

2.1.1. Поняття вектора

Узагальнимо поняття про вектори, які відомі зі шкільного курсу математики.

Під **вектором** розуміють відрізок, на якому зазначено напрям. Якщо A і B — дві точки, то вектор $\overrightarrow{AB}$ (напрямок від A до B ; A — початок вектора, B — його кінець) відрізняється від вектора $\overrightarrow{BA}$ (напрямок від B до A ; B — початок вектора, A — його кінець).

Позначатимемо вектори літерами зі стрілками: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і т. д. Якщо треба підкреслити, що точка A — початок вектора, а точка B — його кінець, писатимемо $\overrightarrow{AB}$. Графічно вектор зображується відрізком зі стрілкою (рис. 2.1).

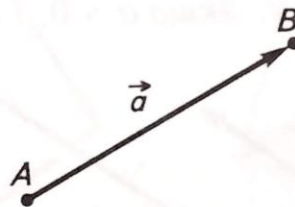


Рис. 2.1

⇒ **Означення 2.1.** Відстань між початком вектора та його кінцем називають **довжиною (або модулем) вектора**. Довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають $|\overrightarrow{AB}|$, вектора $\vec{a}$ — $|\vec{a}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають **нульовим** і позначають $\vec{0}$. Можна вважати, що нульовий вектор має довільний,

наперед вибраний напрям, а його довжина дорівнює нулю, тобто $|\vec{0}| = 0$.

➤ **Означення 2.2.** Вектори називають **колінеарними**, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих.

Компланарними називають вектори, які лежать в одній площині.

➤ **Означення 2.3.** Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **рівними**, якщо вони мають однакові довжину й напрям; при цьому пишуть $\vec{a} = \vec{b}$.

Таким чином, не розрізняються вектори, що мають однакові напрями й довжини, але розташовані в різних частинах простору. Інакше кажучи, вектор можна переносити паралельно самому собі, розміщуючи його початок у будь-якій точці простору. Такі вектори називають **вільними**.

➤ **Означення 2.4.** **Ортом** даного вектора $\vec{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора $\vec{a}$. Орт вектора $\vec{a}$ позначають $\vec{a}_0$, причому $|\vec{a}_0| = 1$ і $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_0$.

2.1.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами є операції (дії) їх додавання та множення дійсного числа на вектор.

➤ **Означення 2.5.** **Добутком** числа α на вектор $\vec{a}$ називають вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, що має довжину $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$, і напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$ (рис. 2.2).

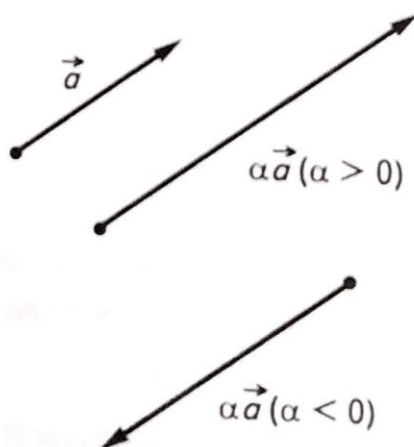


Рис. 2.2

- **Означення 2.6.** Протилежним вектором $(-\vec{a})$ називають добуток числа (-1) на вектор $\vec{a}$, тобто $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.
- **Означення 2.7.** Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець — із кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило трикутника (рис. 2.3)).

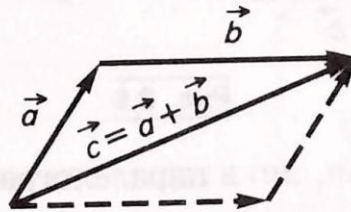


Рис. 2.3

Вектор $\vec{c}$, очевидно, є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (правило паралелограма (рис. 2.3)).

Сума векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ знаходиться послідовно: спочатку додаються вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, потім до їх суми $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ додається вектор $\vec{a}_3$ і т. д.

