

**Використання
методу гілок та границь (МГГ)
як методу комбінаторної оптимізації
при виборі гнучких
виробничих комірок (ГВК)
механоскладання**

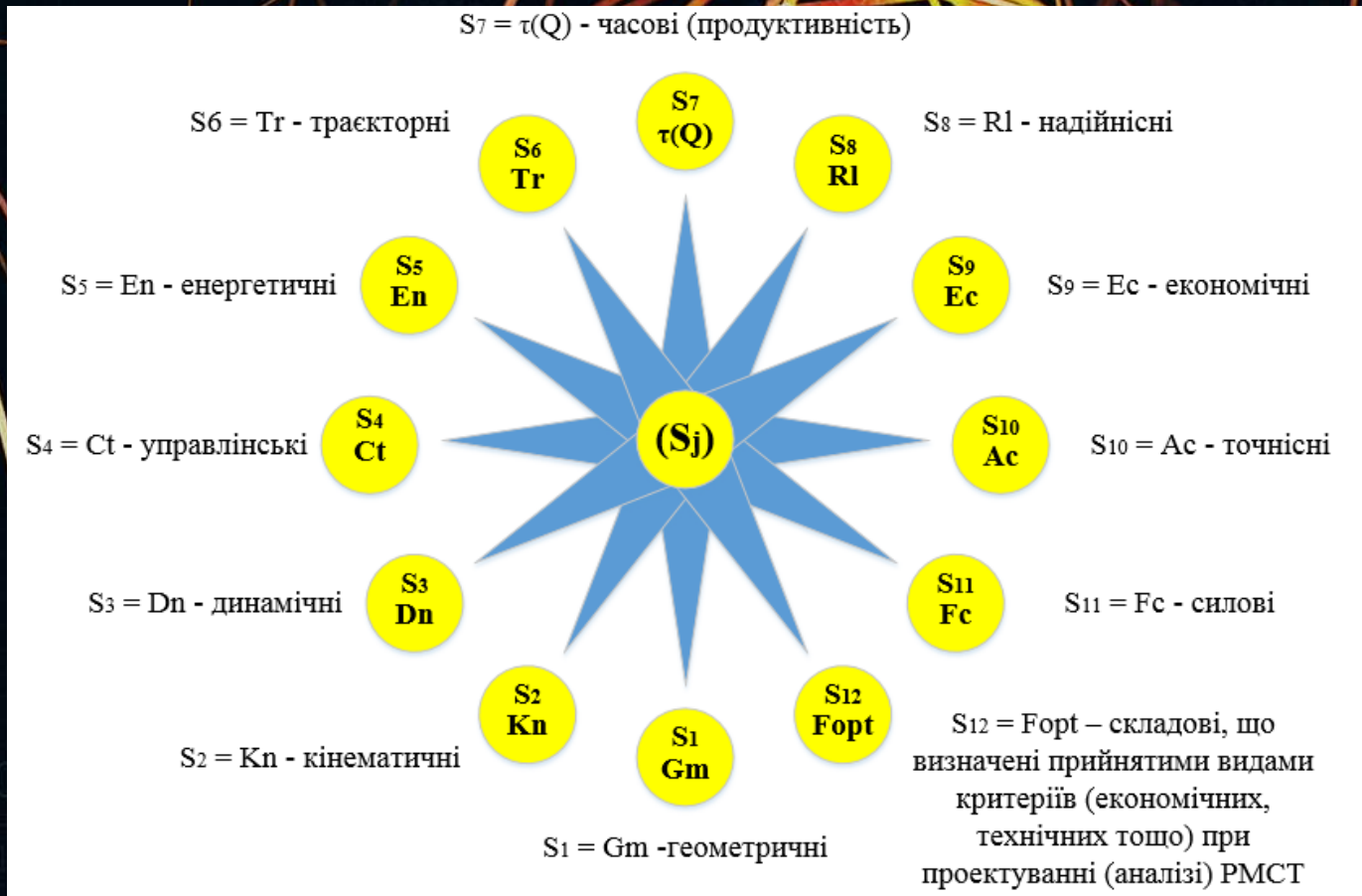
Кирилович Валерій Анатолійович,
д.т.н., проф. кафедри РЕА
ім. проф. Б.Б. Самотокіна

Постановка проблеми

Для оптимального функціонування ГВС необхідно вибрати відповідний критерій оптимальності. Його вибір значною мірою визначається призначенням системи і конкретними умовами її функціонування.

