

Лабораторна робота № 6
МЕТОДИКА ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ
ПРИ НЕПРЯМИХ ВИМІРАХ

Мета роботи:

Ознайомитися з процедурою проведення непрямих вимірів та методикою обробки даних.
Виконати розрахунки у програмі MATLAB.

6.1. Основні теоретичні відомості

6.1.1. Последовательность обчислень при обробці непрямих вимірювань

Вихідними даними при непрямих вимірах є ряди результатів спостережень аргументів X_j , які попередньо оброблені за методикою, як для прямих вимірювань (перевірка нормальності розподілу, оцінка аномальну окремих найбільш відхилилися результатів спостережень, визначення найбільш достовірних результатів вимірювання і показників їх точності).

Методика обробки результатів непрямих вимірювань може використовуватися тільки за умови сталості аргументів і відсутності взаємного зв'язку між ними. Тому перед початком обчислень треба, проаналізувавши попарно всі результати спостережень аргументів, переконатися у відсутності кореляції між ними. Якщо кореляційний зв'язок не виявлено, проводиться подальша обробка: визначається результат непрямого вимірювання і оцінюється його похибка.

В особливо відповідальних випадках обчислення похибки результату проводиться таким чином:

- визначається оцінка випадкової складової похибки результату (на підставі випадкових складових похибок аргументів);
- визначається оцінка невиключену залишків систематичної склад-ляющие похибки результату;
- визначаються довірчі межі загальної похибки результату непрямого вимірювання (по композиції законів розподілу випадкової і невиключену систематичної складових похибки).

Такий розрахунок досить складний; проте в більшості технічних вимірювань цілком задовільні результати можуть бути отримані і більш простими способами.

6.1.2. Перевірка відсутності кореляції між результатами спостережень кожної пари аргументів

Коефіцієнт кореляції R між аргументами X_h і X_k обчислюється за формулою:

$$R = \frac{\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_{hi} x_{ki} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_{hi} \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{ki} \right) \right]}{S_{\bar{x}h} S_{\bar{x}k}} \quad (6.1)$$

де n – кількість спостережень; x_{hi} и x_{ki} - результати i – го спостереження відповідно h – го та k – го аргументів; $S_{\bar{x}h}$ та $S_{\bar{x}k}$ - оцінки середньоквадратичного відхилення результатів вимірювання цих аргументів.

$$R = \frac{(n-1) \left[\sum_{i=1}^n u_{hi} u_{ki} - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n u_{hi} \right) \left(\sum_{i=1}^n u_{ki} \right) \right]}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n u_{hi}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n u_{hi} \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^n u_{ki}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n u_{ki} \right)^2 \right]}} \quad (6.2)$$

Для зменшення операційних похибок при обчисленні на ЕОМ слід замість x_i використовувати величини $u_i = x_i - c$. Тоді підставивши в формулу (6.1) значення i , одержимо (6.2), де $u_{hi} = x_{hi} - c_h$; $u_{ki} = x_{ki} - c_k$.

Потім обчислюється показник кореляції

$$K_R = R\sqrt{n/(1-R^2)} \quad (6.3)$$

Критерієм відсутності кореляції є нерівність

$$K_R < t_\gamma \quad (6.4)$$

де t_γ - коефіцієнт довіри (дод. 6) при довірчій ймовірності γ і числі ступенів свободи $k = n - 1$.

Якщо нерівність (5.4) задовольняється, то це означає, що кореляційний зв'язок між даною парою аргументів X_h і X_k відсутній. При наявності кореляційної залежності між аргументами обробка експериментальних даних при непрямих вимірах виробляється за більш складною методикою, що розглядається в спеціальній літературі по обробці даних вимірювань.

6.1.3. Визначення результату непрямого вимірювання

При відсутності кореляційної зв'язку між результатами спостережень аргументів середнє значення результату непрямого вимірювання можна знайти, підставляючи в рівняння зв'язку (1.4) середні значення результатів прямих вимірювань цих аргументів:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) \quad (6.5)$$

6.1.4. Залежність похибки результату непрямого вимірювання від похибок аргументів

Похибка результату непрямого вимірювання в загальному випадку визначається співвідношенням

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2; \dots, x_N + \Delta x_N) - f(x_1; x_2; \dots, x_N) \quad (6.6)$$

де x_j - дійсні значення аргументів; Δx_j - похибки вимірювання цих аргументів.

