

Розділ 4. ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Функції однієї змінної та їх властивості

Нехай X – непорожня множина дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине число y , то кажуть, що задано функцію f з областю визначення X . Для позначення функції використовують запис $y = f(x)$. При цьому x називають незалежною змінною або аргументом функції f , y – залежною змінною або значенням функції в точці x . Область визначення X позначають $D(f)$, а множину значень – $E(f) = \{y : y = f(x), x \in X\}$.

Послідовністю називають функцію з областю визначення $X = \{1, 2, \dots\}$. Позначають послідовність символом $\{x_n\}$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок площини xOy з координатами $(x; f(x))$, де $x \in D(f)$.

Якщо функціональна залежність y від x задана рівнянням $y = f(x)$, з якого можна виразити x як функцію змінної y – $x = \varphi(y)$, то функцію $x = \varphi(y)$ називають оберненою до функції $y = f(x)$ і позначають $x = f^{-1}(y)$. Тут y – незалежна змінна, а x – залежна. Якщо перепозначити звичним чином залежну і незалежну змінні, то графіки функцій $f(x)$ та $f^{-1}(x)$ будуть симетричними відносно прямої $y = x$.

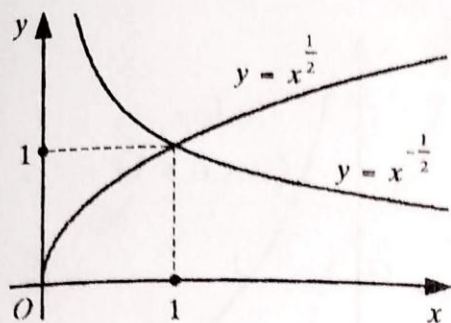
Основними елементарними функціями називають наступні функції:

1) Стала функція $y = c$, $c \in R$.

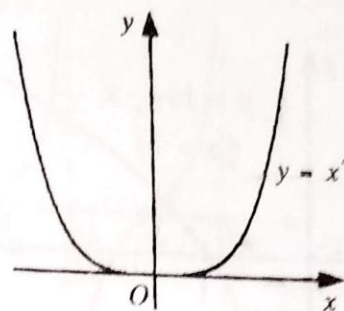
$$D(f) : x \in R; \quad E(f) : y \in \{c\}.$$

2) Степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$ (рис. 1).

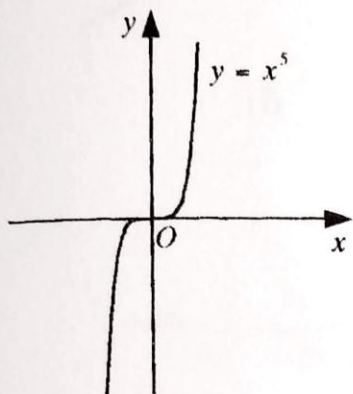
Область визначення та множина значень степеневі функції залежать від значення показника α : наприклад, при цілому додатному α $D(f) : x \in (-\infty, +\infty)$; при цілому від'ємному α $D(f) : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



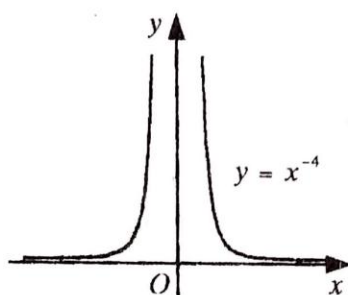
а)



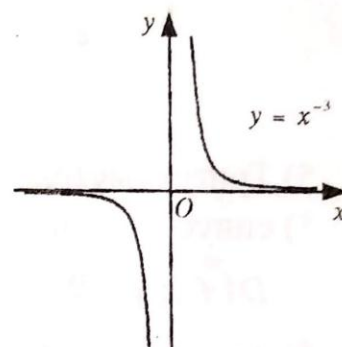
б)



в)



г)

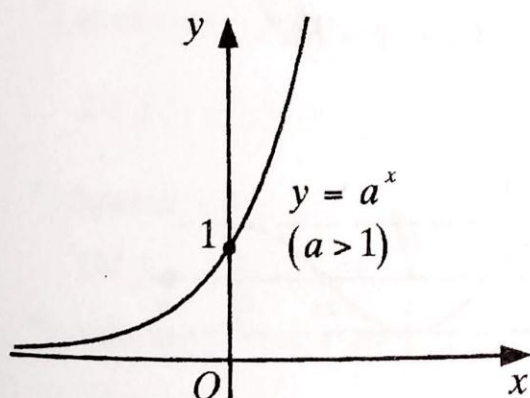


д)

