

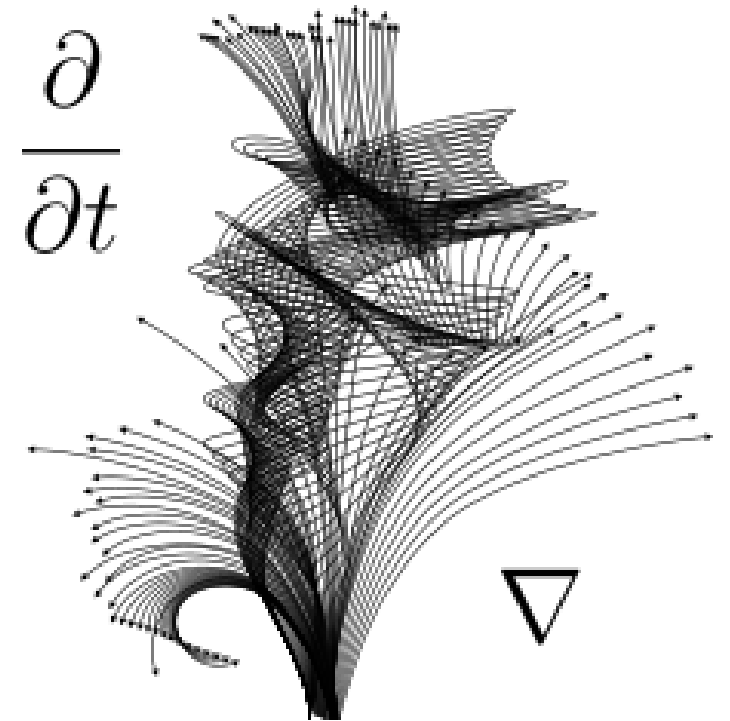
Диференціальні рівняння в MATLAB

Системи рівнянь.
Розв'язання звичайних диференціальних
рівнянь та їх систем.



Тема: Диференціальні рівняння в MATLAB. Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

1. Що таке диференціальні рівняння?
2. Символічне розв'язання ДР.
3. Чисельне розв'язання простого рівняння .
4. Символічне розв'язання системи рівнянь.
5. Чисельне розв'язання системи.
6. Приклад реальної моделі: маятник.
7. Модель Лотки-Вольтерри.
8. Рішення диференціальних рівнянь в часткових похідних (PDE).
9. Використання MATLAB для моделювання фізичних процесів.
10. Чисельне розв'язування нелінійних систем рівнянь.
11. Поглиблене використання ode45 для складних систем.



1.Що таке диференціальні рівняння?

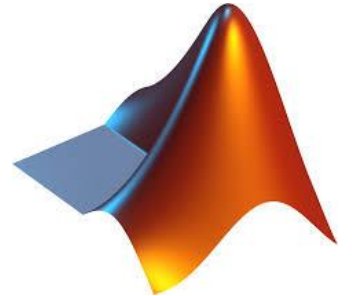
Диференціальне рівняння — це рівняння, в якому фігурують невідомі функції та їх похідні.

Вони описують динаміку зміни різних процесів: механічних, електричних, біологічних.

Чому MATLAB?

- Потужні вбудовані функції для аналітичного (`dsolve`) та чисельного (`ode45`, `ode23`, `ode15s`)

Графічне середовище Simulink для моделювання складних систем.



2.Символічне розв'язання ДР

- Функція `dsolve`:

- Використовується для аналітичного розв'язання ДР.