Однак отриманий вираз незручно для практичного використання. Розклавши його в ряд Тейлора, отримуємо наближену формулу

$$\Delta y \approx \sum_{j=1}^N \frac{df}{dx_j} \Delta x_j \quad (6.7)$$

де df/dx_j - приватна похідна від y з рівняння зв'язку (1.4) по j -му вимірювальному аргументу; Δx_j - абсолютна похибка прямого виміру j -го аргументу.

У реальних умовах при додаванні похибок можлива їх часткова взаємна компенсація, тому формула (6.7) дає дещо завищені результати; ймовірність найгіршого поєднання похибок, при якому всі вони арифметично складаються, з ростом N прямує до нуля. Тому кращі результати виходять середньоквадратичним підсумовуванням похибок:

$$\Delta y \approx \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{df}{dx_j} \Delta x_j \right)^2} \quad (6.8)$$

Величину $E_j = (df / dx_j) \Delta x_j$ називають приватної похибкою результату непрямого вимірювання.

6.1.5. Визначення похибки результату непрямого вимірювання для найбільш поширених рівнянь зв'язку

З формули (6.8) можна вивести значення похибки результату непрямого вимірювання для деяких часто зустрічаються рівнянь зв'язку, наприклад, для функції однієї змінної, для суми або твори аргументів і т.п.

Для функції однієї змінної

$$Y = f(X) \quad (6.9)$$

абсолютна похибка результату становить

$$\Delta y \approx \left| df / dx \right| \Delta x \quad (6.10)$$

в окремому випадку, якщо $Y = X^a$, то $\Delta y \approx a x^{a-1} \Delta x$.

Цей вислів зручніше представити у вигляді відносної похибки результату:

$$\Delta y / y \approx a \Delta x / x \quad (6.11)$$

З формули (6.11) випливає, що зведення в ступінь значно збільшує похибку результату, тому вимір величин, які при подальших обчисленнях підносяться до рівня, має проводитися з особливою точністю.

Якщо

$$Y = \sqrt[a]{X}, \text{ то}$$

$$\Delta y / y \approx \frac{1}{a} (\Delta x / x) \quad (6.12)$$

Отже, величини, з яких при подальшій обробці отримуються корині, можуть вимірюватися з меншою точністю, оскільки похибка таких величин при обробці зменшується.

Для алгебраїчної суми

$$Y = aX_1 + bX_2 + \dots \quad (6.13)$$

абсолютна похибка результату

$$\Delta y \approx \sqrt{(a\Delta x_1)^2 + (b\Delta x_2)^2 + \dots} \quad (6.14)$$

Для добудка

$$Y = kX_1 X_2 \dots \quad (6.15)$$

похибка результату

$$\Delta y \approx y \sqrt{\left(a \frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(b \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \dots} \quad (6.16)$$

У формулах (6.13) - (6.16) величини $a, b, \dots$ - довільні цілі або дробові, додатні або від'ємні числа.

6.1.6. Визначення довірчих меж похибки результату непрямого вимірювання

Якщо при проведенні прямих вимірювань аргументів систематична складова їх похибки була невелика ($\Theta/S_{\bar{x}} < 0,8$), то її вплив на результат непрямого вимірювання можна знехтувати. В

цьому випадку слід обчислювати середньоквадратичну похибку результату непрямого вимірювання:

$$S_{\bar{y}} \approx \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{df}{dx_j} S_{\bar{x}j} \right)^2} \quad (6.17)$$

де $S_{\bar{x}j}$ - середньоквадратичні похибки результатів прямих вимірювань аргументів x_j .

