

Невласні інтеграли

Розглянемо приклади, пов'язані з обчисленням та дослідженням невластних інтегралів.

Приклад 1. Обчислити невластні інтеграли першого роду або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } I_1 = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad \text{б) } I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}; \quad \text{в) } I_3 = \int_0^{+\infty} x \sin x \, dx.$$

Розв'язання. а) За визначенням невластного інтеграла першого роду маємо:

$$I_1 = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{e^2}^a \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2 \ln^2 x} \Big|_{e^2}^a \right) =$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2 \ln^2 a} \right) = \frac{1}{8}$$

б) Знайдемо невластний інтеграл I_2 :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}.$$

Замість точки $x=0$ за проміжну межу інтегрування можна взяти будь-яку іншу скінченну точку числової прямої.

Знайдемо границі з правої частини останньої рівності:

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} \Big|_b^0 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6},$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} \Big|_0^a = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Підставивши ці границі у вираз для I_2 , отримаємо:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

в) Використовуючи визначення невластного інтеграла першого роду, маємо:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^{+\infty} x \sin x \, dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x \sin x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = x, \, dv = \sin x \, dx, \\ du = dx, \, v = -\cos x. \end{matrix} \right\| = \\
 &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-x \cos x \Big|_0^a + \int_0^a \cos x \, dx \right) = \\
 &= \lim_{a \rightarrow +\infty} (-a \cos a + \sin a).
 \end{aligned}$$

Останньої границі не існує. Інтеграл I_3 є розбіжним.

Приклад 2. Обчислити невластний інтеграл першого роду

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}.$$

Розв'язання. Переходячи до границі, маємо:

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{x \, dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}} = - \lim_{a \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \Big|_2^a = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - 3}} - 1 \right) = 1$$

Розглянуті в лекції ознаки порівняння дають змогу дослідити на збіжність невластні інтеграли. Розглянемо відповідні приклади.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{3x^5 + x^3 + 1}$.

Розв'язання. Використаємо граничну ознаку порівняння. Оскільки у знаменнику підінтегрального дробу знаходиться многочлен 5 степеню, то порівняємо підінтегральну функцію

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{3x^5 + x^3 + 1} \sim \frac{1}{x^5}: \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^5}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{3x^5 + x^3 + 1} = \frac{1}{3} = \text{const} \neq 0,
 \end{aligned}$$

Таким чином $f(x)$ є нескінченно малою порядку $\lambda = 5$ у порівнянні з $\frac{1}{x}$. Оскільки $5 > 1$, то даний інтеграл є збіжним.

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x} \right) dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді $f(x) = 1 - \cos \frac{2}{x} = 2 \sin^2 \frac{1}{x}$. Вона є додатною та неперервною при $x \geq 1$.

Оскільки при $x \rightarrow +\infty$ $2 \sin^2 \frac{1}{x}$ є нескінченно малою, еквівалентною $\frac{2}{x^2}$, то за частковою ознакою порівняння даний інтеграл є збіжним.

Приклад 5. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1 - 4 \sin 2x}{x^3 + 2\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1 - 4 \sin 2x}{x^3 + 2\sqrt{x}}$ змінює знак на проміжку інтегрування, тому дослідимо на збіжність $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$. Оскільки

$$|f(x)| = \frac{|1 - 4 \sin 2x|}{x^3 + 2\sqrt{x}} \leq \frac{1 + |4 \sin 2x|}{x^3 + 2\sqrt{x}} \leq \frac{5}{x^3},$$

а інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{6}{x^3} dx$ є збіжним, то, за загальною ознакою порівняння, збіжним є і $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$. Таким чином, заданий інтеграл збігається абсолютно.

Приклад 6. Використовуючи означення, обчислити наступні невластні інтеграли, або встановити їх розбіжність:

а) $\int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^3}$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^3 \sqrt{\ln x}}$ є необмеженою у околі точки $x=1$. На будь-якому відрізку $[1+\varepsilon; e]$ вона є неперервною, а тому інтегрованою. За визначенням невластного інтеграла другого роду маємо:

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} (\ln x)^{\frac{2}{3}} \right) \Big|_{1+\varepsilon}^e = \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - \sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)} \right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

б) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ є необмеженою у околі точки

$x = \frac{\pi}{2}$ і є інтегрованою на будь-якому відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$, де $\varepsilon > 0$,

оскільки є неперервною на цьому відрізку. Тому отримуємо:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right] = +\infty.\end{aligned}$$

Інтеграл є розбіжним.

в) Розкладемо підінтегральну функцію $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$ на суму елементарних дробів:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{x^2+x+1} \right).$$

Тоді отримуємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Другий доданок у правій частині даної рівності є власним визначеним інтегралом, тому він не впливає на характер збіжності заданого

інтеграла. Вона визначається збіжністю інтеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(1-x)) \Big|_0^{1-\varepsilon} = +\infty.$$

Таким чином, заданий інтеграл є розбіжним.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$.

Розв'язання. Даний інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція є необмеженою у околі точки $x = 2$.

Знайдемо невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$. Для цього перетворимо підінтегральну функцію:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C.$$

Функція $F(x) = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$ неперервна на $[0; 2]$ та $F'(x) = f(x)$ на $(0; 2)$. Тому для обчислення даного інтеграла можна застосувати формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx = \left(2 \arcsin \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} \right) \Big|_0^2 = \pi + 2.$$

Приклад 8. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^5 \sqrt{x}}$ є необмеженою у околі точки $x = 0$. Представимо інтеграл у вигляді:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x}}.$$

Обидва інтеграли у правій частині останньої рівності є розбіжними, оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ є розбіжним при $\lambda > 1$, а у нашому випадку

$\lambda = \frac{6}{5} > 1$. Таким чином, за частковою ознакою порівняння для

невласних інтегралів другого роду інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x}}$ є розбіжним.