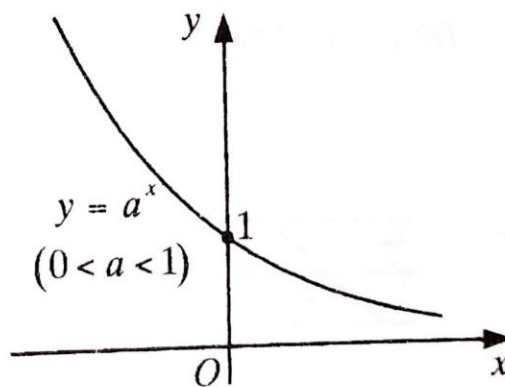
Рис. 1

3) Показникова функція $y = a^x$, де $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 2).

$D(f): x \in \mathbb{R}$; $E(f): y \in (0, +\infty)$.



а)

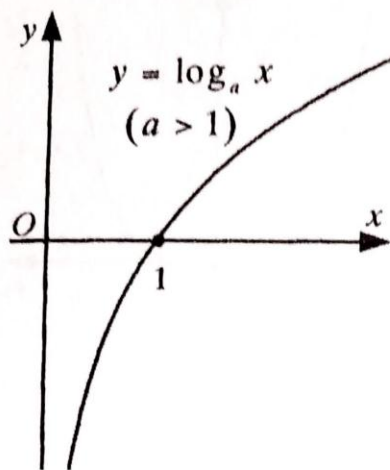


б)

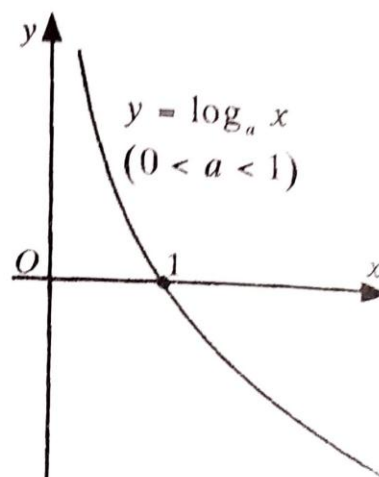
Рис. 2

4) Логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 3).

$D(f): x \in (0, +\infty)$; $E(f): y \in \mathbb{R}$.



а)



б)

Рис. 3

5) Тригонометричні функції:

*) синус $y = \sin x$ (рис. 4 а).

$$D(f): x \in \mathbb{R}; \quad E(f): y \in [-1, 1];$$

*) косинус $y = \cos x$ (рис. 4 б).

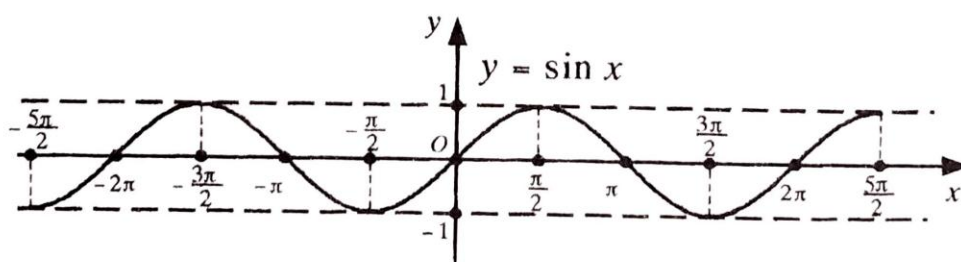
$$D(f): x \in \mathbb{R}; \quad E(f): y \in [-1, 1];$$

*) тангенс $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 4 в).

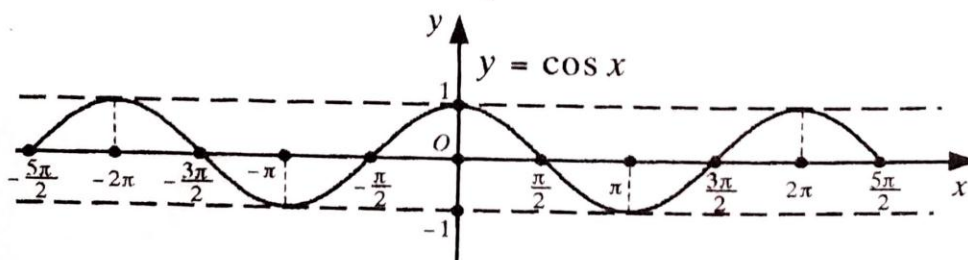
$$D(f): x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}; \quad E(f): y \in \mathbb{R};$$

*) котангенс $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 4 г).

