнта не позначається на величинах решти коефіцієнтів рівняння регресії, а самі вибіркові коефіцієнти, отримані при реалізації ПФЕ, є незмішаними оцінками теоретичних коефіцієнтів.

Адекватність рівняння перевіряється по критерію Фішера

$$F = (s^2_{ад} / s^2_{воспр}). \tag{2.34}$$

Дисперсія адекватності (залишкова дисперсія) дорівнює:

$$s^2_{àä} = s^2_{îñò} = \frac{1}{N-l}\sum_{u=1}^{N}(y_u - \hat{y}_u)^2, \tag{2.35}$$

де l — число значущих коефіцієнтів (для даного випадку l = 4). Рівняння адекватно описує експеримент, якщо

$$F \le F_{1-q}(k_1,k_2), \tag{2.36}$$

де F_{1-q} (k_1,k_2) — табличне значення критерію Фішера (додаток 3) для q=0,05 і числа степенів свободи k_1=$k_{ад}$=N-l і k_2=$k_{воспр}$ =m-1.

Розглянемо також схему проведення регресійного аналізу для спланованого експерименту у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторювався m разів. Як приклад, візьмемо ПФЕ 2^3 і при отриманні рівняння регресії обмежимося лінійним наближенням (рівняння (2.33)). Матриця планування такого експерименту представлена в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

№	x_0	x_1	x_2	x_3	y	$\overline{y_i}$	s_i^2
1	+ 1	- 1	- 1	- 1	$y_{11}, y_{12}, ..., y_{1m}$	$\overline{y_1}$	s_1^2
2	+ 1	+ 1	- 1	- 1	$y_{21}, y_{22}, ..., y_{2m}$	$\overline{y_2}$	s_2^2
3	+ 1	- 1	+ 1	- 1	$y_{31}, y_{32}, ..., y_{3m}$	$\overline{y_3}$	s_3^2
4	+ 1	+ 1	+ 1	- 1	$y_{41}, y_{42}, ..., y_{4m}$	$\overline{y_4}$	s_4^2
5	+ 1	- 1	- 1	+ 1	$y_{51}, y_{52}, ..., y_{5m}$	$\overline{y_5}$	s_5^2
6	+ 1	+ 1	- 1	+ 1	$y_{61}, y_{62}, ..., y_{6m}$	$\overline{y_6}$	s_6^2
7	+ 1	- 1	+ 1	+ 1	$y_{71}, y_{72}, ..., y_{7m}$	$\overline{y_7}$	s_7^2
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	$y_{81}, y_{82}, ..., y_{8m}$	$\overline{y_8}$	s_8^2

Для кожного поєднання рівнів факторів визначається середнє значення вимірюваної величини і вибіркова дисперсія:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ui}\,, \qquad (2.37)$$

$$s_u^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_{ui} - \bar{y}_u)^2\,. \qquad (2.38)$$

Однорідність дисперсій перевіряється по критерію Кохрена. Відношення максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^{N} s_u^2} \qquad (2.39)$$

порівнюється з табличним значенням $G_{1-q}(k_1, k_2)$ (додаток 4) для q = 0,05 і числа степенів свободи $k_1 = m$-1 і $k_2 = N$. Якщо $G \le G_{1-q}(k_1,k_2)$, то вибіркові дисперсії однорідні. Тоді найкращою оцінкою дисперсії відтворюваності буде середньозважена дисперсія

$$s_{воспр}^2 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} s_u^2 \qquad (2.40)$$

з числом степенів свободи $k_{воспр} = N(m$-1). Коефіцієнти рівняння регресії визначаються по формулі

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{ju}\bar{y}_u \qquad (2.41)$$

Оскільки дисперсія середнього в m разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тобто

$$s^2(\bar{y}) = s_{воспр}^2 / m, \qquad (2.42)$$

то вибіркові середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розрахуються таким чином:

$$s(b_j) = \frac{s_{воспр}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}}\sqrt{\sum_{u=1}^{N} s_u^2}\,. \qquad (2.43)$$

Значимість коефіцієнтів перевіряється по критерію Стьюдента: якщо

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} > t_\gamma(k), \qquad (2.44)$$

де $t_\gamma(k)$ — табличне значення критерію Стьюдента (додаток 1) для $q = 0{,}05$ і числа степенів свободи $k=N(m - 1)$, то коефіцієнт значно відрізняється від нуля.

Адекватність рівняння регресії експерименту перевіряється по критерію Фішера. Дисперсія адекватності рівна

$$s_{àä}^2 = \frac{m\sum_{u=1}^{N}(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2}{N - l}, \qquad (2.45)$$

де l — число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії.

Рівняння адекватне експерименту, якщо

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_{воспр}^2} \le F_{1-q}(k_{ад}, k_{воспр}), \qquad (2.46)$$

де $F_{1-q}(k_{ад},k_{воспр})$ — табличне значення критерію Фішера для $q = 0{,}05$ і числа степенів свободи $k_{ад} = N - 1$ і $k_{воспр} = N(m - 1)$. Інакше, для опису результатів експерименту необхідно збільшити порядок апроксимуючого полінома.

Наведемо приклад знаходження коефіцієнтів функції відгуку за допомогою ортогонального планування експерименту.