Потім обчислюється так зване "ефективне число ступенів свободи" для даного непрямого вимірювання:

$$k_{\text{эф}} = \left(\sum_{j=1}^N \frac{df}{dx_j} S_{\bar{x}j}^2 \right) / \left[\sum_{j=1}^N \frac{1}{n_j - 1} \left(\frac{df}{dx_j} S_{\bar{x}j}^2 \right) \right] \quad (6.18)$$

де n_j - число прямих вимірювань аргументу x_j .

Якщо всі n_j однакові й рівні n , то

$$k_{\text{эф}} = (n - 1) \left(\sum_{j=1}^N \frac{df}{dx_j} S_{\bar{x}j}^2 \right) / \left[\sum_{j=1}^N \left(\frac{df}{dx_j} S_{\bar{x}j}^2 \right) \right] \quad (6.19)$$

В додатку 6, задавшись значенням γ , знаходимо для $k = k_{\text{эф}}$ (якщо значення $k_{\text{эф}}$ вийшло дробовим, його слід округлити) величину t_γ , після чого обчислюємо довірчі межі випадкової складової похибки результату косвенного вимірювання:

$$\varepsilon = t_\gamma S_{\bar{y}} \quad (6.20)$$

В цьому випадку довірна межа загальної похибки результату непрямого вимірювання

$$\varepsilon = t_\gamma S_{\bar{y}} \quad (6.21)$$

Якщо при проведенні прямих вимірювань аргументів їх систематичної складової похибки знехтувати не можна, то довірчу межу загальної похибки результату непрямого вимірювання

$$\Delta A_y \approx \sqrt{\sum_{j=1}^N \left(\frac{df}{dx_j} \Delta A_j \right)^2} \quad (6.22)$$

можна наближено визначити, підставляючи в формулу (6.8) значення довірчих меж ΔA_j загальних похибок результатів прямих вимірювань аргументів x_j (всі ΔA_j повинні визначатися при однаковій довірчій ймовірності γ):

6.1.7. Критерій незначних приватних похибок

При визначенні похибки непрямого вимірювання доводиться підсумовувати похибки, які різні за значенням. Обчислення можна спростити, якщо знехтувати тими з них, які в порівнянні з іншими мізерно малі.

Припустимо, слід підсумувати дві приватні похибки E_1 і E_2 , причому $E_1 \gg E_2$. У загальному випадку сумарна похибка

$$\Delta_{\Sigma} \approx \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \quad (6.23)$$

За правилами обробки результатів вимірювань похибка округлюється до однієї - двох значущих цифр; отже, зміна правій частині виразу (6.23) менше ніж на 5% не вплине на округлене значення Δ_{Σ} . Звідси можна сформулювати наступний критерій: якщо серед суммованих часткових похибок виявлені найбільша і найменша, що відрізняються за значенням один від одного більш ніж в три рази, тобто

$$E_{2(\min)} < \frac{1}{3} E_{1(\max)} \quad (6.24)$$

то меншою похибкою можна знехтувати, що практично не відіб'ється на значенні Δ_{Σ} .

На підставі критерію незначних похибок можна знехтувати цілою групою похибок, якщо їх середньоквадратичне значення менше 1/3 від максимальної часткової похибки:

$$\sqrt{E_k^2 + E_l^2 + \dots} < \frac{1}{3} E_{1(\max)} \quad (6.25)$$

З критерію незначних часткових похибок випливає: при перевірці вимірювальних приладів зразковий прилад повинен мати похибку хоча б в три рази меншу, ніж той, що повіряється.

6.1.8. Округлення констант в формулах зв'язку

В обчисленнях результатів непрямих вимірювань доводиться користуватися наближеними значеннями деяких постійних. Округлення числових значень цих констант повинно здійснюватися у відповідності з критерієм незначних приватних похибок: похибка округлення константи повинна задовольняти нерівності

$$|\Delta C| < \frac{1}{3} \frac{\Delta A_y}{(dy / dC)} \quad (6.26)$$

Тут ΔC - похибка, що виникає при округленні числового значення константи; ΔA_y - задана довірча межа похибки результату непрямого вимірювання; $dy / dC \approx$ часткова похідна від $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, C)$ за величиною C .

6.2. Порядок виконання лабораторної роботи

6.3. Контрольні питання