-

Приклад:

`syms y(t)`

- `ode = diff(y, t) + 4*y == exp(-t);`*

- `cond = y(0) == 1;`*

- *`ySol(t) = dsolve(ode, cond)`*

Отримуємо $y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t}$

`ySol(t) =`

`exp(-t)/3 + (2*exp(-4*t))/3`

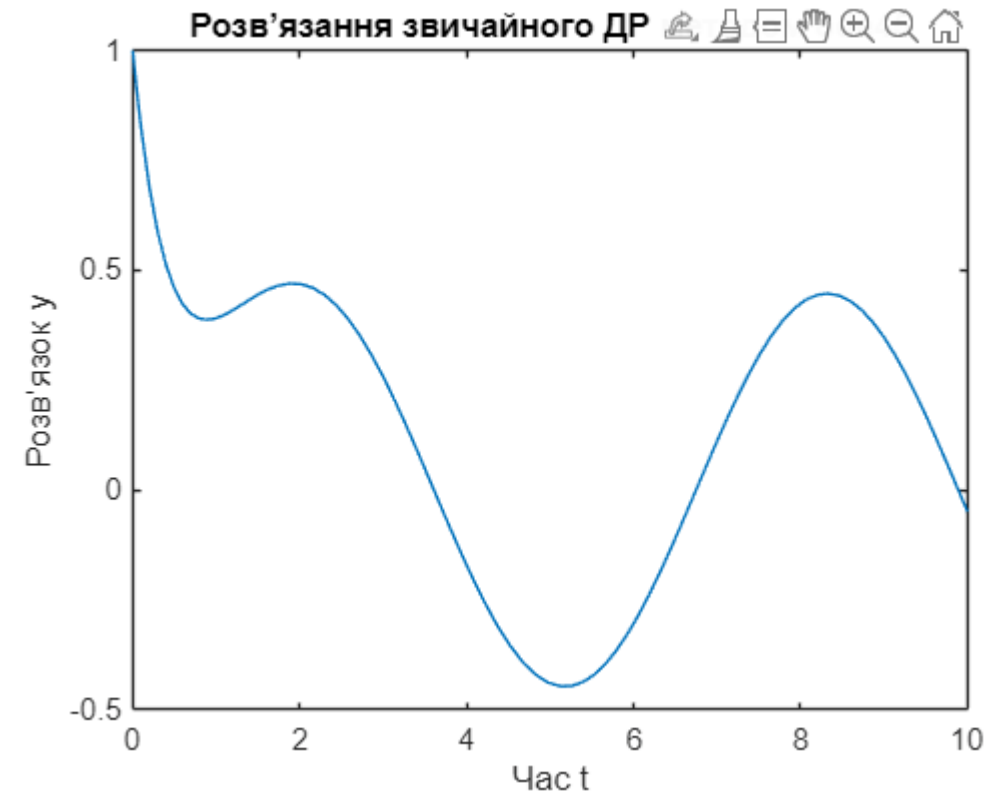
3.Чисельне розв'язання простого рівняння

В реальних задачах точний розв'язок знайти важко. Тому використовуємо `ode45` — чисельний метод.

- $f = @(t,y) -2*y + \sin(t);$
- $[t, y] = \text{ode45}(f, [0 \ 10], 1);$
- $\text{plot}(t, y)$
- $\text{xlabel}(\text{'Час } t'), \text{ylabel}(\text{'Розв'язок } y')$
- $\text{title}(\text{'Розв'язання звичайного ДР методом ode45'})$

`ode45` — метод Рунге-Кутти 4-5 порядку.

- Підходить для гладких розв'язків.



4.Символічне розв'язання системи рівнянь

- Система з двох рівня
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 3u + 4v \\ \frac{dv}{dt} = -4u + 3v \end{cases}$$

Код:

```
syms u(t) v(t)  
ode1 = diff(u) == 3*u + 4*v;  
ode2 = diff(v) == -4*u + 3*v;  
[uSol(t), vSol(t)] = dsolve([ode1, ode2])
```

