

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лекція 38. Інтегровані типи диференціальних рівнянь першого порядку

38.1. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку називається рівняння лінійне (першого степеня) відносно функції y та її похідної y' вигляду:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння (1) називається **лінійним неоднорідним**.

Якщо $Q(x) = 0$, то рівняння

$$y' + P(x)y = 0 \quad (2)$$

називається **лінійним однорідним**, що відповідає даному неоднорідному рівнянню (1).

Рівняння (2) є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|,$$

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (3)$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (1) можна отримати методом Бернуллі-Фур'є або методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).

1. *Метод Бернуллі-Фур'є* полягає в тому, що розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = uv, \quad (4)$$

де $u(x)$ та $v(x)$ – невідомі функції, причому одна з них функція довільна (але не дорівнює тотожно нулю).

Знаходимо похідну

$$y' = u'v + uv'.$$

Після підстановки y та y' в рівняння (1), останнє перетворюється на систему 2-х рівнянь з відокремлюваними змінними.

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'v = Q(x) \end{cases}$$

Перше рівняння системи є лінійним однорідним вигляду (2) і його загальний розв'язок :

$$v(x) = C_1 e^{-\int P(x)dx}, C_1 \neq 0$$

В силу довільності вибору функції $v(x)$, виберемо з цього загального розв'язку який-небудь частинний розв'язок, поклавши, наприклад, $C_1 = 1$. Тоді

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

Підставляючи отримане значення функції $v(x)$ в друге рівняння системи, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u(x)$

$$u' e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow u = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} + C$$

Врешті, підставляючи знайдені значення функцій u і v в рівняння (4), отримаємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (1)

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' - y \operatorname{ctgx} = \frac{1}{\sin x}.$$

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (4.1), тобто воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y' , при цьому

$$P(x) = \operatorname{ctgx}, \quad Q(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі, тобто загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y = uv.$$

Звідси

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляємо y та y' у вихідне рівняння

$$u'v + uv' - uv \operatorname{ctgx} = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' - v \operatorname{ctgx}) = \frac{1}{\sin x}.$$

Для визначення невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ розіб'ємо отримане рівняння на два рівняння:

$$\begin{cases} v' - v \operatorname{ctgx} = 0, \\ u'v = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи, як рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{ctgx} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctgx} dx + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|,$$

звідки

$$\ln|v| = \ln|C_1 \sin x| \quad \Rightarrow \quad v = C \sin x, \text{ де } C = \pm C_1.$$

Оскільки в даному рівнянні досить знайти який-небудь *частинний розв'язок*, то, для спрощення подальшого розв'язання, покладемо $C = 1$.

(Надалі, при розв'язанні першого рівняння системи, постійну інтегрування записувати не будемо, зразу шукаючи його найпростіший *частинний розв'язок*, який, як правило, можна отримати при $C = 1$ або $C = 0$).

Тоді

$$v = \sin x.$$

Підставляємо функцію $v(x) = \sin x$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} \sin x = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{\sin^2 x},$$

звідки

$$\int du = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + C \Rightarrow u = -\operatorname{ctgx} + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = uv = (-\operatorname{ctgx} + C)\sin x = -\cos x + C\sin x.$$

2. *Метод Лагранжа* полягає в тому, що загальний розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді розв'язку відповідного однорідного рівняння, в якому сталу вважають функцією.

Спочатку записуємо лінійне однорідне рівняння (2), відповідне даному неоднорідному рівнянню (1), інтегруючи яке, отримаємо його загальний розв'язок,

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Далі записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) у такому ж вигляді (3), вважаючи довільну сталу деякою диференційовною функцією:

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (5)$$

Знаходимо похідну

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Підставляючи вирази $y(x)$ та $y'(x)$ в рівняння (1), отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $C(x)$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

інтегруючи яке, знаходимо

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + \tilde{C}$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у вираз (5) дістаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1).

Зауваження. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) дорівнює сумі загального розв'язку з о у відповідного однорідного рівняння (2) і частинного розв'язку чн у даного неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} \quad (6)$$

Зауваження. При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь методом Бернуллі або методом Лагранжа слід використовувати наведені алгоритми, а не отримані кінцеві формули.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (задача Коші):

$$y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = -1.$$

Розв'язання. Маємо лінійне рівняння відносно функції y та її похідної y' .