В реальних умовах практичної та дослідницької діяльності завжди існують певні обмеження, одночасне виконання яких у більшості випадків є неможливим.

У таких випадках, залежно від конкретних умов надають перевагу тим чи іншим критеріям за вибором користувача або проектувальника.



Мета та завдання досліджень

Мета: підвищення якості технологічної підготовки роботизованих механоскладальних виробництв за рахунок використання методу гілок та границь при виборі ГВК за критерієм продуктивності.

Завдання:

- Проаналізувати зміст існуючих методик вибору ГВК за локальними критеріями складових РМСТ.
- Висвітлити сутність методу гілок та границь та на її основі сформулювати формалізовану постановку завдання.
- Запропонувати методику вибору ГВК за критерієм максимальної продуктивності з використанням МГГ та запропонувати структуру Інформаційного забезпечення.
- Розв'язати тестовий приклад, що підтверджує працездатність запропонованої методики.
- Сформулювати напрямки подальших досліджень.

Практичне значення

Використання методу гілок та границь (МГГ) (іноді метод гілок та меж МГМ) як одного з методів дискретної оптимізації значною мірою:

- скорочує час на вибір ГВК підвищує продуктивність процесу вибору);
- зменшує кількість альтернатив в процесі вибору, що прискорює технологічну підготовку роботизованих механоскладальних виробництв (ТП РМСВ) на етапі вибору ГВК за певним локальним критерієм та вказує на підвищення її (ТП РМСВ) ефективності.

Сутність методу гілок та границь

Метод гілок та границь (МГГ, іноді метод гілок та меж МГМ, англ. *Branch and Bound*) дозволяє здійснювати спрямований перебір допустимих рішень у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного рішення до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній.

Значення функціонала при переході змінюється в потрібному напрямку:

- збільшується (для задачі на максимум);
- чи зменшується (для задачі на мінімум).

Таким чином кількість допустимих рішень зменшується до тих пір, поки не буде знайдено оптимальний варіант.

МГГ можна використовувати як основу при виборі ГВК, оскільки він є прийнятним для розв'язування реальних інженерних та/або дослідницьких задач РМСВ.

Формалізована постановка завдання

$$\left(\varphi = \left(\varphi_i \mid i = \overline{1, n_\varphi} \right) \right) : \left(ID = \left(N, FMC = \left(FMC_i \mid i = \overline{1, n} \right), a_i, c_i \right) \right) \\ \rightarrow \left((F(x) = F(S_7)) \rightarrow \max, N_i \leq N \right).$$

Тут:

- φ – множина обчислювальних процедур ;
- φ_i - i -та обчислювальна процедура;
- n_φ – загальна кількість обчислювальних процедур;
- ID – вхідні дані;
- FMC_i – i -та ГВК;

- n – загальна кількість ГВК (FMC), на множині яких виконується вибір;
- a_i – продуктивність кожної i -ої ГВК;
- c_i – вартість кожної i -ої ГВК;
- $F(x)$ – прийнятий критерій оптимальності при виборі ГВК, в даному випадку
- $F(x) = F(S_7 = Q = a_i) \rightarrow \text{extr.}$

Інформаційне забезпечення



Покрокова методика вибору ГВК методом гілок та границь

Крок 1 (φ_1)

Ініціалізація початкових даних

N – загальна вартісна оцінка для вибору ГВК, $N \leq 1000000$;

ГВК $_i$, $|i = \overline{1, n}$ - множина ГВК, на якій виконується процес вибору, для розглядуваного в подальшому тестового прикладу $n=7$;

a_i – продуктивність кожної i -ої ГВК;

c_i – вартість кожної i -ої ГВК;

Крок 2 (φ_2):