На основі дослідних даних складемо план ПФЕ 2^2 і перевіримо значущість коефіцієнтів рівняння регресії $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ і адекватність рівняння, у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторюється m разів ($m = 6$). Заповнимо табл. 2.5.

Таблиця 2.5

U	x_0	x_1	x_2	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}
1	1	-1	-1	5.32	5.42	5.39	5.53	5.38	5.35
2	1	+1	-1	3.03	3.07	3.11	3.05	3.04	3.06
3	1	-1	+1	5.17	5.25	5.11	5.16	5.13	5.12
4	1	+1	+1	5.81	5.86	5.78	5.75	5.82	5.77

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ui}, \quad s_u^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_{ui} - \bar{y}_u)^2 \qquad (2.47)$$

Матрицю планування ПФЕ 2^2 в умовах лінійної моделі з однаковим числом паралельних дослідів при кожному поєднанні рівнів факторів представимо у вигляді табл. 8.6.

Таблиця 2.6

U	x_0	x_1	x_2	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}	$\bar{y}_u$	$S_u^2 \times 10^{-2}$	y'	$\bar{y} - y'$
1	1	-1	-1	5.32	5.42	5.39	5.53	5.38	5.35	5.40	2.67	4.66	+0.74
2	1	+1	-1	3.03	3.07	3.11	3.05	3.04	3.06	3.06	0.4	3.80	-0.74
3	1	-1	+1	5.17	5.25	5.11	5.16	5.13	5.12	5.16	1.32	5.91	-0.75
4	1	+1	+1	5.81	5.86	5.78	5.75	5.82	5.77	5.80	0.79	5.06	+0.74

Однорідність дисперсій перевіряється по критерію Кохрена. Відношення максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^{N} s_u^2} = \frac{2{,}67 \cdot 10^{-2}}{5{,}18 \cdot 10^{-2}} = 0{,}515 \qquad (2.48)$$

порівнюється з табличним значенням $G_1\text{-}q(k_1,k_2)$ (додаток 4) для $q = 0{,}05$ і при числі степенів свободи $k_1 = m-1 = 5$ і $k_2=N=4$: $G_1\text{-}q(k_1,k_2) = 0{,}5441$.

Оскільки $G \le G_{1-q}(k_1,k_2)$, то вибіркові дисперсії однорідні. Тоді найкращою оцінкою дисперсії відтворюваності буде середньозважена дисперсія

$$s^2_{воспр} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} s_u^2 = 0{,}67 \cdot 10^{-2} \qquad (2.49)$$

з числом степенів свободи $k_{воспр} = N(m\text{-}1) = 20$.

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються по формулі

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u \quad . \qquad (2.50)$$

Розраховуємо коефіцієнти рівняння:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{0u}\bar{y}_u = \frac{5{,}40+3{,}06+5{,}16+5{,}80}{4} = 4{,}86; \qquad (2.51)$$

$$b_1 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{1u}\bar{y}_u = \frac{-5{,}40+3{,}06-5{,}16+5{,}80}{4} = -0{,}43; \qquad (2.52)$$

$$b_2 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} x_{2u}\bar{y}_u = \frac{-5{,}40-3{,}06+5{,}16+5{,}80}{4} = 0{,}63; \qquad (2.53)$$

Рівняння регресії має вигляд:

$$y' = 4{,}86 - 0{,}43x_1 + 0{,}63x_2. \qquad (2.54)$$

Результати розрахунку по ньому приведені у відповідному стовпці плану. Розбіжності між $\bar{y}$ і y' також приведені в табл. 2.6.

Оскільки дисперсія середнього в m разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тобто

$$s^2(\bar{y}) = s^2_{воспр}/m, \qquad (2.55)$$

то вибіркові середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розраховуються за формулою:

$$s(b_j) = \frac{s_{воспр}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}}\sqrt{\sum_{u=1}^{N} s_u^2} = \frac{8{,}185\cdot 10^{-2}}{4{,}899} = 1{,}67\cdot 10^{-2} \quad . \qquad (2.56)$$

Значимість коефіцієнтів перевіряється за критерієм Стьюдента:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} > t_\gamma(k), \qquad (2.57)$$

де $t_\gamma(k)$ — табличне значення критерію Стьюдента (додаток 1) для q = 0,05 і числа степенів свободи $k = N(m - 1)$.

Для k=20 і q = 0,05 величина $t_\gamma(k)$ = 2,086. Величини t_j дорівнюють: $t_0 = 2{,}9\cdot 10^2$, $t_1 = 1{,}43\cdot 10^2$, $t_2 = 1{,}08\cdot 10^2$. Вони більше величини $t_\gamma(k)$ і всі коефіцієнти рівняння регресії значущо відрізняються від нуля.

Адекватність рівняння регресії експерименту перевіряється по критерію Фішера. Дисперсія адекватності рівна

$$s^2_{ад} = \frac{m\sum_{u=1}^{N}(\bar{y}_u - y'_u)^2}{N-l} = \frac{6\cdot 2{,}21}{1} = 13{,}26 \; , \qquad (2.58)$$

де l — число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії.