Сумою кількох векторів є вектор, що сполучає початок першого вектора й кінець останнього за умови, що початок кожного наступного вектора збігається з кінцем попереднього (правило многокутника (рис. 2.4)).

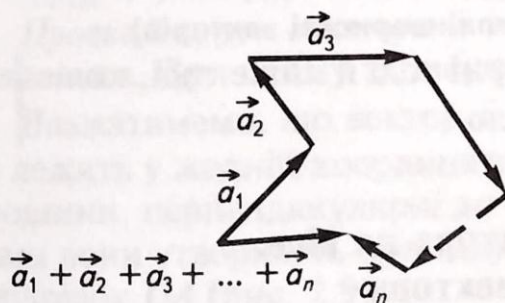


Рис. 2.4

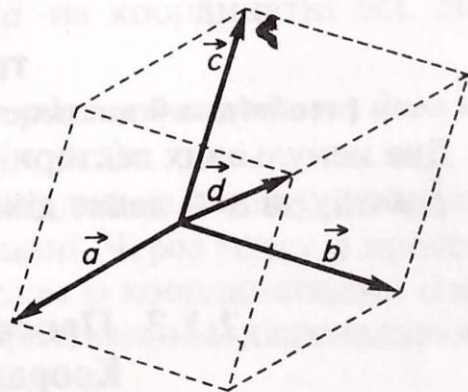


Рис. 2.5

Якщо від однієї точки в просторі відкласти три некомпланарних вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, то неважко переконатися, що вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ буде діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, котрі не лежать в одній площині або в паралельних площинах (правило паралелепіпеда (рис. 2.5)).

➔ **Означення 2.8.** Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають суму вектора $\vec{a}$ й вектора $(-\vec{b})$, протилежного $\vec{b}$ (рис. 2.6).

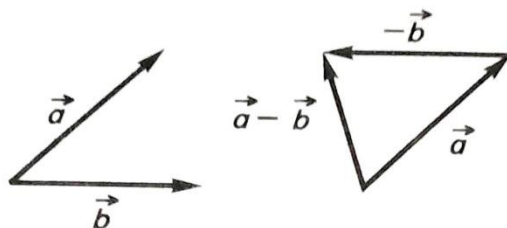


Рис. 2.6

Неважко переконатися, що в паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, одна діагональ є сумою цих векторів, а інша — їх різницею (на рис. 2.7 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$).

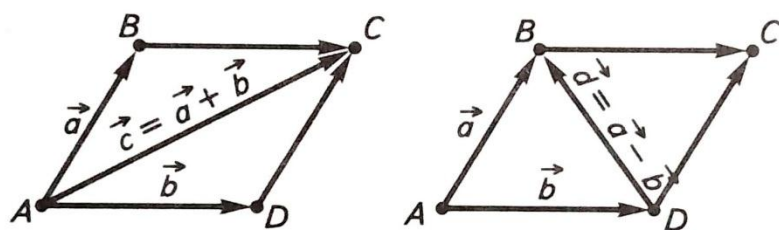


Рис. 2.7

ТЕОРЕМА 2.1

(необхідна й достатня умова колінеарності векторів)

Два ненульових вектори колінеарні тоді й лише тоді, коли $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, де α — деяке дійсне число.

2.1.3. Проекція вектора на вісь. Координати вектора

Нехай задано два вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$. Кутом φ між ними називають кут AOB , на який потрібно повернути один із векторів, щоб його напрям збігся з напрямом іншого вектора. Вважають, що $0 \leq \varphi \leq \pi$. Якщо початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не збігаються, то кутом між ними називають кут між векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, де $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки A і B прямі, перпендикулярні до вектора $\vec{b}$. Позначимо точки перетину цих прямих із вектором $\vec{b}$ через A' і B' (рис. 2.8).