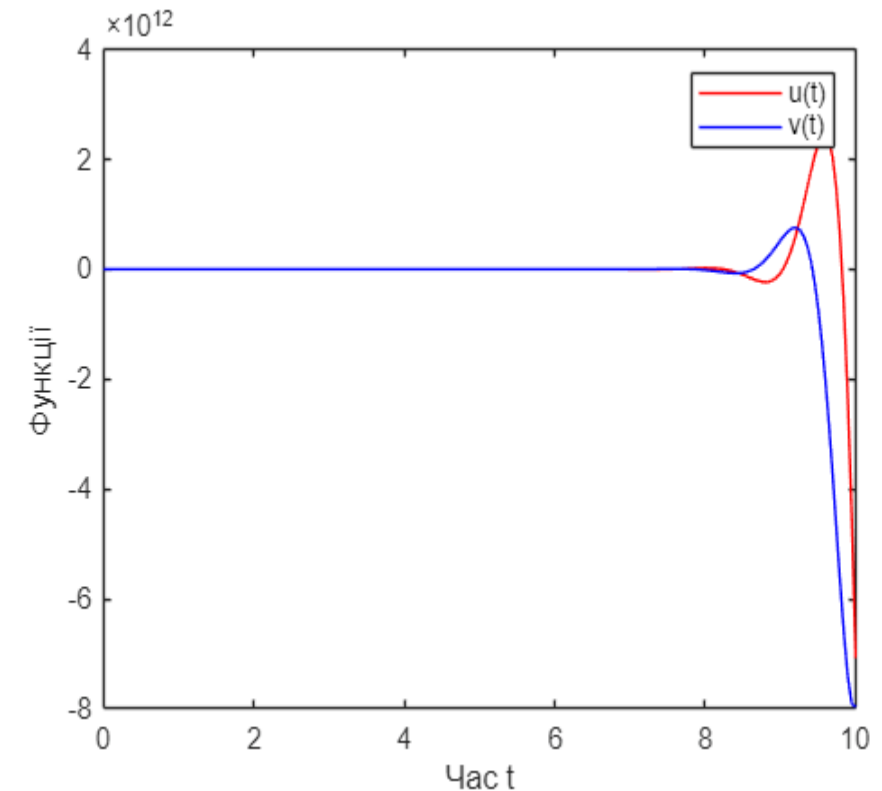
Скрін Command Window + розв'язок $u(t)$, $v(t)$

```
uSol(t) =  
C2*cos(4*t)*exp(3*t) + C1*sin(4*t)*exp(3*t)  
  
vSol(t) =  
C1*cos(4*t)*exp(3*t) - C2*sin(4*t)*exp(3*t)
```

5.Чисельне розв'язання системи

Код для чисельного розв'язання цієї ж системи:

```
f = @(t,y) [3*y(1) + 4*y(2); -4*y(1) + 3*y(2)];  
[t, y] = ode45(f, [0 10], [1; 0]);  
plot(t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b')  
legend('u(t)', 'v(t)')  
xlabel('Час t'), ylabel('Функції')
```



