Лабораторна робота № 1
ОСНОВИ ПРОВЕДЕННЯ БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Мета роботи:

Ознайомиться з основами проведення багатофакторних експериментів. Виконати розрахунки за допомогою програми МАТЛАБ.

1.1. Основні теоретичні відомості

1.1.1. Основні поняття і визначення

Експеримент – сукупність операцій, що здійснюються над об'єктом дослідження з метою отриманняя інформації про його властивості. Експеримент, в якому дослідник на свій розсуд може змінювати умови його проведення, називається активним експериментом. Якщо дослідник не може самостійно змінювати умови його проведення, а лише реєструє їх, то це пасивний експеримент.

Вхідні параметри, які можуть бути змінені, називають факторами.

План експерименту – сукупність даних, що визначають число, умови і порядок проведення дослідів.

Дослід – це окрема експериментальна частина.

Планування експерименту – вибір плану експерименту, що задовольняє заданим вимогам, сукупність дій спрямованих на розробку стратегії експериментування (від отримання апріорної інформації до отримання працездатної математичної моделі або визначення оптимальних умов). Це цілеспрямоване управління експериментом, що реалізовується в умовах неповного знання механізму явища, що вивчається.

Мета планування експерименту – знаходження таких умов і правил проведення дослідів, при яких вдається отримати надійну і достовірну інформацію про об'єкт з найменшими витратами праці, а також представити цю інформацію в компактній і зручній формі з кількісною оцінкою точності.

Хай властивість Y об'єкту, що цікавить нас, залежить від декількох (n) незалежних змінних (x_1, x_2 ., x_n) і ми хочемо з'ясувати характер цієї залежності – $Y=F(x_1, x_2 ., x_n)$, про яку ми маємо лише загальне уявлення. Величина Y називається “відгуком”, а сама залежність $Y=F(x_1,x_2 ., x_n)$ – це “функція відгуку”.

Для побудови ефективної математичної моделі доцільно провести попередній аналіз значущості факторів (міри впливу на функцію), їх ранжирування і виключити малозначні фактори.

Діапазони зміни факторів задають область визначення Y. Якщо прийняти, що кожному фактору відповідає координатна вісь, то отриманий простір називається факторним простором. При n=2 область визначення Y представляє собою прямокутник, при n=3 – куб, при n >3 – гіперкуб.

При виборі діапазонів зміни факторів потрібно враховувати їх сумісність, тобто контролювати, щоб в цих діапазонах будь-які поєднання факторів можна було реалізувати у дослідах і це не приводило до абсурду. Для кожного з факторів вказують граничні значення

$$X_{i\min} \le X_i \le X_{i\max}, \quad \mathrm{i} = 1...\mathrm{n}. \qquad (1.1)$$

Регресійний аналіз функції відгуку призначений для отримання її математичної моделі у вигляді рівняння регресії

$$Y = F(X_1, X_2, ..., X_n; B_1, B_2, ..., B_m) + e, \qquad (1.2)$$

де B_1,..., B_m – деякі коефіцієнти; e – похибка.

При використанні методів планування експерименту необхідно знайти відповіді на 4 питання:

- Які поєднання факторів і скільки таких поєднань необхідно узяти для визначення функції відгуку?

- Як знайти коефіцієнти B_0, B_1 ., B_m?
- Як оцінити точність представлення функції відгуку?
- Як використовувати отримане уявлення для пошуку оптимальних значень Y?

1.1.2. Розкладання функції відгуку в степеневий ряд, кодування факторів

Якщо заздалегідь не відомий аналітичний вираз функції відгуку, то можна розглядати не саму функцію, а її розкладання, наприклад в степеневий ряд у вигляді полінома
$Y=B_0+B_1X_1+.+B_nX_n+B_{12}X_1X_2+\ldots+B_{nn-1}X_nX_{n-1}+B_{11}X_1^2+.+B_{nn}X_n^2+\ldots$ (3.3)

Розкладання функції в степеневий ряд можливо в тому випадку, якщо сама функція є неперервною і гладкою. На практиці зазвичай обмежуються числом членів степеневого ряду і апроксимують функцію поліномом деякої міри.