Визначення параметру ефективності λ для кожної i -ої ГВК, де λ – це відношення продуктивності a_i кожної i -ої ГВК до її вартості c_i

Крок 3 (φ_3):

- упорядкування елементів множини Λ у порядку спадання (від **max** до **min**) значень кожної i -ої λ ;
- перенумерація ГВК за цією ознакою;
- перенумерація продуктивності кожної ГВК;
- перенумерація вартісної оцінки у відповідності цього порядку;

Покрокова методика вибору ГВК методом гілок та границь

Крок 4 (φ_4):

Формування множини рішень $S(x)$. При цьому кожне i -те рішення відповідає i -ій ГВК та може набувати значень змінної x :

$$S(x) = (S_1(x_1), \dots, S_i(x_i), \dots, S_n(x_n)).$$

Крок 5 (φ_5):

Складання математичної моделі задачі вибору ГВК з використанням МГГ.

Зміст задачі зводиться до вибору тих моделей ГВК, які забезпечують максимальну сумарну ефективність в установленому ліміті коштів:

$$\max \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i ;$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \leq N .$$

Покрокова методика вибору ГВК методом гілок та границь

Крок 6 (φ_6):

Почергове прийняття значення кожного параметра x_i рівним 1.

Знаходження рішення $S_i(x_i)$, що позначено як $S_k(x_k)$, яке належить множині $S(x)$ та задовольняє нерівності:

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i \cdot x_i \leq N \leq \sum_{i=1}^k c_i \cdot x_i.$$

Крок 7 (φ_7):

Підстановка значень x_i , отриманих за кроком 6, у рівняння цільової функції $F(x)$ (за кроком 5).

Перенесення отриманих значень у дерево рішень.

(детально див. тестовий приклад на слайді 12).

Покрокова методика вибору ГВК методом гілок та границь

Крок 8 (φ_8):

Гілкування можливих рішень з почерговим розглядом двох випадків:

- кожне x_i залишається таким, як у початковій множині рішень;
- кожне x_i змінюється на протилежне, тобто розглядаються два випадки
- $x_i = 1$ або $x_i = 0$.

Крок 9 (φ_9):

Ітераційне повторення кроків 6-8 визначає 2 варіанти значень цільової функції $F(x)$ з вибором серед них максимального значення $F(x)_{\max}$.

Крок №10 (φ_{10}):

Серед усіх значень цільової функції, які відмічені на дереві рішень, обирається максимальне, в даному випадку для критерію продуктивності.

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Умова тестового прикладу

На виробництві для проведення реконструкції, необхідно вибрати (синтезувати) ГВК. Для даної цілі виділено суму коштів у розмірі 1 000 000 умовних грошових одиниць (у.г.о.).

Для вирішення цього завдання запропонована кінцева множина ГВК у кількості 7 штук, кожна з яких має свою грошову вартість та продуктивність.

Вимагається в межах встановленого ліміту коштів обрати ті види ГВК, які б забезпечували максимальну сумарну продуктивність.

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Крок 1 (φ_1)

Ініціалізація початкових даних

$N = 1\,000\,000$ у.г.о.

ГВК _i	c_i , у.г.о.	a_i , шт/од. часу
ГВК ₁	196000	46
ГВК ₂	201000	52
ГВК ₃	198000	48
ГВК ₄	204000	55
ГВК ₅	203000	54
ГВК ₆	197000	48
ГВК ₇	200000	53

Крок 2 (φ_2):

Визначення параметру ефективності λ для кожної i -ої ГВК, де λ – це відношення продуктивності a_i кожної i -ої ГВК до її вартості c_i

$$\lambda_1 = 0,235 \cdot 10^{-3} \text{ шт/од. часу / у.г.о.} \quad \lambda_2 = 0,259 \cdot 10^{-3} \text{ шт/од. часу / у.г.о.}$$

$$\lambda_3 = 0,242 \cdot 10^{-3} \text{ шт/од. часу / у.г.о.} \quad \lambda_4 = 0,270 \cdot 10^{-3} \text{ шт/од. часу / у.г.о.}$$

$$\lambda_5 = 0,266 \cdot 10^{-3} \text{ шт/од. часу / у.г.о.} \quad \lambda_6 = 0,244 \cdot 10^{-3} \text{ шт/од. часу / у.г.о.}$$

$$\lambda_7 = 0,265 \cdot 10^{-3} \text{ шт/од. часу / у.г.о.}$$

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Крок 3 (φ_3):