- Червона лінія — $u(t)$
- Синя лінія — $v(t)$

6.Приклад реальної моделі: маятник

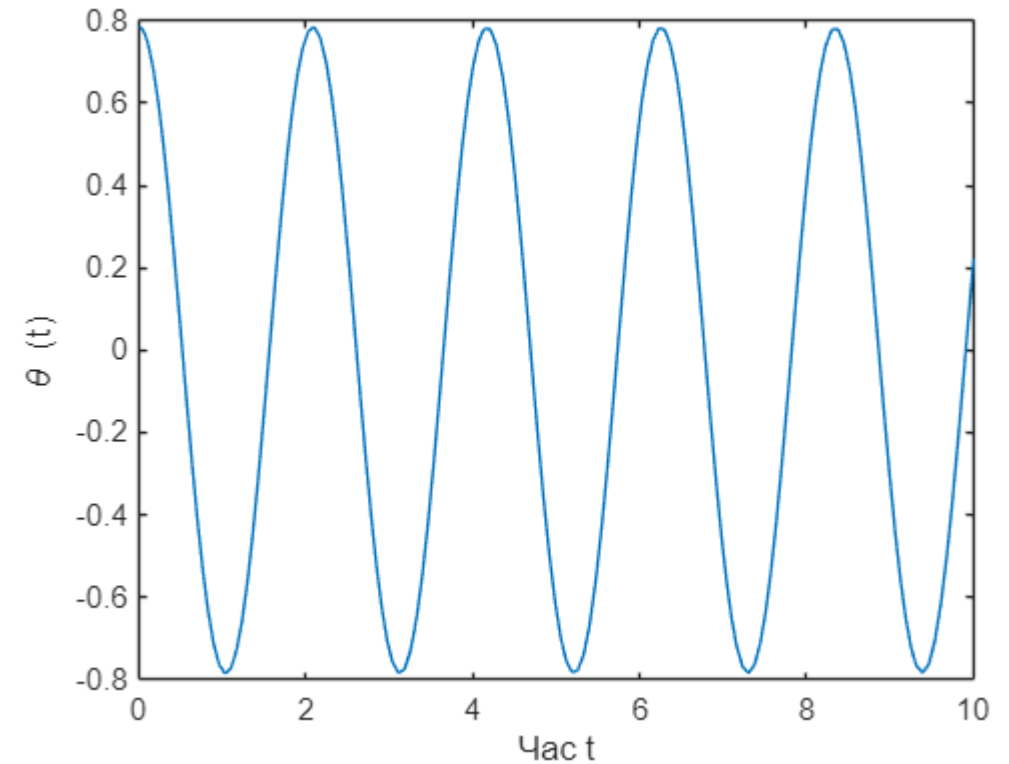
Рівняння коливань маятника

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Перетворимо у систему 1-го порядку:

```
g = 9.81; l = 1;  
f = @(t, y) [y(2); -(g/l)*sin(y(1))];  
[t, y] = ode45(f, [0 10], [pi/4; 0]);  
plot(t, y(:,1))  
xlabel('Час t'), ylabel('\theta (t)')
```

Скріншот моделювання маятника:



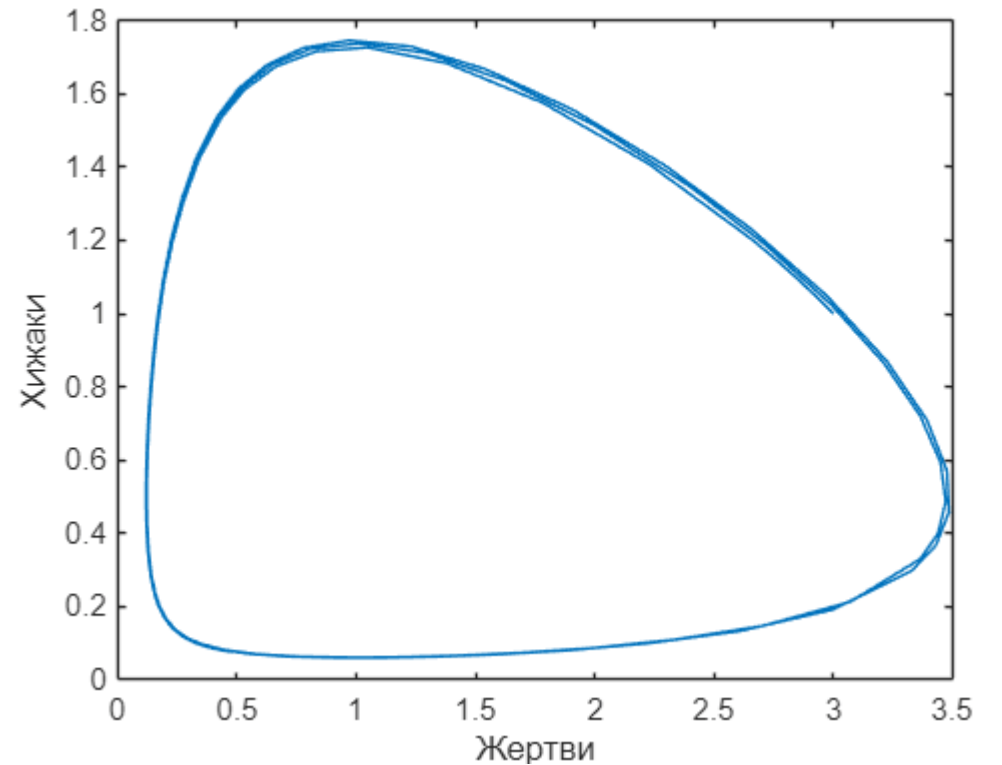
7. Модель Лотки-Вольтерри

Система "хижак-жертва":

```
a=1; b=2; c=1; d=1;  
f = @(t, y) [a*y(1) - b*y(1)*y(2); c*y(1)*y(2) - d*y(2)];  
[t, y] = ode45(f, [0 20], [3; 1]);  
plot(y(:,1), y(:,2))  
xlabel('Жертви'), ylabel('Хижак')
```