Фактори можуть мати різні розмірності (A, B, B_m) і значно відрізнятися кількісно. У теорії планування експерименту використовують кодування факторів.

Ця операція полягає у виборі нового масштабу для кодованих факторів, причому такого, щоб мінімальне значення кодованих факторів відповідало "-1", а максимальне значення "+1", а також в перенесенні початку координат в точку з координатами X_{1cp}, X_{2cp} ., X_{ncp}

$$X_{i\tilde{n}\eth}=\frac{X_{i\min}+X_{i\max}}{2}\ . \qquad (1.4)$$

Поточне значення кодованого фактора

$$x_i=\frac{X_i-X_{icp}}{X_{icp}-X_{i\min}}=\frac{X_i-X_{icp}}{X_{i\max}-X_{icp}}=\frac{2X_i-X_{i\max}-X_{i\min}}{X_{i\max}-X_{i\min}}, \qquad (1.5)$$

де X_i – іменоване (абсолютне) значення фактора; x_i – кодоване значення фактора; X_{icp}-X_{imin} =X_{imax}-X_{icp} - інтервал варіювання фактора.

Функція відгуку може бути виражена через кодовані фактори $Y=f(x_1., x_n)$ і записана в поліноміальному вигляді

$Y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+.+b_nx_n+b_{12}x_1x_2+.+b_{nn-1}x_{n-1}x_n+b_{11}x_1^2+.+b_{nn}x_n^2+\ldots$(1.6)

Очевидно, що $B_i \neq b_i$, та

$$Y=F(X_1., X_i., X_n)= f(x_1. x_i., x_n). \qquad (1.7)$$

Для полінома, записаного в кодованих факторах, ступінь впливу фактора або їх поєднань на функцію відгуку визначається величиною їх коефіцієнта b_i. Для полінома в іменованих факторах величина коефіцієнта B_i ще не вказує однозначно на ступінь впливу цього фактора або їх поєднань на функцію відгуку.

Якщо вважати, що існує фактора x_0 завжди рівний 1, то

$$b_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=b_0x_0+b_1x_1+\ldots+b_nx_n=\sum_{i=0}^{n}b_ix_i\ . \quad (1.8)$$

Якщо додатково всі подвійні, потрійні і так далі поєднання факторів, а також квадрати факторів і всі відповідні їм коефіцієнти позначити через x_i і b_i для $i=n+1$., m, то степеневий ряд можна записати у вигляді

$$Y=\sum_{i=0}^{m}b_ix_i\ . \qquad (1.9)$$

В даному випадку $m+1$ – загальне число доданків ряду.

1.1.3. Матричні перетворення при обробці результатів експерименту

При матричному записі результатів різних дослідів N для поліноміального представлення результату $Y_u=\sum_{i=0}^{m}b_ix_{iu}$ матимемо рівняння

$$Y=X\cdot B; \qquad (1.10)$$

де: X - матриця поєднань чинників

$$X=\begin{vmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{i1} & \ldots & x_{m1} \\ x_{02} & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{i2} & \ldots & x_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{0u} & x_{1u} & x_{2u} & \ldots & x_{iu} & \ldots & x_{mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} & \ldots & x_{iN} & \ldots & x_{mN} \end{vmatrix}.$$

В даному випадку 0,1,...,i,…,m – номери доданків рівняння; 1,...,u,...,N – номери дослідів. Матриця X – прямокутна і містить m+1 стовпців і N рядків.

Якщо врахувати, що в матриці X елементи $x_{0ш}$=1, u=1,…,ш, то матриці X, Y, B можна записати у вигляді

$$X=\begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & . & x_{i1} & . & x_{m1} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & . & x_{i2} & . & x_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{1u} & x_{2u} & . & x_{iu} & . & x_{mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & . & x_{iN} & . & x_{mN} \end{vmatrix}, \quad Y=\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_u \\ .. \\ y_N \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ .. \\ b_i \\ .. \\ b_m \end{vmatrix}, \qquad (1.11)$$

де: Y – матриця-стовпець результатів досліду, B – матриця-стовпець коефіцієнта полінома.