Для перевірки адекватності рівняння знаходимо

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_{воспр}^2} = \frac{13{,}26}{0{,}67 \cdot 10^{-2}} = 19{,}79 \cdot 10^2 . \qquad (2.59)$$

Рівняння адекватне експерименту, якщо

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_{воспр}^2} \le F_{1-q}(k_{ад}, k_{воспр}), \qquad (2.60)$$

де $F_{1-q}(k_{ад},k_{воспр})$ — табличне значення критерію Фішера для q = 0,05 і числа степенів свободи $k_{ад}$ = N - 1 і $k_{воспр}$ = $N(m$ - 1). У прикладі $k_{ад}$ = 1, $k_{воспр}$ = 20 і $F_{1-q}(k_{ад},k_{воспр})$ = 248. В даному випадку $F>F_{1-q}(k_{ад},k_{воспр})$ і для опису результатів експерименту необхідно збільшити порядок апроксимуючого полінома. Тому переходимо до складання плану другого порядку на основі ортогонального центрального симетричного композиційного плану (ОЦКП) і перевіримо значущість коефіцієнтів рівняння регресії

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 \qquad (2.61)$$

і адекватність рівняння, у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторюється m разів (m = 6), за даними табл. 2.7. Тут додані до раніше проведених ще досліди на 5 рівнях x_1 і x_2.

Таблиця 2.7

U	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$x_3' = x_1^2 - a$	$x_4' = x_2^2 - a$	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}
1	1	-1	-1	+1	1/3	1/3	5.32	5.42	5.39	5.53	5.38	5.35
2	1	+1	-1	-1	1/3	1/3	3.03	3.07	3.11	3.05	3.04	3.06
3	1	-1	+1	-1	1/3	1/3	5.17	5.25	5.11	5.16	5.13	5.12
4	1	+1	+1	+1	1/3	1/3	5.81	5.86	5.78	5.75	5.82	5.77
5	1	-1	0	0	1/3	-2/3	5.00	5,12	5,07	5,09	4,99	5,05
6	1	+1	0	0	1/3	-2/3	4,13	4,19	4,23	4,17	4,25	4,21
7	1	0	-1	0	-2/3	1/3	1,21	1,24	1,27	1,19	1,17	1,21
8	1	0	+1	0	-2/3	1/3	2,42	2,39	2,45	2,41	2,38	2,43
9	1	0	0	0	-2/3	-2/3	1.59	1,62	1,73	1,55	1,68	1,58

Плани другого порядку дозволяють сформувати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома, який містить більше число доданків, ніж неповний квадратичний поліном, сформований по планах першого порядку, і тому вимагають більшого числа виконуваних дослідів. Повний квадратичний поліном при n =2 містить 6 доданків

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 . \qquad (2.62)$$

Для отримання квадратичної залежності кожен фактор повинен фіксуватися як мінімум на трьох рівнях.

Якщо вже був раніше сформований план ПФЕ 2^2, але точність його функції відгуку не задовольняє, то ми можемо добудувати цей план до плану другого порядку і сформувати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного полінома, без втрати інформації про раніше зроблені досліди.

У ОЦКП входять: ядро – план ПФЕ з N_0 = 2^n точками плану, n_0 (одна для цього плану) центральна точка плану (x_i=0, i=1,2,3,…,n) і по дві точки $\pm\lambda$ для кожного фактору.

При цьому в кожній плоскості, що містить координатну вісь y і вісь i-того фактора (що проходить через центр плану), виявляються три значення фактора x_i ($-\lambda$, 0, λ) і три відповідні значення y.

Загальна кількість точок в плані ОЦКП (5.19) при n = 2 дорівнює 9.

У ОЦКП кожен фактор фіксується в загальному випадку на п'яти рівнях ($-\lambda$, -1, 0, 1, $+\lambda$).

Константу перетворення a знаходимо за формулою

$$a = \sqrt{\frac{N_0}{N}} = \sqrt{\frac{2^n}{2^n + 2n + n_0}} . \qquad (2.63)$$

Плече точок дорівнює:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{N \cdot N_0} - N_0\right)} . \qquad (2.64)$$

Для ОЦКП при числі факторів $n = 2$ маємо такі параметри плану: $N_0=4$, $N=9$, $\lambda=1$, $a = 2/3$, $1-a=1/3$, $-a=-2/3$, $\lambda^2 - a = 1/3$.

Для кожного поєднання факторів визначаємо середнє значення вимірюваної величини і вибіркову дисперсію:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ui}, \tag{2.65}$$

$$s_u^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_{ui} - \bar{y}_u)^2. \tag{2.66}$$

План ОКЦП для $n = 2$ з однаковим числом паралельних дослідів при кожному поєднанні рівнів факторів представимо у вигляді табл. 2.8.

Таблиця 2.8

U	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	$x_3' = x_1^2 - a$	$x_4' = x_2^2 - a$	$\bar{y}_u$	$s_u^2 \times 10^{-2}$	y''	$\bar{y} - y''$
1	1	-1	-1	+1	1/3	1/3	5,40	2,67	5,40	+0.00
2	1	+1	-1	-1	1/3	1/3	3,06	0,4	3,04	+0,02
3	1	-1	+1	-1	1/3	1/3	5,16	1,32	5,14	+0,02
4	1	+1	+1	+1	1/3	1/3	5,80	0,79	5,78	+0,02
5	1	-1	0	0	1/3	-2/3	5,05	1,30	5,05	+0,00
6	1	+1	0	0	1/3	-2/3	4,20	0,94	4,19	+0,01
7	1	0	-1	0	-2/3	1/3	1,22	0,65	1,19	+0,03
8	1	0	+1	0	-2/3	1/3	2,41	0,34	2,43	-0,02
9	1	0	0	0	-2/3	-2/3	1,63	2,31	1,59	+0,04