Упорядкування елементів множини Λ у порядку спадання значень кожної i -ої λ та перенумерація ГВК за цією ознакою, а також перенумерація її продуктивності та вартісної оцінки у відповідності цього порядку

$$(\Lambda = (\lambda_4, \lambda_5, \lambda_7, \lambda_2, \lambda_6, \lambda_3, \lambda_1)) \rightarrow \langle \lambda_i, i = \overline{1, n_i} \rangle$$

Перенумерація ГВК	λ_i , шт/од. часу / у.г.о.	c_i , у.г.о.	a_i , шт/од. часу
ГВК ₄ →ГВК ₁	$0,270 \cdot 10^{-3}$	204000	55
ГВК ₅ →ГВК ₂	$0,266 \cdot 10^{-3}$	203000	54
ГВК ₇ →ГВК ₃	$0,265 \cdot 10^{-3}$	200000	53
ГВК ₂ →ГВК ₄	$0,259 \cdot 10^{-3}$	201000	52
ГВК ₆ →ГВК ₅	$0,244 \cdot 10^{-3}$	197000	48
ГВК ₃ →ГВК ₆	$0,242 \cdot 10^{-3}$	198000	48
ГВК ₁ →ГВК ₇	$0,235 \cdot 10^{-3}$	196000	46

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Крок 5 (φ_5):

Складання математичної моделі задачі вибору ГВК з використанням МГГ.

Умова №1:

$$F(x) = (55x_1 + 54x_2 + 53x_3 + 52x_4 + 48x_5 + 48x_6 + 46x_7) \rightarrow \max$$

Умова №2:

$$(204000x_1 + 203000x_2 + 200000x_3 + 201000x_4 + 197000x_5 + 198000x_6 + 196000x_7) \leq 1000000$$

(для зручності ділимо праву і ліву частину рівняння на 1000);

$$(204x_1 + 203x_2 + 200x_3 + 201x_4 + 197x_5 + 198x_6 + 196x_7) \leq 1000;$$

Умова №3:

$x_1, \dots, x_7$ – цілі числа.

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Крок 6 (φ_6):

Почергове прийняття значення кожного параметра x_i рівним 1.

Знаходження рішення $S_i(x_i)$, що позначено як $S_k(x_k)$, яке належить множині $S(x)$, задовольняє нерівності:

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i \cdot x_i \leq N \leq \sum_{i=1}^k c_i \cdot x_k.$$

Отже за отриманою нерівністю:

$$808 \leq 1000 \leq 1005$$

можна визначити $S_k(x_k)$: $S_k(x_k) = S_5(x_5)$

Відкинемо принцип цілочисельності (Умова №3) для кожного i -го x , тобто x_i .

У множині рішень $S(x)$ приймемо:

$$x_i = 1, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad x_k = \frac{N - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \cdot x_i}{c_k}, \quad x_i = 0, \quad i = \overline{k+1, n}$$

Отже:

$$x_i = 1, \quad \text{при } i = \overline{1, 4}, \quad x_k = \frac{1000 - 808}{197} = 0,975, \quad x_i = 0, \quad \text{при } i = \overline{6, 7}$$

Множина отриманих рішень має вигляд:

$$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(0,975), S_6(0), S_7(0)).$$

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Крок 7 (φ_7):

Підстановка значень x_i отриманих за кроком 6, у рівняння цільової функції $F(x)$:

$$F(x) = (55 \cdot 1 + 54 \cdot 1 + 53 \cdot 1 + 52 \cdot 1 + \\ + 48 \cdot 0,975 + 48 \cdot 0 + 46 \cdot 0) = 260,8$$

Крок 8 (φ_8):

Гілкування можливих рішень з почерговим розглядом двох випадків:

- кожне x_i залишається таким як у початковій множині рішень;
- кожне x_i змінюється на протилежне,
 - тобто розглядаються два випадки
- $x_i = 1$ або $x_i = 0$.