Помножимо ліву і праву частину рівняння (1.10) на транспоновану матрицю X_t:

$$X_t \cdot X \cdot B = X_t \cdot Y. \qquad (1.12)$$

Матриця $C = X_t{\cdot}X$, що отримана в результаті множення на транспоновану матрицю, є квадратною матрицею, що містить m+1 рядків і m+1 стовпців.

Запишемо (1.12) у вигляді:

$$C \cdot B = X_t \cdot Y. \qquad (1.13)$$

Для того, щоб отримати в загальному вигляді матрицю-стовпець коефіцієнтів, необхідне помножити обидві частини матричного рівняння (3.13) зліва на матрицю C^{-1} (матрицю, зворотну матриці C).

$$C^{-1} \cdot C \cdot B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y. \qquad (1.14)$$

Зворотна матриця будується так, що при множенні її на початкову матрицю виходить одинична матриця E, у якої на головній діагоналі розташовані 1, а поза нею – 0.

$$\tilde{N}^{-1} \cdot \tilde{N} = E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1.15)$$

Запишемо в загальному вигляді матрицю-стовпець коефіцієнтів полінома

$$B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y. \qquad (1.16)$$

Розглянемо, як простий приклад, поліном у вигляді:

$$Y_u=b_0x_0+b_1x_u; \quad x_0 = 1; \quad u = 1,..., N; \qquad (1.17)$$

який сформованого за результатами N дослідів.

$$C = X_t \cdot X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_u & \dots & x_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1\ x_1 \\ 1\ x_2 \\ \dots\dots \\ 1\ x_u \\ \dots\dots \\ 1\ x_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N \ \dots \ \sum_{u=1}^{N} x_u \\ \dots\dots\dots\dots\ \dots \\ \sum_{u=1}^{N} x_u \dots \sum_{u=1}^{N} x_u^2 \end{vmatrix}. \qquad (1.18)$$

$$X_t \cdot Y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_u & \dots & x_N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots\dots \\ y_u \\ \dots\dots \\ y_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^{N} y_u \\ \sum_{u=1}^{N} x_u y_u \end{vmatrix}.$$

Зворотна матриця C^{-1} для матриці C має вигляд:

$$C^{-1} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^{N} x_u^2 & -\sum_{U=1}^{N} x_u \\ -\sum_{u=1}^{N} x_u & N \end{vmatrix}, \qquad (1.19)$$

де D – визначник матриці C.

На основі виразу (3.16) отримаємо:

$$B = C^{-1} \cdot X_t \cdot Y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^{N} x_u^2 & -\sum_{u=1}^{N} x_u \\ -\sum_{u=1}^{N} x_u & N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^{N} y_u \\ \sum_{u=1}^{N} x_u y_u \end{vmatrix} = \frac{1}{N\sum_{u=1}^{N} x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^{N} x_u\right)^2} \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^{N} y_u \cdot \sum_{u=1}^{N} x_u^2 - \sum_{u=1}^{N} x_u y_u \cdot \sum_{u=1}^{N} x_u \\ -\sum_{u=1}^{N} y_u \cdot \sum_{u=1}^{N} x_u + N\sum_{u=1}^{N} x_u y_u \end{vmatrix}.$$

Звідси вирішення системи рівнянь щодо коефіцієнтів b_0 і b_1:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{N} y_u \cdot \sum_{u=1}^{N} x_u^2 - \sum_{u=1}^{N} y_u x_u \cdot \sum_{u=1}^{N} x_u}{N\sum_{u=1}^{N} x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^{N} x_u\right)^2}, \qquad (1.20)$$

$$b_1 = \frac{N\sum_{u=1}^{N} y_u x_u - \sum_{u=1}^{N} y_u \cdot \sum_{u=1}^{N} x_u}{N\sum_{u=1}^{N} x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^{N} x_u\right)^2}. \qquad (1.21)$$

Цей результат повністю збігається з співвідношеннями для такого ж полінома при використанні методу найменших квадратів, де використовується чисельний показник мінімальності суми квадратів відхилень у всіх N дослідах. Отже, побудований таким чином поліном буде найбільш близький до точних значень результатів експерименту.