Приклад 9. Обчислити невласний інтеграл $I_n = \int_0^1 x^m \ln^n x dx$, де $m > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Знайдемо значення інтеграла при $n = 0$:

$$I_0 = \int_0^1 x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}.$$

При $n > 0$ проінтегруємо I_n частинами, вибравши

$u = \ln^n x$, $dv = x^m dx$. Тоді $du = \frac{n \ln^{n-1} x dx}{x}$, $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. Отримаємо:

$$I_n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m \ln^{n-1} x dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

Остання рівність визначає рекурентну формулу, з допомогою якої інтеграл I_n приводиться до I_0 при довільному $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1} = \dots = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Таким чином, інтеграл I_1 є збіжним, а його значення $I_1 = -1$.

Знайдемо інтеграл I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^b d \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \Big|_{\pi}^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\sin b}{b} = 0. \end{aligned}$$

Ми отримали, що інтеграли I_1 та I_2 є збіжними, тобто збіжним є також інтеграл $I = I_1 + I_2$.

Приклад 11. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є необмеженою у околі точки $x=1 \in [0; 2]$. Представимо інтеграл I у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \int_1^2 \frac{dx}{1-x^2} = I_1 + I_2.$$

Для збіжності інтеграла I потрібно, щоб обидва інтеграли, I_1 та I_2 , були збіжними.

При $0 < b < 1$ отримуємо:

$$\int_0^b \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b}{1-b} = F(b).$$

Оскільки функція $F(b)$ при $b \rightarrow 1-0$ не має скінченної границі, то інтеграл I_1 є розбіжним, тому розбіжним є також інтеграл I .

Приклад 12. Дослідити на збіжність невластий інтеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 5}{x^6 + 4x^3 + 9} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 5}{x^6 + 4x^3 + 9}$ є неперервною на всьому проміжку інтегрування $(0; +\infty)$, тому маємо невластий інтеграл першого роду. Оскільки $f(x)$ є раціональною функцією, то її первісна може бути представленою у вигляді елементарної функції. Проте, оскільки задача обчислення даного інтеграла не ставиться, то замість знаходження первісної з наступним обчисленням її границі на нескінченності, обмежимося використанням ознаки порівняння для встановлення збіжності чи розбіжності даного інтеграла.

Різниця між степенями многочленів у знаменнику та чисельнику підінтегрального виразу дорівнює 2, тому у якості еталонного інтеграла для порівняння розглянемо $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, що є збіжним.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1 = \text{const}$, то інтеграл I також є збіжним.

Приклад 13. Дослідити на збіжність невластий інтеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^3}}$ є необмеженою на нижній межі інтегрування – точці $x = 0$, тому для дослідження даного інтеграла на збіжність, представимо його у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}} = I_1 + I_2.$$

Для дослідження кожного з інтегралів, I_1 та I_2 , використаємо ознаку порівняння. Підінтегральна функція в I_1 при $x \rightarrow 0+$ нескінченно великою, еквівалентною $x^{-1/2}$, тому за ознакою порівняння інтеграл I_1 є збіжним. У інтегралі I_2 підінтегральна функція при $x \rightarrow +\infty$ – нескінченно мала, еквівалентна $x^{-3/2}$, звідки випливає, що даний інтеграл також є збіжним. Оскільки I_1 та I_2 є збіжними інтегралами, то їх сума також є збіжним інтегралом.

Приклад 14. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx$.

Розв’язання. Оскільки підінтегральна функція $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}}$ є необмеженою у околі лівої межі інтегрування $x=0$, то для дослідження заданого інтеграла на збіжність представимо його у вигляді суми двох невластних інтегралів:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx = I_1 + I_2.$$

Оскільки при $x \rightarrow 0+$ функція $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}}$ є еквівалентною $\frac{1}{\sqrt{x}}$, то

інтеграл I_1 за частковою ознакою порівняння є абсолютно збіжним (тут підінтегральна функція є додатною на проміжку інтегрування $[0; 1]$). Оскільки має місце оцінка $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^5}}$, а функція у

правій частині цієї нерівності еквівалентна $\frac{1}{x^{5/2}}$, то за частковою ознакою порівняння інтеграл I_2 є збіжним. Тому сума інтегралів I_1 та I_2 теж є збіжним інтегралом.

Приклад 15. Знайти головне значення інтеграла за Коші:

а) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx$; б) $I = \int_{0,5}^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

Розв’язання. а) Знайдемо первісну підінтегральної функції:

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 2x + 5)}{x^2 - 2x + 5} + \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$I = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M \frac{x dx}{x^2 - 2x + 5} =$$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\ln(x^2 - 2x + 5) + \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} \right]_{-M}^M =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln \frac{M^2 - 2M + 5}{M^2 + 2M + 5} +$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{M-1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{-M-1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

б) Первісна підінтегральної функції має вигляд:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x) + C.$$

$$I = V.P. \int_{0,5}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{0,5}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\ln |\ln x| \Big|_{0,5}^{1-\varepsilon} + \ln |\ln x| \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\ln |(\ln(1-\varepsilon))| - \ln \ln 2 + \ln \ln 2 - \ln |(\ln(1+\varepsilon))| \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right| = \ln 1 = 0.$$

Приклади для самостійної роботи.

Дослідити на збіжність чи обчислити невласні інтеграли:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ (збіжний)

2) $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ (розбіжний)

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx \quad (\text{збіжний})$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad (\text{збіжний, 2})$$

$$5) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \cdot (\text{розбіжний})$$

$$6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3} \quad (\text{розбіжний})$$

$$7) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (\text{збіжний, 1})$$