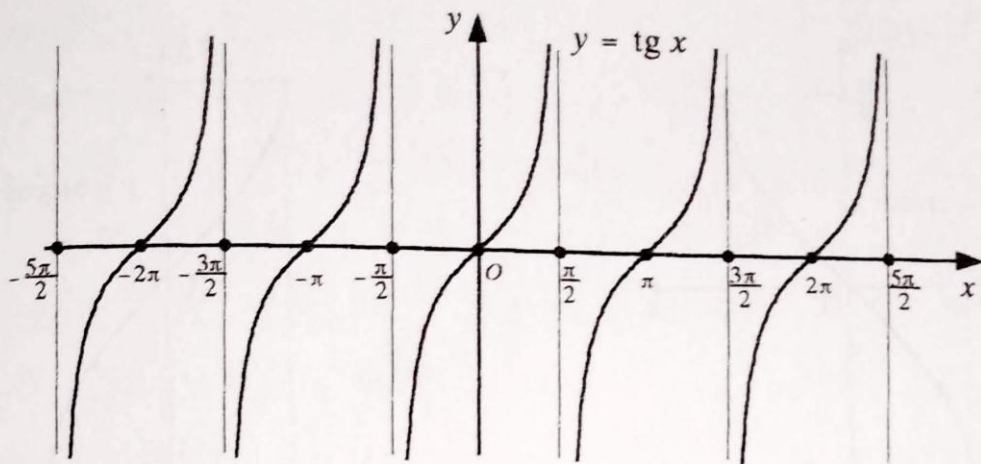
$$D(f): x \in (\pi k, \pi + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}; \quad E(f): y = \mathbb{R}.$$



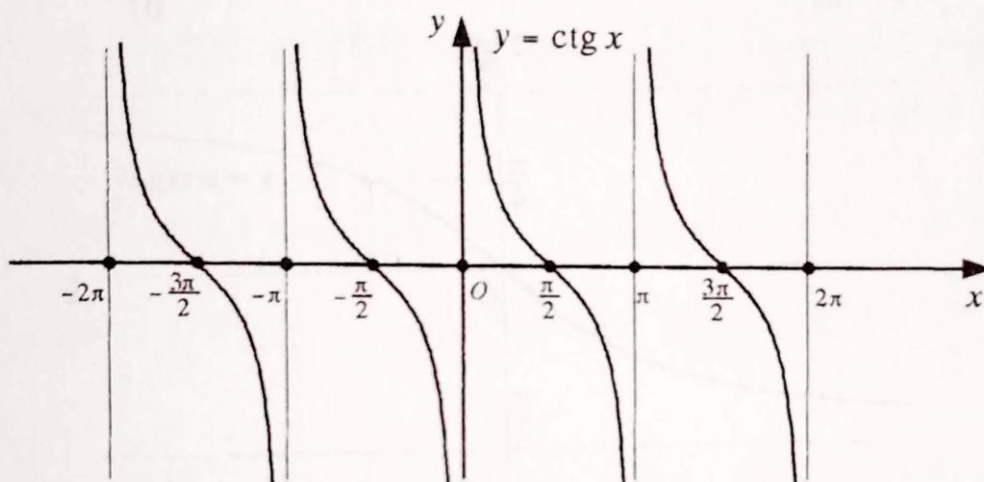
а)



б)



В)



Г)

Рис. 4

б) Обернені тригонометричні функції:

*) арксинус $y = \arcsin x$ (рис. 5 а).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

*) арккосинус $y = \arccos x$ (рис. 5 б).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in [0, \pi];$$

*) арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 5 в).

$$D(f): x \in \mathbb{R}; \quad E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

*) арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 5 г).