Елементи вектора B матричного рівняння (1.10) можна знайти, використовуючи програму MATLAB.

Запишемо програму пошуку коефіцієнтів b в наступному вигляді:

```
%Знаходження коефіцієнтів рівняння регресії
function kregres
X=input ('Введітьзапроваджуйте значення матриці X[...]')
```

```
Y=input ('Введітьзапроваджуйте значення транспонованого вектора Y[...]')
%Знаходження зворотної матриці
D=inv(X'*X);
%Знаходження коефіцієнтів рівняння регресії
B=D*X'*Y';
B=B';
%Знаходження ширини матриці X
n=length(X(1,:));
disp('Виведення коефіцієнтів рівняння регресії')
for j=1:1:n
i=j-1;
b=B(j);
disp(['b' num2str(i) ' = ' num2str(b)])
end
disp('Виведення обчисленихобчисляти значень відгуку Y(Yv)')
Yv=(X*B')'
disp('Виведення різниці значень експериментального відгуку і обчисленогообчисляти')
DE=(Y'-Yv')'
```

Наведемо приклад знаходження коефіцієнтів наступного рівняння регресії:

$$y= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Для зручності обчислень перепишемо це рівняння у вигляді

$$y= b_0x_0+ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5,$$

де: $x_3=x_1x_2$, $x_4=x_1^2$, $x_5=x_2^2$.

Запишемо результати дослідів в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

u	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y'	y	y'-y
1	1	1	1	1	1	1	10,4	10,1889	0,2111
2	1	-1	1	-1	1	1	2,2	2,0889	0,1111
3	1	1	-1	-1	1	1	0,2	0,2222	-
4	1	-1	-1	1	1	1	-2,0	-1,8778	-
5	1	0	0	0	0	0	0,7	0,5222	0,1778
6	1	1	0	0	1	0	3,9	4,0889	-
7	1	0	1	0	0	1	4,8	5,1222	-
8	1	-1	0	0	1	0	-1,0	-1,0111	0,0111
9	1	0	-1	0	0	1	-1,7	-1,8444	0,1444

Результати обчислень за програмою *kregres* наводимо нижче.

```
kregres
Введіть значення матриці X[...][1 1 1 1 1 1
1 -1 1 -1 1 1
1 1 -1 -1 1 1
1 -1 -1 1 1 1
1 0 0 0 0 0
```

```
  1 1 0 0 1 0
  1 0 1 0 0 1
  1 -1 0 0 1 0
  1 0 -1 0 0 1];
  Введіть значення транспонованого вектора Y[...][10.4 2.2 0.2 -
2 07  3.9 4.8 -1 -1.7]
  Виведення коефіцієнтів рівняння регресії
  b0 = 0.52222
  b1 = 2.55
  b2 = 3.4833
  b3 = 1.5
  b4 = 1.0167
  b5 = 1.1167
  Виведення обчислених значень відгуку Y(Yv)
  Yv =
     10.1889    2.0889    0.2222   -1.8778    0.5222    4.0889
5.1222   -1.0111   -1.8444
  Виведення різниці значень експериментального відгуку і
обчисленого
  DE =
      0.2111    0.1111   -0.0222   -0.1222    0.1778   -0.1889
-0.3222    0.0111    0.1444
```

Занесемо в табл. 1.1 обчислені значення відгуку і різницю між результатами досліду та обчисленими значеннями.

1.2. Порядок виконання лабораторної роботи

1. Знайти коефіцієнти рівняння регресії наступного вигляду:

$$y= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$

відповідно до варіанту завдання по табл. 1.2. Значення x для експериментів $U_1 \dots U_8$ беруться з табл. 1.1 у відповідності з варіантом завдання.

2. Зробити висновок по отриманих результатах.

1.3. Контрольні запитання

1. У чому полягає процедура пасивного експерименту?
2. У чому полягає процедура активного експерименту?
3. Що таке планування експерименту?
4. Яка мета планування експерименту?
5. Як проводиться кодування факторів?
6. У якому вигляді записується функція відгуку?
7. Як знаходяться коефіцієнти функції відгуку?

