

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Пряма на площині

Є кілька типів рівнянь прямої на площині. В залежності від умови задачі, зручно скористатись для її розв'язання тим чи іншим типом рівняння.

а) Загальне рівняння прямої на площині

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

У прямокутній декартовій системі координат пряма (1) перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B)$, який називають *нормальним вектором* прямої.

б) Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B)$

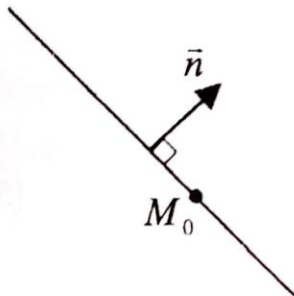


Рис. 1

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2)$$

в) Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (l; m)$

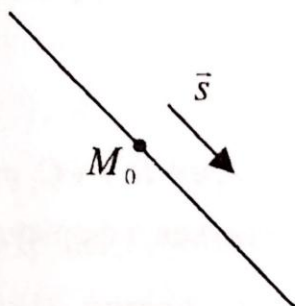


Рис. 2

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (3)$$

г) Рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$

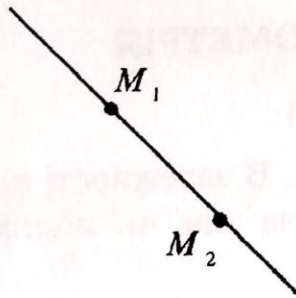


Рис. 3

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4)$$

Зауваження. Якщо $x_1 = x_2$, то рівняння прямої має вигляд $x = x_1$; аналогічно при $y_1 = y_2$ рівняння прямої має вигляд $y = y_1$.

д) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

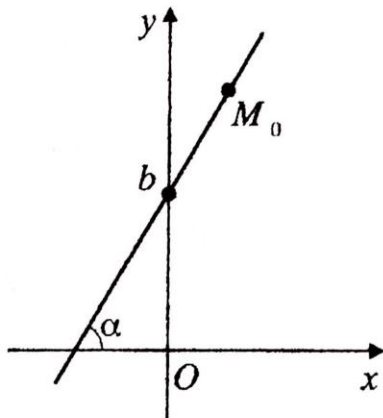


Рис. 4

$$y = kx + b, \quad (5)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт.

е) Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (6)$$

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (8)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (9)$$

(при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ прямі паралельні, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямі співпадають).

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то один з кутів між ними знаходиться з формули

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (10)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$k_1 k_2 = -1. \quad (11)$$

Умова паралельності прямих:

$$k_1 = k_2. \quad (12)$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюють за формулою

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (13)$$

2. Площина у просторі

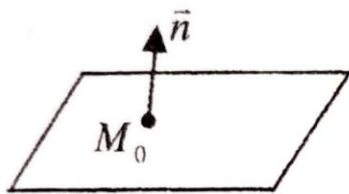
Є кілька типів рівнянь площини у просторі.

а) Загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (14)$$

У прямокутній декартовій системі координат площина (14) перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A; B; C)$, який називається *нормальним вектором* площини.

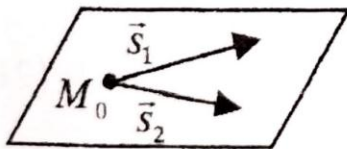
б) Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (15)$$

Рис. 12

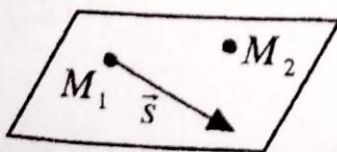
в) Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно неколінеарним векторам $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Рис. 13

г) Рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ паралельно вектору $\vec{s} = (l; m; n)$



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Рис. 14

д) Рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$

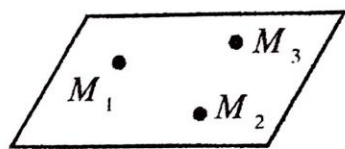


Рис. 15

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Один з кутів φ між двома площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ знаходиться як кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ з формули

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (19)$$

Умова перпендикулярності площин – перпендикулярність їх нормальних векторів $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (20)$$

Умова паралельності площин – паралельність їх нормальних векторів:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (21)$$

(при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ площини паралельні, при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ площини співпадають).

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюють за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (22)$$

3. Пряма у просторі

Є декілька типів рівнянь прямої у просторі.

а) Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (l; m; n)$, який називається напрямним вектором прямої:

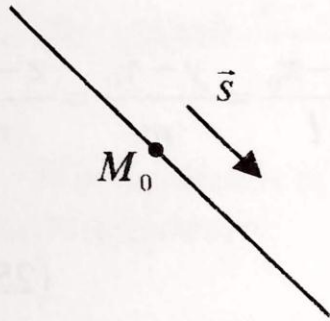


Рис. 18

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (23)$$

Рівняння (23) називають канонічними рівняннями прямої у просторі.

У параметричній формі ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad t \in R. \end{cases}$$

б) Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$

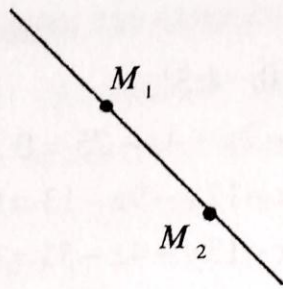


Рис. 19

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (24)$$

У параметричній формі рівняння (24) мають вигляд

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in R. \end{cases}$$

в) Лінією перетину площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ є пряма. Загальними рівняннями цієї прямої називаються рівняння

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Відстань від точки P до прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|\vec{M_0P} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}, \quad (25)$$

де $\vec{s} = (l; m; n)$ – напрямний вектор прямої, M_0 – будь-яка точка на прямій, наприклад точка з координатами $(x_0; y_0; z_0)$.

Кут між прямими $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ знаходиться як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$ з формули

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (26)$$

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться з формули

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (27)$$