Однорідність дисперсій перевіряється по критерію Кохрена (додаток 4). Відношення максимальної дисперсії, рівної $2{,}67 \cdot 10^{-2}$, до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{u=1}^{N} s_u^2} = \frac{2{,}67\cdot 10^{-2}}{10{,}72\cdot 10^{-2}} = 0{,}249 \tag{2.67}$$

порівнюється з табличним значенням $G_{1-q}(k_1, k_2)$ (додаток 4), для $q=0{,}05$ і числа степенів свободи $k_1 = m-1=5$ и $k_2=N=9$. $G_{1-q}(k_1, k_2) = 0{,}425$

Оскільки $G \le G_{1-q}(k_1,k_2)$, то вибіркові дисперсії однорідні. Тоді найкращою оцінкою дисперсії відтворюваності буде середньо зважена дисперсія

$$s_{воспр}^2 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} s_u^2 = 1{,}19\cdot 10^{-2} \tag{2.68}$$

з числом степенів свободи $k_{воспр} = N(m-1) = 45$.

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються по формулі

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{iu}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2} \tag{2.69}$$

Розраховуємо коефіцієнти рівняння:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{0u}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x_{0u}^2} = \frac{5{,}40+3{,}06+5{,}16+5{,}80+5{,}05+4{,}20+1{,}22+2{,}41+1{,}63}{9} = 3{,}77; \tag{2.70}$$

$$b_1 = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{1u}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x_{1u}^2} = \frac{-5{,}40+3{,}06-5{,}16+5{,}80-5{,}05+4{,}20}{6} = -0{,}43; \tag{2.71}$$

$$b_2 = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{2u}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x_{2u}^2} = \frac{-5{,}40-3{,}06+5{,}16+5{,}80-1{,}22+2{,}41}{6} = 0{,}62; \tag{2.72}$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{12u}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x_{12u}^2} = \frac{5{,}40-3{,}06-5{,}16+5{,}80}{4} = 0{,}75; \tag{2.73}$$

$$b_3 = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{3u}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x_{3u}^2} =$$

$$\frac{(5{,}40+3{,}06+5{,}16+5{,}80+5{,}05+4{,}20)-2(1{,}22+2{,}41+1{,}63)}{3[6(1/9)+3(4/9)]} = 3{,}03; \tag{2.74}$$

$$b_4 = \frac{\sum_{u=1}^{N} x_{4u}\bar{y}_u}{\sum_{u=1}^{N} x_{4u}^2} =$$

$$\frac{(5{,}40+3{,}06+5{,}16+5{,}80+1{,}22+2{,}41)-2(5{,}05+4{,}20+1{,}63)}{3[6(1/9)+3(4/9)]} = 0{,}22; \tag{2.75}$$

Рівняння регресії має вигляд:

$$y'' = 3{,}77 - 0{,}43x_1 + 0{,}62x_2 + 0{,}75x_1x_2 + 3{,}03(x_1^2 - 0{,}67) + \tag{2.76}$$
$$+ 0{,}22(x_2^2 - 0{,}67) = 1{,}59 - 0{,}43x_1 + 0{,}62x_2 + 0{,}75x_1x_2 + 3{,}03x_1^2 + 0{,}22x_2^2.$$

Результати розрахунку за цім рівнянням наведено у відповідному стовпці плану. Розбіжності між $\bar{y}$ и y'' також наведено в табл. 2.8.

Оскільки дисперсія середнього в m разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тобто

$$s^2(\bar{y}) = s^2_{воспр}/m, \tag{2.77}$$

то вибіркові середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розраховуються таким чином:

$$s(b_j) = \frac{s_{воспр}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}}\sqrt{\sum_{u=1}^{N} s_u^2} = \frac{0{,}109}{7{,}348} = 1{,}48\cdot 10^{-2} \tag{2.78}$$

Значущість коефіцієнтів перевіряється по критерію Стьюдента:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} > t_\gamma(k), \tag{2.79}$$

де $t_\gamma(k)$ — табличне значення критерію Стьюдента (додаток 1) для q = 0,05 і числа степенів свободи $N(m - 1)$.

Для k=20 і q = 0,05 величина $t_\gamma(k)$ = 2,086. Величини t_j дорівнюють: t_0 = 107,4, t_1 = 29,1, t_2 = 41,9, t_{12} = 50,7, t_{11} = 204,7, t_{22} = 14,9. Вони більше величини $t_\gamma(k)$ і всі коефіцієнти рівняння регресії значущо відрізняються від нуля.

Адекватність рівняння регресії експерименту перевіряється за критерієм Фішера. Дисперсія адекватності дорівнює:

$$s_{a\partial}^{2}=\frac{m\sum_{u=1}^{N}(\bar{y}_{u}-y_{u}^{''})^{2}}{N-l}=\frac{6\cdot 0{,}38\cdot 10^{-2}}{3}=0{,}76\cdot 10^{-2}, \qquad (2.80)$$

де l — число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії (для нашого прикладу дорівнює 6).