Таблиця 1.2

№в	*u*	*y'*	*№в*	*u*	*y'*	*№в*	*u*	*y'*	*№в*	*u*	*y'*	*№в*	*u*	*y'*
	1	9,7		1	7,7		1	6,9		1	5,7		1	7,5
	2	1,2		2	0,9		2	0,8		2	-1,1		2	-0,5
	3	3,4		3	0,2		3	0,4		3	1,6		3	1,9
1	4	-0,6	6	4	-3,3	11	4	-2,7	16	4	-2,3	21	4	-2,2
	5	2,1		5	0,7		5	0,6		5	0,5		5	1,3
	6	6,1		6	3,9		6	3,8		6	3,3		6	4,6
	7	4,3		7	3,7		7	3,2		7	2,2		7	3,2
	8	-0,3		8	-1,1		8	-1,4		8	-2,1		8	-1,7
	9	0,6		9	-2,3		9	-1,7		9	-0,8		9	-0,5
	1	7,4		1	5,5		1	9,5		1	7,4		1	7,2
	2	1,1		2	-0,9		2	1,4		2	-0,7		2	0,6
	3	0,1		3	1,3		3	3,3		3	2,1		3	0,5
2	4	-3,5	7	4	-2,2	12	4	-0,5	17	4	-2,2	22	4	-2,6
	5	0,6		5	0,3		5	1,8		5	1,3		5	0,5
	6	4,1		6	3,5		6	6,3		6	4,4		6	3,8
	7	3,5		7	1,9		7	4,3		7	3,4		7	3,1
	8	-1,3		8	-2		8	-0,1		8	-1,7		8	-1,1
	9	-2,1		9	-0,5		9	0,4		9	-0,3		9	-1,8
	1	6,8		1	7,2		1	8		1	10,1		1	5,9
	2	0,7		2	-0,5		2	0,7		2	0,9		2	-1,3
	3	0,6		3	1,7		3	0,3		3	3,7		3	1,7
3	4	-2,9	8	4	-2,5	13	4	-3,1	18	4	-0,6	23	4	-2,6
	5	0,7		5	1,1		5	0,8		5	2,2		5	0,5
	6	3,4		6	4,8		6	3,7		6	5,9		6	3,1
	7	3,2		7	3,1		7	3,6		7	4,7		7	2,2
	8	-1,3		8	-1,5		8	-1,1		8	-0,2		8	-2
	9	-1,6		9	-0,5		9	-2,4		9	0,6		9	-0,7
	1	5,6		1	7,5		1	7,8		1	7,1		1	9,6
	2	-1		2	1		2	-0,6		2	0,8		2	1,2
	3	1,4		3	0,3		3	2		3	0,4		3	3,4
4	4	-2,3	9	4	-3,4	14	4	-2,1	19	4	-2,7	24	4	-0,7
	5	0,4		5	0,7		5	1,3		5	0,6		5	1,9
	6	3,4		6	4		6	4,5		6	3,7		6	6,2
	7	2,1		7	3,8		7	3,3		7	3,3		7	4,4
	8	-2		8	-1,4		8	-1,6		8	-1,1		8	-0,3
	9	-0,5		9	-2,3		9	-0,4		9	-1,7		9	0,5
	1	7,3		1	6,9		1	5,7		1	9,9		1	7,9
	2	-0,7		2	0,6		2	-1,1		2	1,1		2	0,8
	3	1,8		3	0,5		3	1,6		3	3,6		3	0,2
5	4	-2,5	10	4	-2,9	15	4	-2,5	20	4	-0,5	25	4	-3,2
	5	1,2		5	0,5		5	0,3		5	2,1		5	0,8
	6	4,7		6	3,5		6	3,2		6	6		6	3,9
	7	3,2		7	3		7	2,3		7	4,6		7	3,4
	8	-1,7		8	-1,2		8	-2		8	-0,1		8	-1,2
	9	-0,3		9	-1,8		9	-0,6		9	0,4		9	-2,1