

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Дії над матрицями

Матрицею розміру $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел, в якій m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

або коротко $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Над матрицями виконують дії додавання, віднімання, множення, множення на число, транспонування.

Добуток матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число α – це матриця $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$, тобто кожен елемент матриці A слід помножити на α .

Сума (різниця) матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$ та $B = (b_{ij})_{m \times n}$ – це матриця $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ ($A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$), тобто для знаходження суми (різниці) матриць A і B слід додати (відняти) їх відповідні елементи. Сума та різниця визначені для матриць однакового розміру.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m \times p}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{p \times n}$ називають матрицю $C = AB$ розміру $m \times n$, елементи c_{ij} якої обчислюються за правилом: c_{ij} є сумою попарних добутків елементів i -го рядка матриці A та відповідних елементів j -го стовпця матриці B . Добуток AB визначений, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B . В загальному випадку $AB \neq BA$.

Транспонування матриці: якщо рядки матриці A записати як стовпці (зберігаючи порядок), то отриману матрицю називають *транспонованою* до матриці A і позначають A^T . Відзначимо, що якщо A – матриця розміру $m \times n$, то A^T – матриця розміру $n \times m$.

2. Визначник матриці

Визначник є числовою характеристикою квадратної матриці. *Визначником матриці A розміру 2×2 або визначником другого*

порядку називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1)$$

Визначником матриці A розміру 3×3 або визначником третього порядку називається число, яке обчислюється за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Формулу (2) називають *розкладом визначника* за елементами першого рядка. Слід запам'ятати лише принцип побудови правої частини формули (2): елемент a_{11} множимо на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 1-го стовпця; другий доданок беремо зі знаком “мінус” і множимо елемент a_{12} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 2-го стовпця; третій доданок беремо зі знаком “плюс” і множимо елемент a_{13} на визначник другого порядку, який дістаємо з визначника $|A|$ викреслюванням у ньому 1-го рядка і 3-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A називається число, яке дорівнює добутку $(-1)^{i+j}$ на визначник матриці, яка утворюється в результаті викреслювання у матриці A рядка з номером i та стовпця з номером j . Позначимо алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} через A_{ij} . Для матриці A розміру 3×3 маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Отже, формулу (2) можна записати у вигляді

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}. \quad (2')$$

Визначник четвертого порядку обчислюється за аналогічною до (2') формулою

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}, \quad (3)$$

де A_{1j} – відповідні алгебраїчні доповнення елементів a_{1j} першого

рядка матриці, тобто визначники третього порядку, помножені на $(-1)^{1+j}$.

Для обчислення визначників, порядок яких вищий за третій, доцільно використовувати деякі з їх властивостей.

1°. Визначник не зміниться, якщо до одного рядка (стовпця) додати інший, помножений на довільне число.

2°. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

3°. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні, тобто $|A^T| = |A|$.

3. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця і $|A| \neq 0$. Обернена матриця до матриці A обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}^T, \quad (4)$$

де $\tilde{A}$ – матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів матриці A . Матрицю $\tilde{A}$ називають *приєднаною* до A .

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ формула (4) набуває вигляду

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ приєднана матриця має вигляд

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Обернена матриця A^{-1} задовольняє співвідношення

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця. Для перевірки правильності знаходження оберненої матриці достатньо переконатися, наприклад, що $A^{-1}A = E$.

4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ має вигляд

[illegible]

Систему (7) можна записати у *матричному* вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица системы;}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{вектор-стовпець вільних членів};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор-стовпець невідомих.}$$

Набір значень невідомих $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ називають *розв'язком* системи (7), якщо при підстановці їх у рівняння системи всі рівняння перетворюються у тотожності. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо ж система не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

4.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Універсальним методом розв'язання систем лінійних рівнянь є *метод Гаусса*, який ще називають методом *послідовного виключення невідомих*. Цей метод ґрунтується на понятті *елементарних перетворень* системи, які полягають у наступному:

- 1) переставлення рівнянь системи;
- 2) множення рівнянь системи на довільні числа, відмінні від нуля;

3) додавання до одного рівняння системи іншого рівняння, помноженого на довільне число.

За допомогою елементарних перетворень систему (7) зводять до системи простішого ("східчастого") вигляду, яка *рівносильна* заданій (це означає, що розв'язки систем співпадають):

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \bar{a}_{11}x_1 & + & \dots & + & \bar{a}_{1n}x_n & = & \bar{b}_1 \\ & \bar{a}_{2k}x_k & + & \dots & + & \bar{a}_{2n}x_n & = & \bar{b}_2 \\ & & \bar{a}_{3l}x_l & + & \dots & + & \bar{a}_{3n}x_n & = & \bar{b}_3 \\ & & & \dots & & & \dots & & \\ & & & & \bar{a}_{rs}x_s & + & \dots & + & \bar{a}_{rn}x_n & = & \bar{b}_r \\ & & & & & & & 0 & = & \bar{b}_{r+1} \\ & & & & & & \dots & & \dots & & \\ & & & & & & & 0 & = & \bar{b}_m. \end{array} \right. \quad (8)$$

Можливі такі випадки.

1. Якщо система містить хибні рівності виду $0 = b_i$, де $b_i \neq 0$, то вона несумісна.

2. Нехай система (8) не містить рівностей виду $0 = b_i$ ($b_i \neq 0$). Тоді вона є сумісною. Тотожності виду $0 = 0$ відкидаємо. Припустимо, що $r < n$, тобто число рівнянь менше за число невідомих. Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_l, \dots, x_s$, з яких починаються перше, друге, ..., r -те рівняння, *основними*, а всі інші невідомі – *вільними*. Основних невідомих за означенням r . Надаючи вільним невідомим довільних значень і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r -го рівняння системи знайдемо x_s . Підставляючи це значення в перші $(r-1)$ рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, система має безліч розв'язків.

4.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь

матричним методом

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m = n$, тобто число рівнянь дорівнює числу невідомих. Запишемо систему у матричному вигляді (див. стор. 17)

$$AX = B. \quad (9)$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи рівнянь (9) можна знайти за формулою

$$X = A^{-1}B. \quad (10)$$

4.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь

за формулами Крамера

Нехай маємо систему рівнянь (7), в якій $m = n$. Якщо визначник матриці системи $\Delta = |A| \neq 0$, то розв'язок системи можна знайти за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – визначник матриці, що отримана з матриці A заміною i -го стовпця на стовпець вільних членів B .