

Розділ 5. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1. Знаходження похідної за означенням

За означенням *похідна функції* $y = f(x)$ у точці x обчислюється за формулою

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (1)$$

якщо границя існує і скінченна. Тут $\Delta f(x)$ – *приріст функції*; Δx – *приріст аргументу* ($\Delta x \neq 0$).

Для похідної використовують також інші позначення, зокрема: $y'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$. Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

За фізичним змістом похідна характеризує швидкість зміни функції.

2. Таблиця похідних основних елементарних функцій

I. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (n – будь-яке дійсне число)

II. $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$)

Зокрема, при $a = e$

II°. $(e^x)' = e^x$

III. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$)

Зокрема, при $a = e$

III°. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$\text{IV.} \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$\text{V.} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\text{VI.} \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{VII.} \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{VIII.} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{IX.} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{X.} \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{XI.} \quad (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3. Основні правила диференціювання функцій

1°. Похідна сталої функції $y = c$ дорівнює нулю, тобто $(c)' = 0$.

2°. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, де c – стала.

3°. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$.

Це правило узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$(u \pm v \pm w \pm \dots \pm z)' = u' \pm v' \pm w' \pm \dots \pm z'.$$

4°. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5°. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

6°. Нехай $y = f[u(x)]$ – складна функція, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут u – проміжний аргумент, x – незалежна змінна. Тоді

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

4. Диференціювання функцій, заданих неявно

Якщо кожному числу x з множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел $(x; y)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, що функцію $y = f(x)$, $x \in X$, задано неявно.

Незважаючи на те, що рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y , можна знайти похідну $y' = y'(x)$. Для цього потрібно:

- 1) обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x , вважаючи, що y є функцією від x ;
- 2) одержане рівняння розв'язати відносно y' .

5. Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t - \text{параметр}, \quad t \in T.$$

Її похідна обчислюється за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad (4)$$

де y'_x – похідна функції $y = f(x)$ (надалі цю похідну будемо позначати y'); y'_t – похідна функції y по змінній t ; x'_t – похідна функції x по змінній t .

6. Похідні вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому інтервалі (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Таким чином, друга похідна від заданої функції є похідна від її першої похідної.

Аналогічно *похідна третього порядку (третьа похідна)* $y''' = (y'')'$ і т.д.

7.2. Дослідження функцій на монотонність

Функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на (a, b) , якщо для будь-яких чисел $x_1 < x_2$ з (a, b) виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a, b) . Якщо $y' = f'(x) > 0$ ($y' = f'(x) < 0$) при всіх $x \in (a, b)$, то функція зростає (спадає) на (a, b) .

При розв'язуванні задач, в яких потрібно знайти інтервали монотонності (зростання, спадання) функції, треба перш за все знайти область визначення функції.

7.3. Дослідження функцій на екстремуми

Функція $y = f(x)$ має у точці x_0 *локальний максимум (мінімум)*, якщо знайдеться окіл точки x_0 (тобто інтервал виду $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$), що для усіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Дослідження функції на екстремуми (максимуми, мінімуми) доцільно виконувати за такою схемою:

1) Знайти похідну y' .

2) Розв'язати рівняння $y' = 0$, а також визначити ті значення x , при яких y' не існує (іншими словами: знайти *критичні точки I роду*). Функція може мати екстремуми лише в критичних точках I роду.

3) Всі критичні точки розмістити в порядку зростання. Нехай в інтервал (a, b) з області визначення $D(f)$ функції потрапили точки $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

4) На кожному з інтервалів $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$ потрібно взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак похідної y' (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5) Аналізуємо знаки y' при переході зліва направо через кожен критичну точку: якщо знак змінюється з "+" на "-", то в критичній точці функція має максимум; якщо знак змінюється з "-" на "+", то – мінімум. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак похідної y' зберігається, то екстремуму в критичній точці немає.

6) Знайти значення функції $y = f(x)$ в точках, в яких вона досягає екстремуму (*екстремальні значення функції*).

Зауваження. При дослідженні функції на екстремуми потрібно перш за все знайти область визначення функції.

7.4. Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень, які позначаються M і m , де $M = \max_{[a, b]} f(x)$; $m = \min_{[a, b]} f(x)$. Ці значення досягаються або в точках локального екстремуму, які є критичними точками I роду, або на кінцях відрізка.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку $[a, b]$ потрібно обчислити значення функції в усіх критичних точках I роду, які належать відрізку $[a, b]$, і в точках $x = a$, $x = b$ (кінцях відрізка), після чого серед цих значень вибрати найбільше і найменше. Це і будуть відповідно M і m .

7.5. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційовних функцій, якщо є невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

або

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right),$$

де a – число або один із символів $\infty, +\infty, -\infty$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)},$$

якщо границя справа існує (не обов'язково скінченна).

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Аналогічне правило має місце і для односторонніх границь.

Приклад 1. Виконати загальне дослідження функції

$$y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

1 а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

2 Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b, \quad (1)$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx), \quad (2)$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y(x)$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \infty. \quad (3)$$

Оскільки функція елементарна і областю визначення функції є вся числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

3 Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а) $y' = 0$; б) y' не існує.

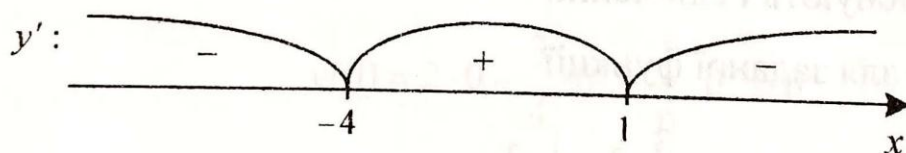
а) $y' = 0$: $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки

$x = -4$ та $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

4 Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = -\frac{3}{2} - x.$$

Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких:

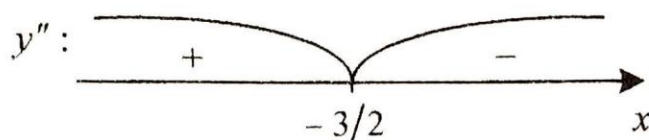
а) $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y'' = 0: -\frac{3}{2} - x = 0, x = -\frac{3}{2}$.

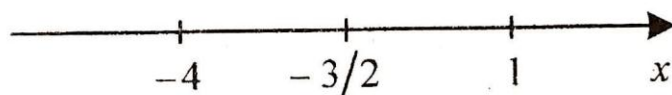
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x = -\frac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



5 Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty; -4)$, $(-4; -1,5)$, $(-1,5; 1)$, $(1; +\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'' , використовуємо результати досліджень у пунктах **3** та **4**.

x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -1,5)$	$-1,5$	$(-1,5; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	0	+		+	0	-
y''	+		+	0	-		-
y	$\searrow \cup$	min $y(-4) = -9\frac{1}{3}$	$\nearrow \cup$	т. п. $y(-1,5) = -4\frac{1}{8}$	$\nearrow \cap$	max $y(1) = 1\frac{1}{12}$	$\searrow \cap$

Позначення:

↘ – функція спадає;

↗ – функція зростає;

∪ – графік угнутий;

∩ – графік опуклий;

т.п. – точка перегину графіка.

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів **1**, **2**, **5**.