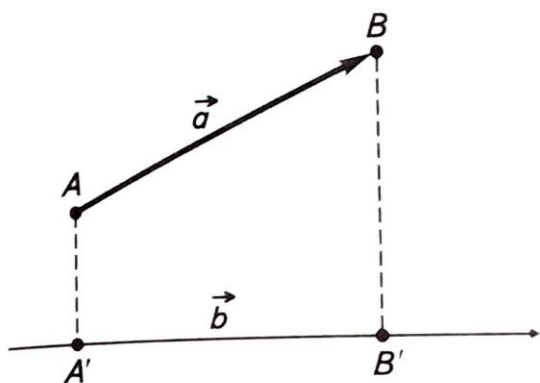


Рис. 2.8

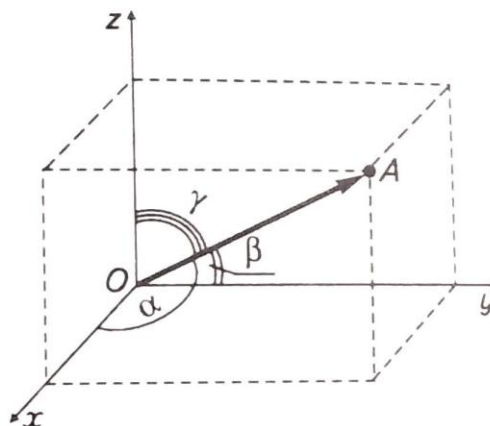


Рис. 2.9

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на напрям вектора $\vec{b}$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$, помноженій на косинус кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

Нехай у просторі задано систему координат $Oxyz$ і довільний вектор $\vec{a}$. Розглянемо проєкції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Нехай $x = \text{пр}_{Ox} \vec{a}$, $y = \text{пр}_{Oy} \vec{a}$ і $z = \text{пр}_{Oz} \vec{a}$.

Проекції x , y , z вектора $\vec{a}$ на осі координат називають його **координатами**. При цьому записують $\vec{a} = (x, y, z)$.

Вважатимемо, що вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ виходить із початку координат і не лежить у жодній координатній площині. Через точку A проведемо площини, перпендикулярні до осей. Разом із координатними площинами вони утворюють прямокутний паралелепіпед, діагоналлю якого є відрізок OA (рис. 2.9).

Оскільки квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів, то

$$|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

тобто

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Позначимо через α, β, γ кути між вектором $\vec{a}$ та осями координат. Оскільки координати вектора $x = |\vec{a}| \cos \alpha$, $y = |\vec{a}| \cos \beta$, $z = |\vec{a}| \cos \gamma$, то $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ називають **напрямними косинусами вектора $\vec{a}$** . Їх обчислюють за формулами

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Піднісши до квадрата ліву й праву частини кожної рівності та додавши їх почленно, матимемо

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

2.3

Вимірність і базис лінійного простору

Нехай задано m векторів векторного простору R^n : $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$. Задану множину називатимемо **системою m векторів**.

➤ **Означення 2.13.** Вектор $\vec{a}$ називають **лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$** , якщо для деяких дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ справджується рівність

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m. \quad (2.11)$$

➤ **Означення 2.14.** Систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторного простору R^n називають **лінійно залежною**, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не всі одночасно рівні нулю, що виконується рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0}. \quad (2.12)$$

У протилежному разі вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називають **лінійно незалежними**.

ТЕОРЕМА 2.2

Система векторів лінійно залежна тоді й лише тоді, коли хоча б один із них є лінійною комбінацією інших.

Доведення

Необхідність. Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ лінійно залежна, то хоча б один із коефіцієнтів у рівності (2.12) ненульовий.

Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Тоді $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \vec{a}_3 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \vec{a}_m$, тобто вектор $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших векторів.

Достатність. Якщо який-небудь вектор, наприклад $\vec{a}_1$, є лінійною комбінацією інших векторів, то виконується рівність

$$\vec{a}_1 = \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m.$$

Перепишемо її у вигляді

$$\vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2 - \alpha_3 \vec{a}_3 - \dots - \alpha_m \vec{a}_m = 0.$$

Отже, нетривіальна лінійна комбінація даних векторів дорівнює нулю, тобто система векторів лінійно залежна.