Застосуємо метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$y' + 2xy = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2x dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx + \ln|C|,$$

звідси

$$\ln|y| - \ln|C| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{C} = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-x^2}, \quad (*)$$

вважаючи довільну сталу функцією змінної x . Тоді

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Підставляючи y та y' у задане рівняння, отримаємо:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 3x^2 e^{-x^2}.$$

Після скорочення, маємо:

$$C'(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2} \Rightarrow C'(x) = 3x^2 \Rightarrow C(x) = x^3 + \bar{C}.$$

Підставивши знайдене значення $C(x)$ у вираз (*), отримаємо загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння:

$$y = (x^3 + \bar{C})e^{-x^2} \Rightarrow y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}} = \bar{C}e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}.$$

В даному випадку $y_{\text{зо}} = \bar{C}e^{-x^2}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_{\text{чн}} = x^3e^{-x^2}$ - частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

Тепер розв'яжемо задачу Коші, тобто знайдемо частинний розв'язок даного рівняння, який відповідає заданій початковій умові.

Підставивши в загальний розв'язок початкову умову $y(0) = -1$, знайдемо значення сталої $\bar{C}$:

$$-1 = (0 + \bar{C})e^0 \Rightarrow \bar{C} = -1.$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y = (x^3 - 1)e^{-x^2}.$$

38.2. Диференціальні рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (7)$$

де $\alpha \in R$, $n \neq 0, n \neq 1$, а $P(x)$ і $Q(x)$ - визначені і неперервні на деякому проміжку функції.

При $n = 0$ рівняння (7) буде лінійним, при $n = 1$ - рівнянням з відокремлюваними змінними.

Для інших дійсних значень показника n рівняння Бернуллі можна звести до лінійного диференціального рівняння, за допомогою введення нової функції $z = z(x)$.

Для цього, спочатку поділимо рівняння (7) на y^n ($y \neq 0$). Отримаємо

$$y^{-n} y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Зробимо заміну

$$z = y^{1-n}, \text{ де } z = z(x) \text{ – нова невідома функція.}$$

Звідси

$$\frac{1}{1-n} z' + P(x)z = Q(x) \Rightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

Отримане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням відносно функції $z(x)$, для якого можна застосувати або метод Бернуллі, або метод Лагранжа.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2.$$

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (5.1), тобто це - *рівняння Бернуллі*.

Зведемо його до лінійного, для чого поділимо обидві частини рівняння на y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = x^2. \quad (*)$$

Введемо нову змінну $z(x)$, зробивши заміну

$$z = y^{-1}.$$

Диференціюючи функцію $z(x)$, знайдемо

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^{-2} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' y^{-2} = -z'.$$

Переходячи в рівнянні (*) до змінної $z(x)$, отримаємо:

$$-z' + \frac{1}{x} z = x^2 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{1}{x} z = -x^2. \quad (**)$$

Отримане рівняння є лінійним рівнянням 1-го порядку відносно функції $z(x)$, і для знаходження його розв'язку скористаємось методом Бернуллі, поклавши

$$z = uv \quad \Rightarrow \quad z' = u'v + uv'.$$

Підставляючи z і z' в рівняння (**), отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -x^2. \quad (***)$$

Знайдемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, в наслідок чого рівняння (***) зводиться до системи:

$$\begin{cases} v' - \frac{1}{x}v = 0, \\ u'v = -x^2. \end{cases}$$

Відокремлюючи змінні в першому рівнянні системи та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Підставивши знайдену функцію $v = x$ в друге рівняння системи, отримаємо:

$$u'x = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = -x.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо функцію $u(x)$:

$$du = -x dx \quad \Rightarrow \quad \int du = -\int x dx + C \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного рівняння (**):

$$z = uv = \left(C - \frac{x^2}{2}\right)x = Cx - \frac{x^3}{2}.$$

Для отримання розв'язку рівняння (*), слід повернутися до змінної y .

Оскільки $z = y^{-1}$, то

$$\frac{1}{y} = \frac{2Cx - x^3}{2} \quad \text{або} \quad y = \frac{2}{2Cx - x^3}.$$

Це і є загальний розв'язок заданого рівняння Бернуллі.

Також рівняння Бернуллі можна розв'язати і не зводячи його до лінійного, а безпосередньо застосовуючи до нього метод Бернуллі-Фур'є.