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Крок 9 (φ_9):

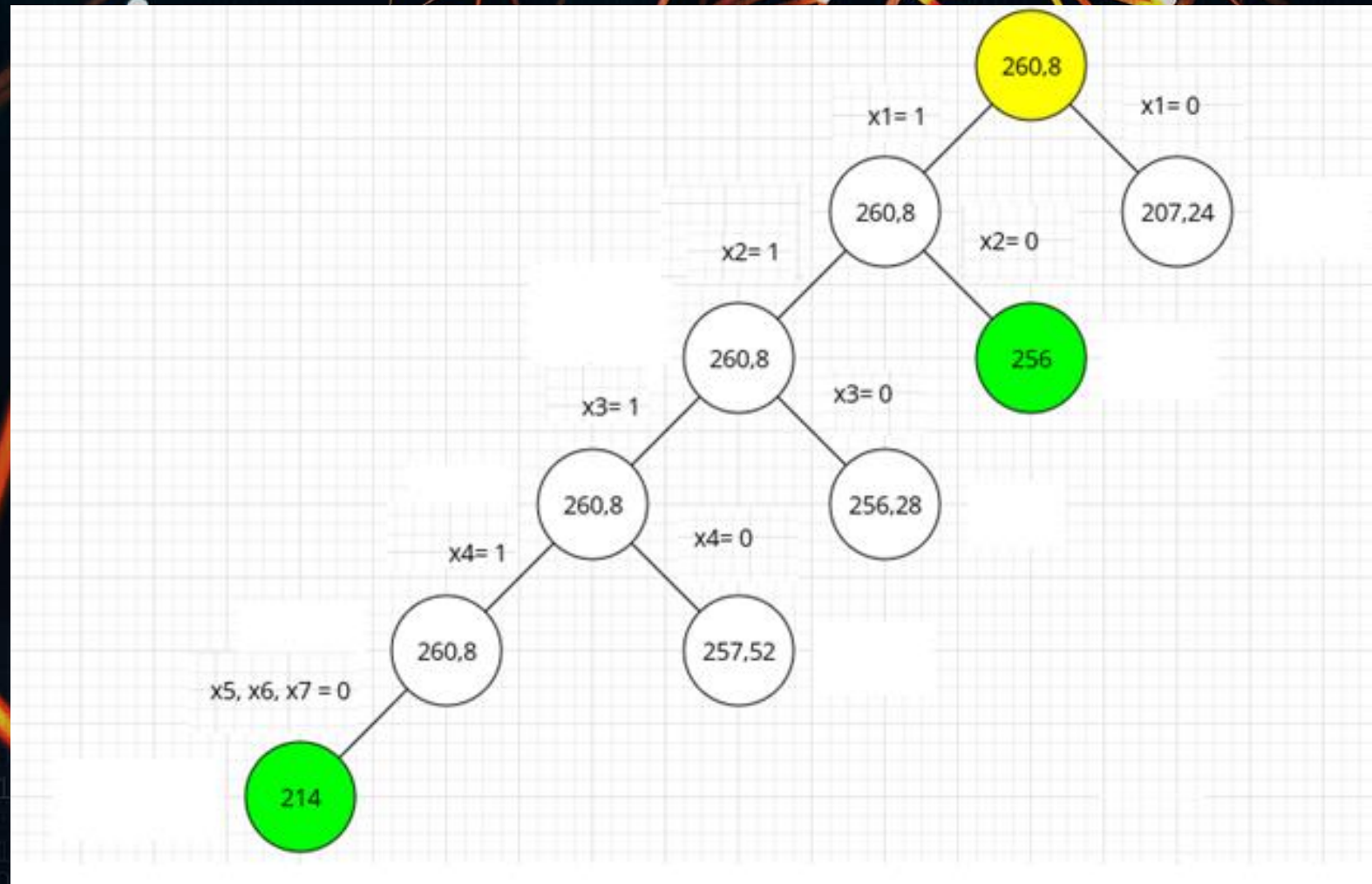
Ітераційне повторення
кроків 6-8 визначає 2
варіанти значень
цільової функції $F(x)$ з
вибором серед них
максимального значення
 $F(x)_{\max}$.