$$D(f): x \in \mathbb{R}; \quad E(f): y \in (0, \pi).$$

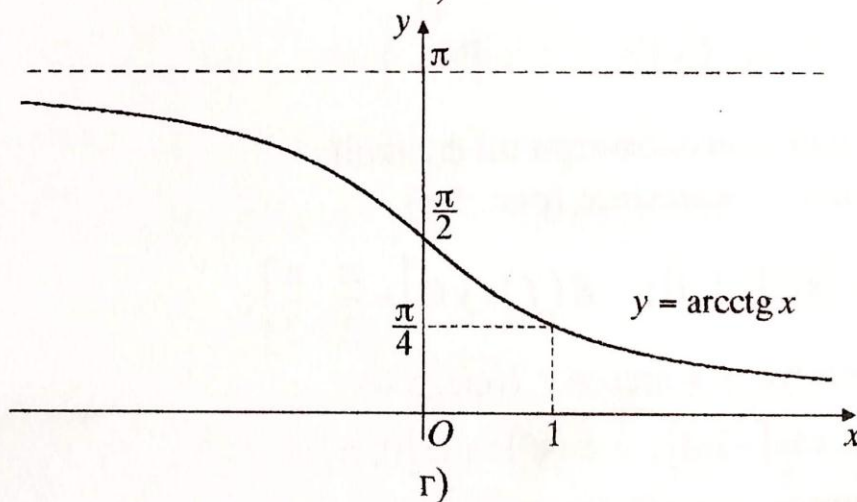
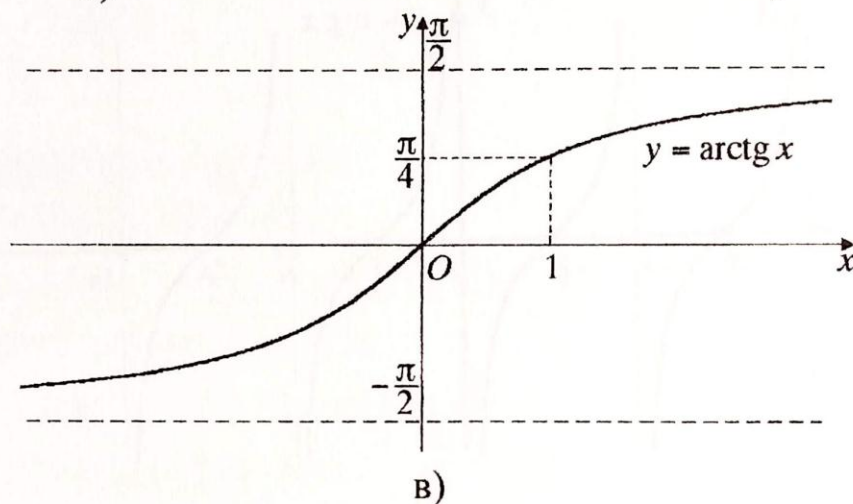
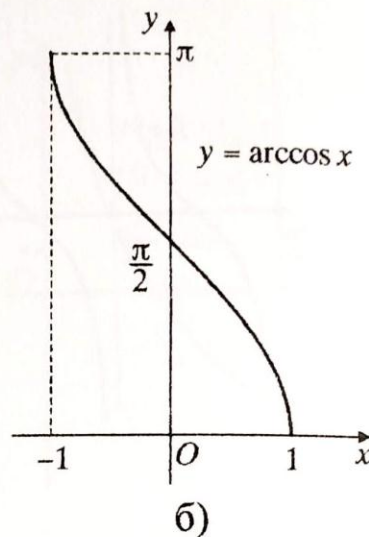
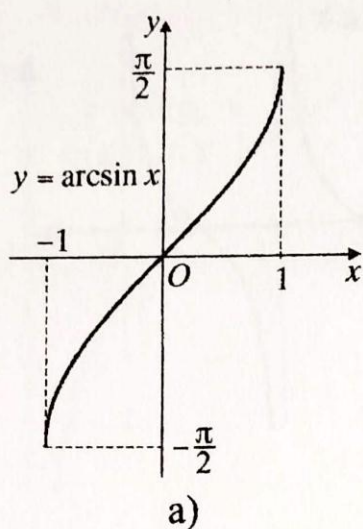


Рис. 5

Елементарними називають функції, що одержуються з основних елементарних функцій за допомогою операцій додавання, віднімання, множення, ділення та операції утворення складної функції, які застосовуються скінченну кількість разів. Операція утворення складної функції полягає у наступному: якщо $y = f(u)$, а $u = g(x)$, то функція $y = f(g(x))$ – складна (її ще називають *суперпозицією* функцій).

Функцію $f(x)$ називають *парною* (*непарною*), якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для довільного $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). Графік парної функції симетричний відносно осі Oy , графік непарної – відносно початку координат.

Функцію $f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(f)$:

- 1) $(x+T) \in D(f)$;
- 2) $f(x+T) = f(x)$.