Теорему доведено.

➡ **Означення 2.15.** *Базисом векторного простору R^n називають довільну систему n лінійно незалежних векторів.*

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n. \quad (2.13)$$

Рівність (2.13) називають *розкладом вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$* , а числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ — *координатами вектора $\vec{a}$ в цьому базисі*.

§ 3. ВЕКТОРИ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ

3.1. Координати, довжина і напрямні косинуси вектора

Для того щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглядатимемо вектори в системі координат.

1. *Координати вектора.* Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ (п. 1.3), де числа a_x, a_y, a_z — координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. Але з властивостей проекції (п. 1.4) випливає, що

$$a_x = \text{про}_x \vec{a}, \quad a_y = \text{про}_y \vec{a}, \quad a_z = \text{про}_z \vec{a}. \quad (16)$$

Отже, координати вектора в системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат.

2. *Довжина вектора.* Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.27) з вимірами $|a_x|, |a_y|, |a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (17)$$

Якщо початок вектора $\vec{a} = \vec{AB}$ (рис. 2.28) міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець — в точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то з формул (2) і (16) випливає, що $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$, тобто

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (18)$$

Тоді з формули (17) знаходимо довжину вектора $\vec{AB}$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (19)$$

Цією формулою користуються для знаходження відстані між точками A і B .

3. *Напрямні косинуси вектора.* Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається кутами α, β, γ , які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис. 2.27):

$$\alpha = (\vec{a}, \vec{i}), \quad \beta = (\vec{a}, \vec{j}), \quad \gamma = (\vec{a}, \vec{k}), \quad 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi.$$

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами*. Формули для напрямних косинусів дістаємо з формул (1) і (16):

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (20)$$

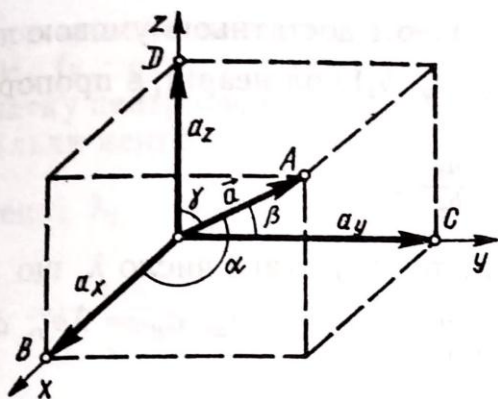


Рис. 2.27

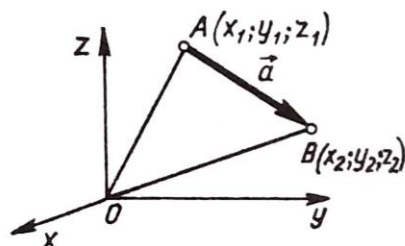


Рис. 2.28

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (20) до квадрата і підсумовуючи, з урахуванням формули (17) дістанемо

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (21)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

Приклади

1. Задано точки $A(0; -1; 2)$ і $B(-1; 1; 4)$.

Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\vec{AB}$.

○ З формул (18), (19) і (20) маємо $\vec{AB} = (-1; 2; 2)$; $|\vec{AB}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$; $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos \beta = \cos \gamma = \frac{2}{3}$. ●

2. Чи може вектор утворювати з осями координат кути $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$?

○ $\cos^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{5}{4} \neq 1$,

тому згідно з формулою (21) дістанемо на це запитання негативну відповідь. ●

3.2. Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів

1. *Дії з векторами.* Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами. Це випливає з властивостей 2^о, 3^о проєкцій (п. 1.4).

Нехай задано вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ і дійсне число λ , тоді $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$, $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$.