Значення цільової функції $F(x)$		Множина рішень, за якою обраховано $F(x)$
Початкова множина рішень	260,8	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(0,975), S_6(0), S_7(0))$
Ітераційний перебір значень		
при $x_1 = 1$	260,8	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(0,975), S_6(0), S_7(0))$
при $x_1 = 0$	207,24	$S(x) = (S_1(0), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(1), S_6(0,005), S_7(0))$
при $x_2 = 1$	260,8	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(0,975), S_6(0), S_7(0))$
при $x_2 = 0$	256	$S(x) = (S_1(1), S_2(0), S_3(1), S_4(1), S_5(1), S_6(1), S_7(0))$
при $x_3 = 1$	260,8	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(0,975), S_6(0), S_7(0))$
при $x_3 = 0$	256,28	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(0), S_4(1), S_5(1), S_6(0,985), S_7(0))$
при $x_4 = 1$	260,8	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(0,975), S_6(0), S_7(0))$
при $x_4 = 0$	257,52	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(0), S_5(1), S_6(0,990), S_7(0))$
при $x_5 = 1$	(не задовольняє умову №2)	Закінчення перебору значень
Отже, рішення, що задовольняє умові № 2		
$x_5, x_6, x_7 = 0$	214	$S(x) = (S_1(1), S_2(1), S_3(1), S_4(1), S_5(0,975), S_6(0), S_7(0))$

Тестовий приклад вибору ГВК з використанням МГГ

Крок 10 (φ_{10}):

Серед усіх значень цільової функції, які відмічені на дереві рішень, обирається максимальне, в даному прикладі це значення $F(x) = 256$ з врахуванням обмежень за слайдом 15



Напрямки подальших досліджень

1. Розробка універсального програмного продукту, що дозволяє автоматизовано розв'язувати задачі з використанням МГТ, який є інваріантним щодо розмірності та змістовності (різногалузевості) розв'язуваних задач.
2. Проведення досліджень щодо вибору ГВК за іншими локальними критеріями (проявами) РМСТ.
3. Програмна реалізація виконаних розрахунків.