Для перевірки адекватності рівняння знаходимо

$$F=\frac{s_{a\partial}^{2}}{s_{вocnp}^{2}}=\frac{0{,}76\cdot 10^{-2}}{1{,}19\cdot 10^{-2}}=0{,}64\,. \qquad (2.81)$$

Рівняння адекватне експерименту, якщо

$$F=\frac{s_{a\partial}^{2}}{s_{вocnp}^{2}}\le F_{1-q}(k_{a\partial},k_{вocnp}), \qquad (2.82)$$

де $F_{1-q}(k_{a\partial},k_{вocnp})$ — табличне значення критерію Фішера (додаток 3) для q = 0,05 і числа степенів свободи $k_{a\partial} = N - 1$ і $k_{вocnp} = N(m - 1)$. У даному прикладі $k_{a\partial} = 3$, $k_{вocnp} = 20$ і $F_{1-q}(k_{a\partial},k_{вocnp}) = 8{,}6$. В даному випадку $F<F_{1-q}(k_{a\partial},k_{вocnp})$ і рівняння регресії адекватне експерименту.

Порядок виконання роботи

У відповідності з варіантом завдання за дослідними даними $U_1,\ldots,U_4$ скласти план ПФЕ 2^2 і перевірити значущість коефіцієнтів рівняння регресії $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ і адекватність рівняння, у разі, коли кожен дослід в матриці планування повторюється 6 разів . При невиконанні умови адекватності скласти план другого порядку на основі ОКЦП за даними $U_1,\ldots,U_9$ і перевірити значущість коефіцієнтів рівняння регресії $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$ і адекватність цього рівняння.

Таблиця 2.9

N в	U	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}	N в	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}
	1	3.00	2.90	2.97	2.91	2.98	2.89		2.87	2.81	2.80	2.85	2.86	2.82
	2	3.96	3.90	3.99	3.88	3.97	3.91		4.60	4.61	4.67	4.65	4.62	4.66
	3	1.90	1.97	1.91	1.98	1.92	1.96		2.27	2.25	2.23	2.21	2.20	2.24
	4	8.99	8,88	8.97	8.90	8.98	8.91		9.58	9.60	9.65	9.64	9.61	9.68
1	5	1.60	1.65	1.61	1.67	1.66	1.62	14	1.96	1.94	1.91	1.90	1.92	1.95
	6	5,68	5,66	5,60	5,59	5,65	5,61		6,47	6,50	6,52	6,55	6,59	6,57
	7	2,90	2,91	2,96	2,94	2,92	2,95		3,38	3,32	3,36	3,30	3,35	3,31
	8	4,97	4,95	4,93	4,90	4,91	4,96		5,50	5,49	5,57	5,56	5,51	5,55
	9	3.10	3.12	3.16	3.14	3.13	3.11		3.86	3.87	3.83	3.80	3.81	3.85
	1	1.63	1.64	1.59	1.58	1.64	1.57		0.61	0.58	0.62	0.63	0.60	0.59
	2	3.77	3.82	3.80	3.76	3.78	3.84		2.77	2.82	2.78	2.76	2.81	2.83
	3	1.42	1.43	1.40	1.37	1.39	1.41		0.82	0.81	0.78	0.84	0.80	0.77
	4	8.34	8.37	8.41	8.45	8.42	8.38		6.95	7.01	7.03	6.98	7.01	7.04
2	5	1.03	1.01	1.00	098	0.97	0.99	15	0.22	0.21	0.23	0.18	0.20	0.19
	6	5.55	5.58	5.61	5.64	5.62	5.57		4.36	4.38	4.41	4.43	4.45	4.39
	7	2.33	2.31	2.28	2.27	2.32	2.29		1.31	1.33	1.30	1.27	1.29	1.32
	8	4.44	4.48	4.49	4.51	4.55	4.53		3.46	3.48	3.51	3.53	3.47	3.52
	9	2.93	2.94	2.90	2.87	2.88	2.89		1.94	1.92	1.87	1.90	1.88	1.91
	1	2.02	2.04	2.00	2.97	2.98	2.01		1.50	1.51	1.55	1.58	1.52	1.57
	2	3.77	3.75	3.79	3.83	3.85	3.87		4.18	4.15	4.14	4.11	4.13	4.12
	3	2.04	2.02	1.97	1.96	2.03	2.01		2.10	2.11	2.14	2.17	2.15	2.12
	4	9.37	9.33	9.35	9.41	9.44	9.42		8.38	8.40	8.34	8.31	8.29	8.30
3	5	1.34	1.32	1.31	1.27	1.29	1.28	16	1.20	1.21	1.24	1.26	1.21	1.25
	6	5.88	5.91	5.94	5.92	5.89	5.87		5.66	5.68	5.64	5.60	5.58	5.61
	7	2.41	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35		2.40	2.41	2.44	2.46	2.42	2.43
	8	5.18	5.20	5.23	5.25	5.21	5.17		4.80	4.78	4.81	4.84	4.85	4.87
	9	3.13	3.11	3.08	3.07	3.10	3.12		3.07	3.05	3.04	3.01	3.00	3.02

