2. ГЕОМЕТРІЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

Тема 2.6: Криві на поверхні еліпсоїда.

1. Геодезичні полярні координати. Приведена довжина геодезичної лінії.
2. Різниці азимутів і довжин дуг геодезичної лінії та нормального перерізу.

1. Геодезичні полярні координати. Приведена довжина геодезичної лінії

Одне із застосувань геодезичної лінії в сфероїдній геодезії полягає в тому, що завдяки їй на поверхні еліпсоїда можна створити систему координат, в якій положення пунктів визначається довжиною геодезичної лінії та кутом, що відраховується від заданого вихідного напряму. Така система координат на еліпсоїді, аналогічна полярній системі координат на площині, називається полярною геодезичною. Якщо на поверхні еліпсоїда від деякої початкової точки провести низку геодезичних ліній рівної довжини, то крива, що з'єднує їх кінці, до кожної з них ортогональна.

Нехай із точки *O* проведено низку геодезичних ліній довжиною *s*, що відстають одна від другої на кут *dA* (рис. 2.19). Лінії *s* = *const* називаються геодезичними колами. Елемент геодезичного кола рівний *mdA*.

Величина *m* називається приведеною довжиною геодезичної лінії і є функцією полярних геодезичних координат: дуги геодезичної лінії *s* та її азимута *A*. Лінійний елемент поверхні еліпсоїда (нормальний переріз) в полярних координатах, як слідує із *рис. 2.19*, має вигляд

$$d\sigma^2 = ds^2 + m^2 dA^2. \tag{2.85}$$

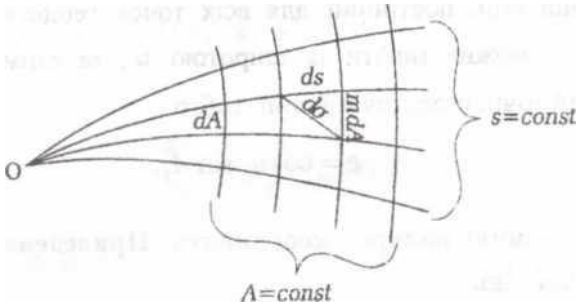

Рис. 2.19

Між двома точками на поверхні еліпсоїда, не залежно від того, яка з них береться за початкову, *m* має завжди одне значення, тобто кожній геодезичній лінії відповідає певне *m*. Приведена довжина геодезичної лінії пов'язана з геодезичною лінією наступним рядом

$$m = s - \frac{s^3}{6R^2} + \frac{s^4}{6a^3} e^2 \sin 2B \cos A - \frac{s^5}{120R^4} + \cdots . \tag{2.86}$$

В цій формулі *R*, *B*, *A* відносяться до тієї точки, яка береться за початкову.

Для поверхні кулі *e* = 0, і рівняння (2.86) запишеться у вигляді

$$m = s - \frac{s^3}{6R^2} + \frac{s^5}{120R^4} + \cdots = R \sin \frac{s}{R}. \tag{2.87}$$

Одним із важливих застосувань приведеної довжини геодезичної лінії полягає в доведенні теореми про те, що сфероїдні трикутники зі сторонами, що не перевищують 200-250 км, з похибкою на малі величини третього порядку, можна розв'язувати як сферичні.

Сфероїдний трикутник – це трикутник на поверхні еліпсоїда, сторонами якого є геодезичні лінії. Зауважимо, що термін «сфероїдний трикутник» є тотожний терміну «еліпсоїдний трикутник», проте в літературі більш вживаним є перший термін, тобто «сфероїдний трикутник».

Отже, вияснимо: чи можна сфероїдний трикутник і яких розмірів розв'язувати за формулами сферичної тригонометрії?

Відносна похибка довжин, з врахуванням значення m і m_e, за формулами (2.86) і (2.87), буде

$$\theta = \frac{(m - m_e)}{m} = \frac{1}{6} e^2 \sin 2B \cos A \frac{s^4}{a^3 m}.$$

З похибкою $e^2 \left(\frac{s}{a}\right)^5$ приймемо у знаменнику $m = s$.

Тоді

$$\theta = \frac{1}{6} e^2 \left(\frac{s}{a}\right)^5 \sin 2B \cos A.$$

Величина θ досягає максимуму при $B = 45°$ та $A = 0°$, тобто

$$\theta_{max} = \frac{1}{6} e^2 \left(\frac{s}{a}\right)^5.$$

Оскільки при обчислені довжин сторін трикутників тріангуляції 1 класу утримують восьмий десятковий знак, то треба вимагати, щоб

$$\theta_{max} \leq 1 \cdot 10^{-8},$$

або

$$\frac{1}{6} e^2 \left(\frac{s}{a}\right)^5 \leq 1 \cdot 10^{-8}.$$

Підставляючи сюди значення $e'^2 = \frac{1}{150}$, $\alpha = 6\,400$ км, знаходимо s ≤ 133 км.