Число T при цьому називають *періодом* функції $f(x)$, а найменше додатне число T_0 , для якого виконуються вказані умови – *основним періодом* функції.

Якщо основний період функції $y = f(x)$ дорівнює T_0 , то основний період функції $y = f(kx+b)$ знаходиться за формулою $T = \frac{T_0}{k}$.

3. Границя функції

Число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число N_0 , що для всіх $n > N_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається* до числа a . Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ або $x_n \rightarrow a$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0 , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

Число A називають *границею функції при* $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $|x| > \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow \infty$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \rightarrow x_0$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, то функцію $f(x)$ називають *нескінченно*

великою при $x \rightarrow x_0$. Запис $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ означає, що для довільного (як завгодно великого) числа $M > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для всіх значень x таких, що $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Властивості нескінченно малих:

1) Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$, то їх сума $f_1(x) + f_2(x)$ також є нескінченно малою при $x \rightarrow x_0$.

2) Якщо функція $f(x)$ нескінченно мала при $x \rightarrow x_0$, а функція $g(x)$ – обмежена, то їх добуток $f(x)g(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \rightarrow x_0$.

Властивості нескінченно великих:

1) Якщо при $x \rightarrow x_0$ функція $f(x)$ – нескінченно велика, а функція $g(x)$ має границю, то нескінченно великими при $x \rightarrow x_0$ є:

сума $f(x) + g(x)$; добуток $g(x) \cdot f(x)$; частка $\frac{f(x)}{g(x)}$.

2) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі при $x \rightarrow x_0$, то їх добуток теж є нескінченно великою.

3) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ – нескінченно великі одного знаку при $x \rightarrow x_0$, то їх сума теж є нескінченно великою.

Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими:

1) Якщо $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ – нескінченно велика функція, то функція $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала.

2) Якщо при $x \rightarrow x_0$ функція $\alpha(x)$ нескінченно мала і не перетворюється в нуль, то функція $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика.

При обчисленні границь зручно використовувати ряд їх властивостей:

1° (арифметичні властивості границь).

Якщо існують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$б) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

зокрема,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot g(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$в) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\text{якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0).$$

2° (границя суперпозиції функцій).

Якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ та $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = A$, то існує також границя складної функції $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$. Дану рівність можна записати також у вигляді: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow a} f(y)$. На цій формулі ґрунтується обчислення границь методом заміни змінної, якщо покласти $y = g(x)$.

При обчисленні границь зручно користуватись тим, що коли x_0 належить області визначення елементарної функції $f(x)$, то (див. підрозділ 5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1)$$

Більш загально: якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, де a належить області визначення елементарної функції f , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right), \quad (2)$$

де x_0 — число або один із символів ∞ , $+\infty$, $-\infty$.

Використовуються також границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{перша визначна границя});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (\text{друга визначна границя}).$$

Правила обчислення границь

невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

Поряд з такою невизначеністю зустрічаються й інші, наприклад, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ тощо. Якщо при обчисленні границі виникає одна з невизначеностей, то процес обчислення границі називають ще *розкриттям невизначеності*. Зручно класифікувати границі в залежності від типу невизначеності і розглядати відповідні методи розкриття невизначеностей у вигляді правил.

Правило 1. Для того щоб знайти границю дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \rightarrow x_0$ чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$), потрібно скоротити дріб на $(x - x_0)$ і перейти до границі.

Застосування правила 1 ґрунтується на розкладі чисельника та знаменника дробу на множники. Для цього можна скористатись, наприклад, формулами скороченого множення

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2; \quad (a)$$

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a); \quad (b)$$

$$x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \quad (c)$$

або формулою розкладу квадратного тричлена на множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (d)$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Правило 2. Для того щоб знайти границю функції, яка є часткою двох ірраціональних функцій, у випадку, коли при $x \rightarrow x_0$ чисельник і знаменник прямують до нуля (невизначеність $\frac{0}{0}$), потрібно помножити чисельник та знаменник дробу на вираз спряжений до кожного ірраціонального виразу, скоротити після цього дріб на $(x - x_0)$ і перейти до границі.

Правило 3. Для обчислення границі частки двох многочленів при $x \rightarrow \infty$ (невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$) потрібно поділити чисельник та знаменник дробу на найвищий степінь змінної, що зустрічається під

знаком границі, та скористатись тим, що всі функції вигляду $\frac{a}{x^n}$ ($a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) при $x \rightarrow \infty$ є нескінченно малими.