- Ось y — кількість хижаків
- Ось x — кількість жертв

Скріншот графіку траєкторії

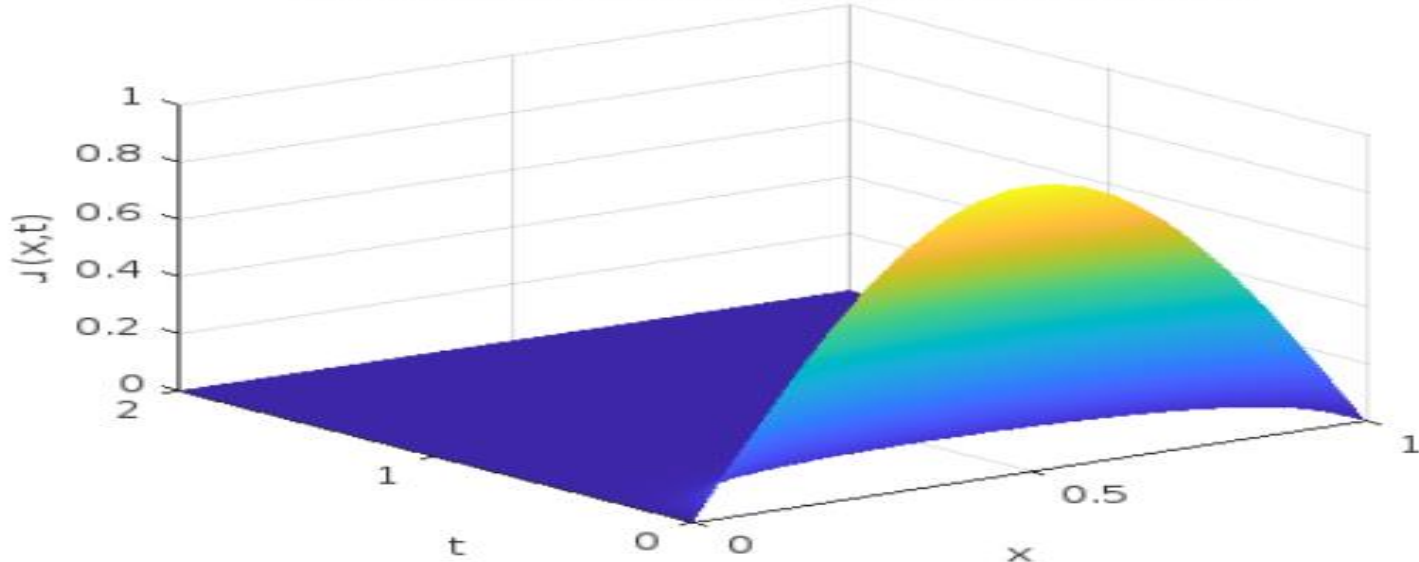


8. Рішення диференціальних рівнянь в часткових похідних (PDE)

Диференціальні рівняння в часткових похідних використовуються для моделювання процесів, які залежать від декількох змінних.