Отже, звідси випливає, що частину сфероїдної поверхні, обмежену геодезичним колом радіуса 133 км, можна замінити сферичною радіуса R. При цьому R – середній радіус кривизни в початку координат. В межах цієї області сфероїдні трикутники, найбільшим з яких буде вписаний рівносторонній трикутник зі сторонами ~ 250 км, можна розв'язувати як сферичні з вказаним вище ступенем точності. Цей важливий висновок використовується при розв'язуванні малих сфероїдних трикутників.

Інше важливе застосування приведеної довжини геодезичної лінії – це використання при розгляді диференційних формул для геодезичної лінії. Детальніше про це буде сказано у розділі 3.

2. Різниці азимутів і довжин дуг геодезичної лінії та нормального перерізу

На *рис. 2.15* зображено фігуру, утворену кутами між прямими нормальними перерізами. Якщо провести між вершинами геодезичні лінії, то отримаємо замкнутий трикутник, що утворений цими лініями, як показано на *рис. 2.20*.

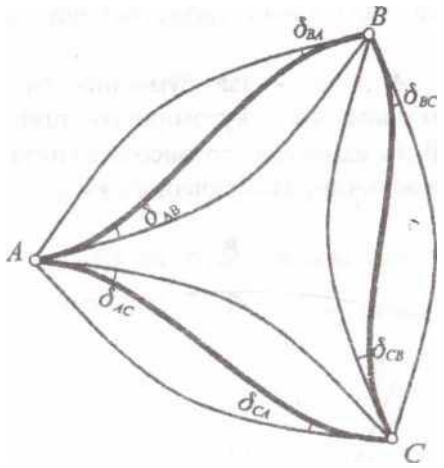

Рис. 2.20

Для переходу до такої фігури достатньо в кожен напрям прямого нормального перерізу ввести поправку δ за формулою (2.81), в результаті чого отримаємо кути трикутника, утвореного геодезичними лініями. Цю поправку називають поправкою за різницю азимутів прямого нормального перерізу геодезичної лінії. Величина цієї поправки є незначною. Так при відстані між пунктами в 200 км, в найгіршому випадку ($B_m = 0$ і $A = 45°$), величина δ складає 0,12", а при відстанях до 30 км вона є меншою 0,001". Тому дана поправка, в звичайних за розмірах трикутниках тріангуляції, для одиночних передач азимутів, переважно, не вводиться. Але при послідовному обчисленні азимутів сторін тріангуляції по ланці, неврахування цієї поправки може привести до систематичної похибки в азимуті сторони останнього трикутника ланки тріангуляції. Отже, поправку δ слід враховувати при математичному опрацюванні результатів кутових вимірювань в державних мережах 1 класу, що створюються методом тріангуляції.

Двоїстість нормальних перерізів викликає необхідність також у виправленні виміряних напрямів поправкою за висоту пункта, що спостерігається. Приведемо геометричний зміст даної поправки.

Нехай на *рис. 2.21* A і B – два суміжних пункти тріангуляції. Якщо вертикальна вісь кутомірного приладу направлена вздовж нормалі до еліпсоїда, то висота пункта A над еліпсоїдом не вплине на величину вимірюваного кута.

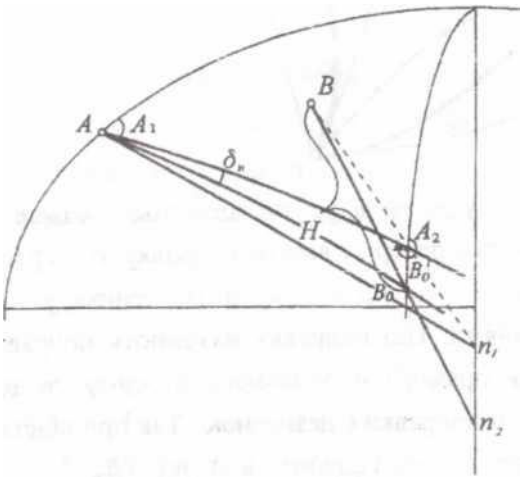

Рис. 2.21

Проте, напрям AB на точку B, яка розташована на висоті H_2 над еліпсоїдом, і напрям AB_0 на проекцію цієї точки не співпадуть.