Продовження табл. 2.9

N в	U	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}	N в	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}
	1	0.14	0.16	0.12	0.10	0.11	0.15		0.64	0.62	0.65	0.68	0.67	0.69
	2	3.90	3.87	3.91	3.94	3.96	3.95		3.84	3.82	3.81	3.86	3.88	3.87
	3	1.35	1.37	1.32	1.34	1.30	1.31		1.28	1.29	1.27	1.25	1.23	1.24
	4	8.68	8.66	8.70	8.74	8.77	8.75		9.22	9.18	9.21	9.27	9.30	9.29
4	5	0.10	0.11	0.13	0.12	0.15	0.14	17	0.05	0.04	0.06	0.08	0.03	0.07
	6	5.79	5.75	5.77	5.72	5.69	5.70		5.68	5.70	5.69	5.64	5.61	5.63
	7	1.60	1.62	1.65	1.61	1.66	1.64		1.42	1.44	1.41	1.47	1.49	1.48
	8	4.65	4.67	4.64	4.61	4.59	4.60		4.48	4.50	4.47	4.43	4.45	4.40
	9	2.51	2.50	2.55	2.49	2.52	2.54		2.03	2.05	2.02	2.07	2.09	2.08
	1	1.12	1.08	1.14	1.15	1.09	1.07		1.74	1.76	1.71	1.68	1.65	1.67
	2	3.07	3.05	3.08	3.12	3.16	3.14		1.48	1.50	1.53	1.47	1.49	1.52
	3	2.73	2.75	2.71	2.68	2.65	2.67		3.14	3.16	3.12	3.08	3.09	3.06
	4	9.15	9.17	9.18	9.12	9.05	9.03		7.67	7.64	7.69	7.72	7.75	7.73
5	5	1.37	1.42	1.35	1.39	1.44	1.46	18	1.93	1.95	1.91	1.87	1.89	1.85
	6	5.64	5.66	5.62	5.58	5.55	5.59		4.08	4.05	4.09	4.12	4.17	4.11
	7	1.68	1.65	1.69	1.72	1.75	1.73		1.24	1.22	1.18	1.25	1.17	1.15
	8	5.54	5.56	5.52	5.47	5.49	5.45		4.97	4.95	5.01	5.07	4.99	5.05
	9	3.08	3.10	3.07	3.05	3.11	3.14		2.63	2.65	2.61	2.57	2.59	2.55
	1	2.10	2.12	2.08	2.14	2.18	2.16		0.04	0.05	0.03	0.02	0.01	0.06
	2	2.96	2.98	2.91	2.95	2.90	2.93		2.80	2.78	2.81	2.84	2.87	2.85
	3	3.50	3.47	3.56	3.49	3.54	3.57		1.46	1.48	1.41	1.45	1.40	1.39
	4	9.18	9.21	9.15	9.10	9.08	9.06		8.99	8.95	9.01	9.07	9.11	9.05
6	5	2.50	2.48	2.51	2.55	2.58	2.56	19	0.47	0.45	0.42	0.44	0.40	0.41
	6	5.77	5.74	5.78	5.72	5.70	5.68		5.60	5.58	5.61	5.69	5.65	5.68
	7	2.11	2.10	2.16	2.09	2.15	2.17		1.01	1.05	1.02	1.07	0.99	1.06
	8	5.96	5.94	5.98	5.92	5.90	5.88		4.88	4.85	4.82	4.86	4.80	4.79
	9	3.75	3.77	3.72	3.76	3.71	3.69		2.60	2.58	2.63	2.61	2.67	2.69
	1	0.05	0.03	0.02	0.04	0.01	0.06		1.16	1.17	1.10	1.08	1.11	1.18
	2	0.75	0.77	0.78	0.81	0.87	0.84		1.90	1.97	1.95	1.88	1.87	1.96
	3	3.46	3.42	3.36	3.40	3.38	3.35		2.57	2.59	2.50	2.55	2.48	2.51
	4	9.90	9.94	9.91	9.98	9.97	9.99		8.09	8.07	8.10	8.16	8.19	8.18
7	5	1.24	1.26	1.18	1.21	1.16	1.15	20	1.56	1.58	1.50	1.48	1.49	1.54
	6	5.38	5.34	5.39	5.43	5.47	5.45		4.70	4.78	4.80	4.69	4.68	4.76
	7	0.54	0.52	0.51	0.46	0.48	0.45		1.16	1.18	1.10	1.15	1.08	1.11
	8	6.24	6.31	6.27	6.25	6.34	6.35		4.90	4.99	4.88	4.87	4.95	4.97
	9	2.94	2.92	2.87	2.90	2.86	2.88		2.77	2.79	2.74	2.69	2.68	2.70
	1	0.96	1.03	1.06	1.01	0.97	0.95		2.20	2.18	2.21	2.27	2.25	2.28
	2	2.25	2.21	2.28	2.18	2.14	2.16		2.48	2.46	2.39	2.41	2.49	2.47
	3	2.97	3.07	2.95	3.04	3.05	2.98		2.19	2.25	2.20	2.21	2.27	2.29
	4	8.66	8.62	8.54	8.57	8.59	8.67		6.87	6.89	6.85	6.80	6.77	6.75
8	5	1.46	1.55	1.44	1.48	1.54	1.51	21	1.90	1.88	1.91	1.96	1.99	1.97
	6	4.96	4.94	4.88	4.97	4.85	4.86		4.36	4.37	4.39	4.31	4.28	4.26
	7	1.17	1.22	1.26	1.16	1.18	1.25		1.90	1.88	1.91	1.97	1.99	1.95
	8	5.46	5.43	5.38	5.35	5.45	5.39		4.19	4.16	4.17	4.10	4.08	4.06
	9	2.84	2.81	2.74	2.77	2.75	2.86		2.70	2.68	2.71	2.75	2.79	2.78