Наприклад, вони можуть описувати теплоперенос, хвилі або дифузію

Розв'язок рівняння теплопереносу



Код для розв'язання простого PDE в MATLAB:

```
% Просторова та часова сітка
x = linspace(0, 1, 20);
t = linspace(0, 2, 50);

% Початкові умови: u(x,0) = sin(pi*x)
u0 = @(x) sin(pi*x);

% f = DuDx, s = 0
pdefun% Опис PDE: c(x,t,u,DuDx)*du/dt =
% ∂/∂x(f(x,t,u,DuDx)) + s(x,t,u,DuDx)
% Тим: c = 1 = @(x,t,u,DuDx) deal(1, DuDx, 0);

% Крайові умови:
% при x = 0: u = 0
% при x = 1: u = 0
bcfun = @(xl,ul,xr,ur,t) deal(ul, 0, ur, 0);
% ul = 0 => pL = ul, qL = 0
% ur = 0 => pR = ur, qR = 0

% Розв'язок PDE
m = 0; % m = 0 для картезіанських координат
sol = pdepe(m, pdefun, u0, bcfun, x, t);

% Побудова графіку
surf(x, t, sol);
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u(x,t)');
title('Розв'язок рівняння теплопереносу');
shading interp;
```

9. Використання MATLAB для моделювання фізичних пр

Приклад: вертикальний рух тіла в полі тяжіння

```
% Параметри задачі
g = 9.81; % Прискорення вільного падіння (м/с^2)

% Опис системи рівнянь
motionODE = @(t, y) [y(2); -g];

% Початкові умови: початкова висота 0 м, початкова швидкість 50 м/с
y0 = [0; 50];

% Часовий інтервал
tspan = [0 10];

% Розв'язок
[t, y] = ode45(motionODE, tspan, y0);

% Побудова графіку висоти залежно від часу
plot(t, y(:,1));
xlabel('Час (с)');
ylabel('Висота (м)');
title('Вертикальний рух тіла в полі тяжіння');
grid on;
```

MATLAB дозволяє моделювати рух тіл під дією фізичних сил, наприклад, падіння тіла під впливом гравітації.



10.Чисельне розв'язування нелінійних систем рівнянь

MATLAB має зручний інструмент `fsolve` для знаходження розв'язків нелінійних систем рівнянь.

Приклад: знаходження розв'язку системи

% Опис системи нелінійних рівнянь

```
f = @(x) [x(1)^2 + x(2) - 4;  
         x(1) + x(2)^2 - 4];
```

% Початкове наближення

```
x0 = [1; 1];
```

% Виклик fsolve

```
options = optimoptions('fsolve', 'Display', 'iter');  
[x, fval] = fsolve(f, x0, options);
```

% Виведення результату

```
disp('Розв'язок:');  
disp(x);  
disp('Значення функцій в точці розв'язку:');  
disp(fval);
```

Командна строка:

```
>> untitled1d
```

Iteration	Func-count	f(x) ^2	Norm of step	First-order optimality	Trust-region radius
0	3	8		6	1
1	6	0.395062	0.942809	1.93	1
2	9	0.000221316	0.145048	0.0434	2.36
3	12	8.43238e-11	0.00360367	2.68e-05	2.36
4	15	1.25289e-23	2.22715e-06	1.03e-11	2.36

[Equation solved.](#)

fsolve completed because the vector of function values is near zero as measured by the value of the [function tolerance](#), and the [problem appears regular](#) as measured by the gradient.

[<stopping criteria details>](#)

Розв'язок:

```
1.5616  
1.5616
```

Значення функцій в точці розв'язку:

```
1.0e-11 *  
  
0.2503  
0.2503
```

11. Поглиблене використання ode45 для складних систем

Функція ode45 дозволяє вирішувати складні системи ОДУ (звичайних диференціальних рівнянь).

Приклад: моделювання руху тіла під дією сили тяжіння з використанням системи рівнянь

```
% Опис системи  
gravitySystem = @(t, Y) [Y(2); -9.81];
```

```
% Початкові умови: положення = 0, швидкість = 50 м/с  
Y0 = [0; 50];
```

```
% Часовий інтервал  
tspan = [0 10];
```

```
% Розв'язок  
[t, Y] = ode45(gravitySystem, tspan, Y0);
```

```
% Побудова графіку руху  
plot(t, Y(:,1));  
xlabel('Час (с)');  
ylabel('Положення (м)');  
title('Рух тіла під дією сили тяжіння');  
grid on;
```