Напрям AB буде лежати в площині прямого нормального перерізу $An_1B'_0$, а напрям між проекціями точок A і B буде знаходитись в площині прямого нормального перерізу An_1B_0. Поправку δ за висоту пункту спостереження можна знайти із трикутника AB'_0B_0, який вважатимемо плоским. Кути при вершинах B_0 і B'_0 цього трикутника можна прийняти рівними $A_2 - 180°$ (A_2 – азимут зворотнього напряму), а довжини AB_0 і AB'_0 рівними s, тоді

$$\delta_H = -\frac{B_0\, B'_0 \sin A_2}{s}.$$

Відрізок B_0B_0 можна рахувати рівним дузі, що стягує кут $B_0\, BB_0$, тобто кут γ_2 (див. *рис. 2.12*), а $BB_0 = H_2$.

Тоді,

$$\delta_H = -\frac{\gamma_2 H_2}{s}\sin A_2.$$

Значення кута γ_2 підставимо із формули (2.65). При цьому врахуємо, що різниця широт для пунктів 1 класу не перевищує 20-30' (в радіанній мірі це буде $\approx \frac{1}{120}$), тобто величини n_1n_2, γ_1, γ_2 – малі величини другого порядку, тому в них можна N_1, і N_2 замінити через Nm – радіус кривизни першого вертикала для точки з середньою широтою B_m, а $(\sin B_2 - \sin B_1) = \Delta B \cos B_m$. Тоді отримаємо

$$\gamma_2 = \frac{e^2 \Delta B \cos B_m \cos B_2}{(1 - e^2 \Delta B \cos B_m \cos B_2)} \approx e^2 \Delta B \cos^2 B_m \approx \frac{e^2}{a}\cos A_1 \cos^2 B_m.$$

Оскільки γ_2 – мала величина другого порядку, то можна прийняти $\sin A_2 \approx -\sin A_1$, $\cos^2 B_m \approx \cos^2 B_1$. Тоді, остаточно, поправка за висоту пункте спостереження, буде мати наступний вигляд

$$\delta_H = \frac{e^2}{2}\frac{H_2}{a}\cos^2 B_1 \sin 2A_1. \qquad (2.88)$$

У формулі (2.88) H_2 є геодезична висота точки B, тобто висота, що відраховується не від рівня моря, а від поверхні прийнятого еліпсоїда. При висоті H_2, рівній 1 000 м і при $B = 45°$, $A = 45°$, величина δ_H складає 0,05". Дана поправка вводиться у виміряні напрями тріангуляції 1-го класу, а деколи (особливо у гірських районах) і тріангуляції 2-го класу.

Якщо поставити вимогу, щоб $\delta_H < 0{,}001''$, то з тими ж значеннями широти та азимута $H \approx 30$ м, тобто поправку δ_H треба враховувати у першокласних геодезичних мережах при $H \geq 30$ м.

Знайдемо ще різницю довжин дуг геодезичної лінії та нормального перерізу. Із виразу (2.85)

$$d\sigma^2 = ds^2\left[1 + m^2\left(\frac{dA}{ds}\right)^2\right],$$

або

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left[1 + m^2\left(\frac{dA}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Після розкладу виразу в квадратних дужках в ряд за біномом Ньютона, отримаємо

$$d\sigma = ds\left[1 + \frac{m^2}{2}\left(\frac{dA}{ds}\right)^2 + \cdots\right]. \qquad (2.89)$$

З рівняння (2.81), шляхом диференціювання, отримаємо

$$\left(\frac{d\delta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dA}{ds}\right)^2 = \frac{e^4 s^2}{36N^4}\cos^4 B \sin^2 2A.$$

Відповідно

$$d\sigma = ds\left[1 + \frac{m^2 s^2 e^4 \cos^4 B \sin^2 2A}{72N^4}\right]. \qquad (2.90)$$

У відповідності з формулою (2.87) – $m = s - \frac{s^3}{6R^2} + \cdots$ з похибкою на величини $\sim\frac{1}{N^8}$ у виразі (2.90) можна прийняти $m = s$, тоді

$$d\sigma = ds\left[1 + \frac{e^4 s^4}{72N^4}\cos^4 B \sin^2 2A\right].$$

Інтеграл цього диференціального рівняння буде

$$\sigma - s = \frac{e^4 s^5}{360N^4}\cos^4 B \sin^2 2A. \qquad (2.91)$$

При підстановці числових даних: s = 1 000 км, B = 0 і A = 45°, згідно формули (2.91), отримаємо

$$\sigma - s = 0{,}075 \text{ мм}.$$

Отриманий результат показує, що в практиці ведення геодезичних робіт можна *не рахуватися з різницею довжин дуг геодезичної лінії і нормального перерізу*.