Продовження табл. 2.9

N в	U	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}	N в	y_{U1}	y_{U2}	y_{U3}	y_{U4}	y_{U5}	y_{U6}
	1	2.41	2.40	2.43	2.48	2.52	2.51		2.26	2.29	2.25	2.20	2.18	2.19
	2	2.49	2.52	2.50	2.45	2.42	2.40		2.40	2.37	2.41	2.47	2.49	2.45
	3	3.23	3.21	3.24	3.29	3.32	3.31		3.05	3.09	3.07	3.00	2.97	2.99
	4	8.09	8.14	8.10	8.05	8.01	8.00		7.20	7.15	7.18	7.25	7.28	7.29
9	5	2.12	2.10	2.14	2.18	2.23	2.20	22	2.08	2.09	2.04	2.00	1.96	2.01
	6	4.60	4.63	4.59	4.53	4.50	4.52		4.20	4.17	4.21	4.27	4.29	4.26
	7	2.04	2.00	2.03	2.08	2.12	2.09		1.99	1.96	1.97	1.91	1.85	1.89
	8	5.30	5.33	5.29	5.23	5.20	5.18		4.68	4.66	4.69	4.75	4.79	4.76
	9	2.91	2.89	2.93	2.97	3.03	2.99		2.77	2.79	2.74	2.70	2.68	2.65
	1	2.37	2.34	2.39	2.45	2.48	2.42		2.76	2.79	2.72	2.64	2.62	2.69
	2	2.55	2.58	2.52	2.46	2.43	2.47		2.63	2.68	2.73	2.66	2.75	2.79
	3	2.72	2.65	2.63	2.77	2.75	2.70		2.37	2.32	2.26	2.23	2.28	2.34
	4	7.23	7.27	7.34	7.38	7.32	7.29		7.43	7.41	7.48	7.53	7.58	7.55
10	5	1.83	1.86	1.81	1.75	1.73	1.78	23	2.18	2.12	2.07	2.15	2.09	2.14
	6	4.14	4.11	4.18	4.23	4.28	4.25		4.65	4.62	4.68	4.73	4.78	4.75
	7	1.95	1.97	1.93	1.88	1.84	1.87		1.95	1.91	1.87	1.97	1.85	1.83
	8	4.52	4.45	4.42	4.48	4.55	4.58		4.03	4.08	4.13	4.18	4.12	4.05
	9	2.53	2.58	2.51	2.44	2.42	2.46		2.66	2.61	2.54	2.51	2.58	2.65
	1	2.46	2.49	2.44	2.39	2.37	2.35		2.27	2.29	2.23	2.18	2.12	2.17
	2	2.39	2.36	2.41	2.47	2.49	2.46		2.14	2.11	2.18	2.24	2.28	2.25
	3	2.27	2.29	2.25	2.20	2.16	2.21		2.35	2.43	2.48	2.41	2.38	2.32
	4	7.12	7.09	7.08	6.98	7.00	6.96		6.47	6.49	6.41	6.35	6.33	6.37
11	5	1.58	1.60	1.56	1.64	1.69	1.67	24	1.77	1.72	1.75	1.64	1.63	1.68
	6	4.09	4.12	4.07	3.99	3.97	4.00		3.72	3.65	3.62	3.76	3.68	3.74
	7	2.06	2.09	2.11	2.17	2.15	2.19		1.93	1.85	1.82	1.95	1.97	1.88
	8	4.39	4.42	4.34	4.27	4.32	4.25		4.14	4.08	4.03	4.17	4.19	4.09
	9	2.50	2.46	2.54	2.51	2.59	2.57		2.37	2.34	2.39	2.43	2.49	2.47
	1	1.65	1.69	1.61	1.57	1.51	1.54		1.51	1.47	1.43	1.38	1.33	1.35
	2	1.54	1.62	1.57	1.52	1.66	1.69		1.74	1.78	1.83	1.89	1.84	1.77
	3	2.33	2.39	2.45	2.49	2.43	2.37		2.05	2.09	2.01	1.93	1.97	1.92
	4	6.46	6.51	6.43	6.38	6.33	6.36		5.53	5.58	5.65	5.68	5.61	5.55
12	5	1.43	1.47	1.53	1.59	1.51	1.45	25	1.27	1.25	1.21	1.16	1.18	1.13
	6	3.56	3.59	3.52	3.48	3.42	3.44		3.18	3.11	3.20	3.25	3.28	3.23
	7	1.23	1.18	1.14	1.16	1.22	1.28		1.27	1.28	1.23	1.17	1.14	1.15
	8	3.91	3.97	4.11	4.05	4.01	3.95		3.35	3.38	3.43	3.49	3.45	3.37
	9	2.15	2.18	2.11	2.07	2.03	2.05		1.87	1.83	1.77	1.73	1.79	1.85
	1	1.20	1.27	1.29	1.21	1.25	1.17		0.68	0.66	0.57	0.59	0.61	0.69
	2	1.89	1.91	1.85	1.77	1.79	1.80		1.60	1.54	1.58	1.64	1.69	1.67
	3	1.55	1.59	1.61	1.66	1.69	1.65		1.20	1.15	1.22	1.27	1.29	1.25
	4	5.08	5.12	5.05	5.01	4.96	4.98		4.69	4.72	4.68	4.60	4.57	4.59
13	5	0.98	0.91	0.99	0.97	0.88	0.85	26	0.37	0.43	0.48	0.40	0.41	0.49
	6	2.90	2.85	2.87	2.95	2.99	2.98		2.68	2.66	2.60	2.63	2.57	2.55
	7	1.08	1.11	1.05	1.00	0.93	0.98		0.60	0.55	0.61	0.66	0.68	0.70
	8	2.89	2.81	2.87	2.85	2.78	2.75		2.47	2.49	2.41	2.45	2.39	2.34
	9	1.40	1.48	1.42	1.45	1.47	1.37		0.99	1.01	0.96	1.07	1.03	1.09