2. *Рівність векторів.* Нехай вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді з формул (1) і (16) випливає, що

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z \quad (22)$$

і навпаки, якщо мають місце формули (22), то $\vec{a} = \vec{b}$. Отже, всяка векторна рівність виду $\vec{a} = \vec{b}$ еквівалентна трьом скалярним рівностям (22).

3. Колінеарність векторів. Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ колінеарні, є пропорційність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (23)$$

Дійсно, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число λ , що $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, тоді з формул (22) дістаємо рівності $a_x = \lambda b_x$; $a_y = \lambda b_y$; $a_z = \lambda b_z$, з яких випливають формули (23).

3.3. Поділ відрізка в даному відношенні. Координати центра мас
Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M(x; y; z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ , тобто $|\vec{AM}| : |\vec{MB}| = \lambda$. Введемо радіуси-вектори $\vec{r}_1 = \vec{OA}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r} = \vec{OM} = (x; y; z)$, $\vec{r}_2 = \vec{OB} = (x_2; y_2; z_2)$ (рис. 2.29). Оскільки $\vec{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ і за умовою $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda}$. Прирівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, згідно з формулами (22) маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (24)$$

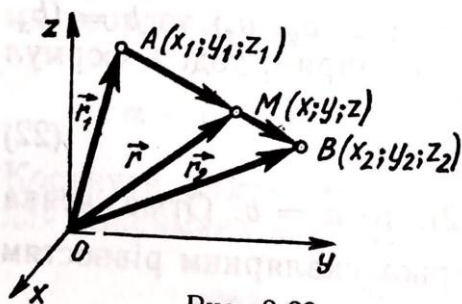


Рис. 2.29

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (25)$$

§ 4. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

4.1. Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (28)$$

де $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Оскільки за формулою (3) $|\vec{a}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, то з (28) маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (29)$$

Формули (29) виражають геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора.

Наведемо геометричні властивості скалярного добутку.

4°. Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, коли кут $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ — гострий, і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, коли кут $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ — тупий.

5°. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

6°. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad (31)$$

звідки

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (32)$$

Властивості 4°—6° безпосередньо випливають з формули (28).

Приклади

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{n} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{3}$.

○ Користуючись властивостями 1°—3°, маємо

$$\begin{aligned}\vec{m} \cdot \vec{n} &= (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} + 5\vec{b}) = 8\vec{a}^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 15\vec{b}^2 = \\ &= 8\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 15\vec{b}^2.\end{aligned}$$

Застосовуючи формули (28) і (31), знаходимо

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 8 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot 2^2 = -54. \bullet$$

2. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{3}$.

○ За формулою (32) дістанемо

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}. \bullet$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (33)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат

Вкажемо на ряд важливих висновків з формули (33).

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ є рівність

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (34)$$

2. Довжина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (35)$$

Формула (35) випливає з формул (32) і (33). В п. 3.1 цю формулу ми довели іншим способом.

3. Кут $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ між векторами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ визначається рівністю

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (36)$$

Ця формула є наслідком формул (28), (33) і (35).

§ 5. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

5.1. Означення і властивості векторного добутку

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

- 1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, де $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 3) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (п. 2.2).

Векторний добуток позначають одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}].$$

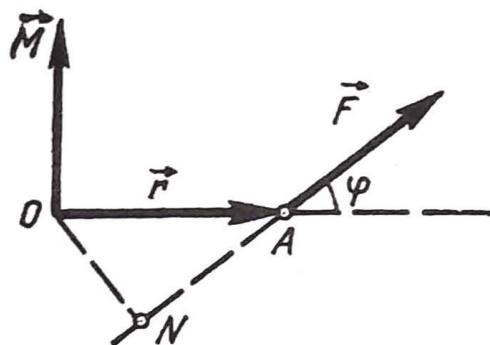


Рис. 2.31

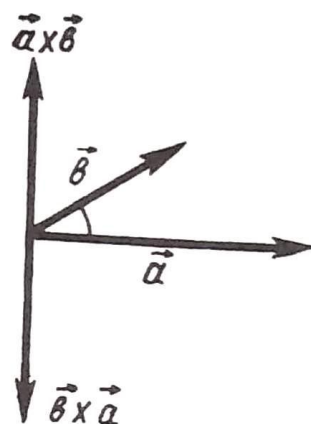


Рис. 2.32

Наведемо геометричні властивості векторного добутку.