Контрольні запитання

1. Які умови треба виконати для проведення ортогонального планування експерименту?
2. Яка стратегія доцільна для застосування планів?
3. Як виконуються плани повного факторного експерименту 2^n?
4. Що таке плани другого порядку?
5. Як виконується ортогональний центрально-композиційний план другого порядку?
6. Як проводиться перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії?
7. Як проводиться перевірка адекватності рівняння регресії?

ДОДАТКИ

Додаток 1

Коефіцієнт довіри t_γ (квантилі розподілу Стьюдента)

k	При γ			k	При γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
1	12,706	63,657	636,619	19	2,093	2,861	3,883
2	4,303	9,925	31,598	20	2,086	2,845	3,850
3	3,182	5,841	12,941	21	2,080	2,831	3,819
4	2,776	4,604	8,610	22	2,074	2,819	3,792
5	2,571	4,032	6,859	23	2,069	2,807	3,797
6	2,447	3,707	5,959	24	2,064	2,797	3,745
7	2,365	3,499	5,405	25	2,060	2,787	3,725
8	2,306	3,355	5,041	26	2,056	2,779	3,707
9	2,262	3,250	4,781	27	2,052	2,763	3,674
10	2, 23	3,169	4,587	28	2,048	2,763	3,674
11	2,201	3,106	4,437	29	2,045	2,756	3,659
12	2,179	3,055	4,318	30	2,042	2,750	3,646
13	2,160	3,012	4,221	40	2,021	2,704	3,551
14	2,145	2,977	4,140	50	2,008	2,677	3,497
15	2,131	2,947	4,073	60	2,000	2,660	3,460
16	2,120	2,921	4,015	80	1,990	2,639	3,416
17	2,110	2,898	3,965	100	1,984	2,626	3,391
18	2,101	2,878	3,922	∞	1,960	2,576	3,291

Додаток 2

Значення функції нормального розподілу

$$\hat{O}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \ell^{(\frac{-t^2}{2})} dt$$

y	*Ф*(*y*)	*y*	*Ф*(*y*)	*y*	*Ф*(*y*)	*y*	*Ф*(*y*)
-3,5	0,0002	-1,7	0,0446	+0,1	0,5398	+	0,9713
-3,4	0,0003	-1,6	0,0548	+0,2	0,5793	+2,0	0,9773
-3,3	0,0004	-1,5	0,0668	+0,3	0,6179	+2,1	0,9821
-3,2	0,0006	-1,4	0,0808	+0,4	0,6554	+2,2	0,9861
-3,1	0,0009	-1,3	0,0968	+0,5	0,6915	+2,3	0,9893
-3,0	0,0013	-1,2	0,1151	+0,6	0,7257	+2,4	0,9918
-2,9	0,0019	-1,1	0,1357	+0,7	0,7580	+2,5	0,9938
-2,8	0,0026	-1,0	0,1587	+0,8	0,7881	+2,6	0,9953
-2,7	0,0035	-0,9	0.1841	+0,9	0,8156	+2,7	0,9965
-2,6	0,0047	-0,8	0,2119	+	0,8413	+2,8	0,9974
-2,5	0,0062	-0,7	0,2420	+	0,8643	+2,9	0,9981
-2.4	0,0082	-0,6	0,2743	+	0,8849	+3,0	0,9986
-2,3	0,0107	-0,5	0,3085	+	0,9032	+3,1	0,9990
-2,2	0,0139	-0,4	0,3446	+	0,9192	+3,2	0,9993
-2,1	0,0179	-0,3	0,3821	+	0,9332	+3,3	0,9995
-2,0	0,0228	-0,2	0,4207	+	0,9452	+3,4	0,9996
-1,9	0,0287	-0,1	0,4602	+1,7	0,9554	+3,5	0,9997
-1,8	0,0359	0,0	0,500	+	0,9641		

Додаток 3

Квантилі розподілу Фішера F_{1-q} для q = 0,05

k_2	k_1								
	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249	254,3
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Додаток 4

Квантилі розподілу Кохрена G_{1-q} для $q = 0,05$

k_1	k_2										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	7977	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0780	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Всі квантилі G_{1-q} менше одиниці, тому в таблиці приведені лише десяткові знаки, слідуючі після коми, перед якою при користуванні таблицею потрібно ставити нуль цілих. Наприклад, при $k_1 = 6$, $k_2 = 3$ маємо $G_{0,95} = 0,5321$.