4°. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

5°. Модуль $|\vec{a} \times \vec{b}|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (38)$$

5.2. Векторний добуток двох векторів, заданих координатами

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Покажемо, що векторний добуток вектора $\vec{a}$

на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Приклади

1. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1; 2; 0)$, $B(0; -2; 1)$, $C(-1; 0; 2)$.

○ Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$. Оскільки $\vec{AB} = (-1; -4; 1)$, $\vec{AC} = (-2; -2; 2)$ і за формулою (39)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 6\vec{k},$$

то за формулою (38) площа $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2}$. ●

§ 6. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

6.1. Означення і обчислення мішаного добутку

При множенні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, і векторний, результатом якого є вектор $\vec{a} \times \vec{b}$.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ — це скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$; його називають *мішаним добутком*

векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Цей добуток має чіткий геометричний зміст і широко використовується в задачах.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданих координатами:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z), \quad \vec{c} = (c_x; c_y; c_z).$$

Координати вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ визначаються за формулою (39):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Помноживши вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою (33) дістанемо

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (40)$$

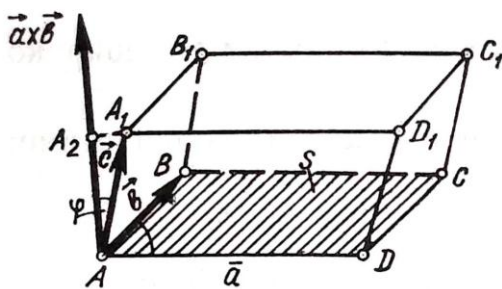


Рис. 2.33

4°. Модуль мішаного добутку $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, віднесених до спільного початку:

$$V = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|. \quad (41)$$

○ Візьмемо три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і побудуємо на цих векторах паралелепіпед (рис. 2.33). Об'єм цього паралелепіпеда $V = Sh$,

де S — площа основи, а h — висота. Але $S = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{a, b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $h = |\overline{AA_2}| = |\text{пр}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}|$, тому $V = |\vec{a} \times \vec{b}| |\text{пр}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$. ●

6°. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

○ Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$, то вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ і лежить з векторами $\vec{a}, \vec{b}$ в одній площині. Це означає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Навпаки, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, то можна вважати, що вони лежать в одній площині, тому $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$; $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ ●

Приклади

1. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A (2; -1; 0)$, $B (5; 5; 3)$, $C (3; 2; -2)$, $D (4; 1; 2)$.

○ Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD} , побудованого на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. То-

му за формулою (41) маємо

$$V = \frac{1}{6} | \vec{AB} \ \vec{AC} \ \vec{AD} |.$$

Знаходимо вектори $\vec{AB} = (3; 6; 3)$, $\vec{AC} = (1; 3; -2)$, $\vec{AD} = (2; 2; 2)$.
За формулою (40) дістанемо

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = 3. \quad \bullet$$

2. Довести, що точки $A (0; 1; 2)$, $B (-2; 0; -1)$, $C (-1; 5; 8)$, $D (1; 6; 11)$ лежать в одній площині.

○ Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори $\vec{AB} = (-2; -1; -3)$, $\vec{AC} = (-1; 4; 6)$, $\vec{AD} = (1; 5; 9)$.
Оскільки мішаний добуток

$$\vec{AB} \ \vec{AC} \ \vec{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

то за властивістю 6° вектори $\vec{AB}, \vec{AC}$ і $\vec{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині. ●