Загальні висновки

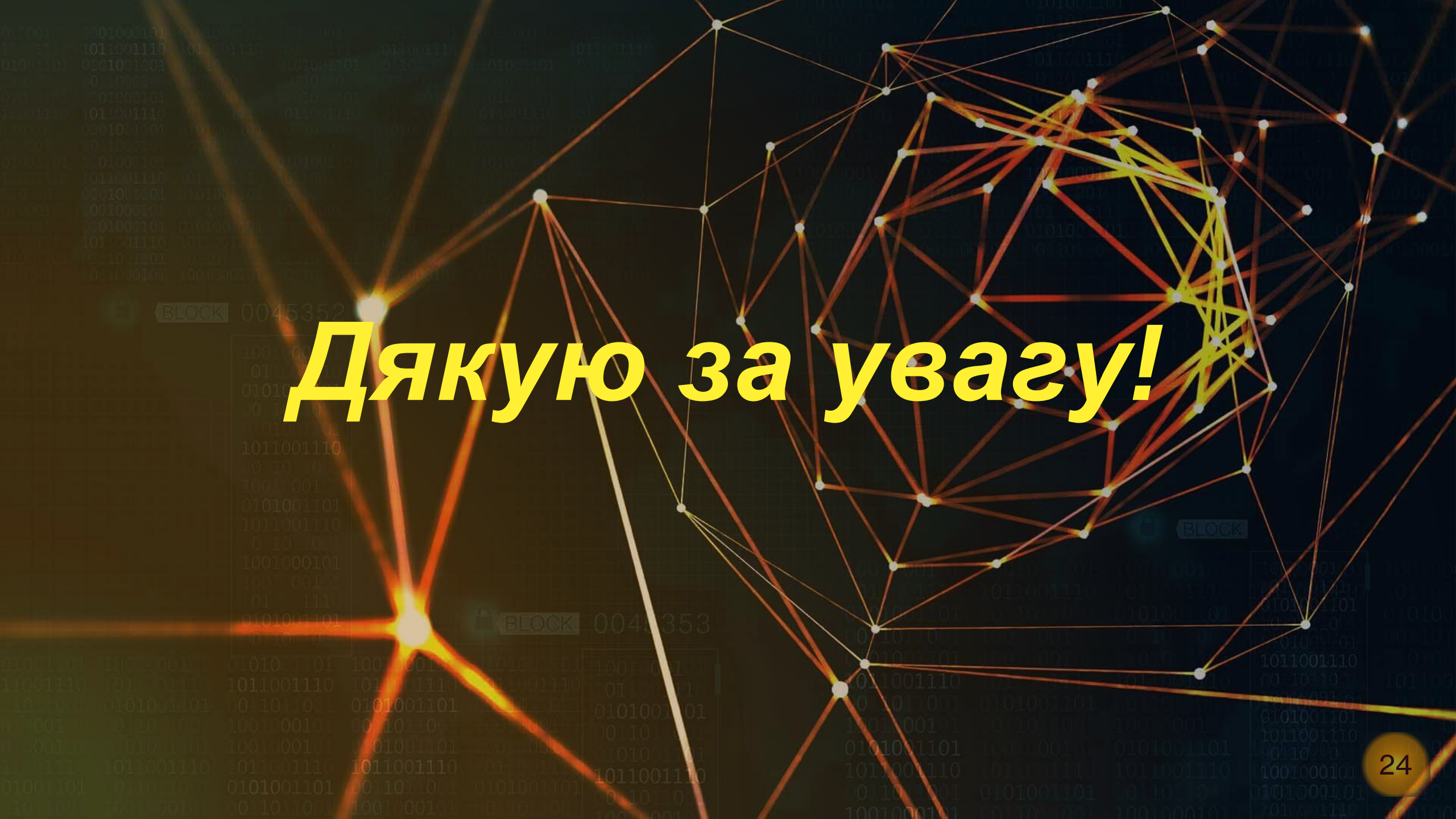
1. Проведені дослідження щодо вибору ГВК за критерієм продуктивності з використанням методу гілок та границь показало доцільність використання цього підходу на етапі вибору технологічних структур (ГВК) при технологічній підготовці РМСВ. Змістовна сутність щодо використання даного методу вказує на обґрунтовану доцільність використання даного методу в частині зменшення кількості розглядуваних варіантів (альтернатив) за рахунок гілкування. Це в свою чергу є ознакою підвищення якості технологічної підготовки роботизованих механоскладальних виробництв (підвищення обґрунтованості рішень, зменшення часу на відповідні розрахунки).
2. Проаналізована сутність існуючих методик вказує на можливість використання даного методу при виборі ГВК за іншими локальними критеріями (проявами) РМСТ.

Загальні висновки

3. Висвітлено сутність МГГ, що полягає в неповному переборі усіх можливих рішень за рахунок відсікання на кожному ітераційному кроці безперспективних множин, за рахунок чого зменшується кількість обчислюваних процедур.
4. Виконана формалізована постановка завдання, що ілюструє один з можливих принципів використання даного методу для покращення якості ТП РМСВ.
4. Запропоновано методику вибору ГВК за критерієм продуктивності, що покроково описує розв'язання розглянутої задачі. Розроблена структура інформаційного забезпечення для задач, що можуть бути розв'язані за допомогою методу гілок та границь. Вона є складовою запропонованого підходу і передбачає подальшу інтеграцію в методичне забезпечення та подальшу її автоматизовану реалізацію.
5. Розв'язано тестовий приклад за запропонованою вище методикою, який свідчить про працездатність даного методу.

Загальні висновки

6. Визначено напрямки подальших досліджень, що за змістом направлені на розробку універсального програмного продукту, що дозволяє автоматизовано розв'язувати задачі з використанням МГГ, що є інваріантним щодо розмірності та змістовності (різногалузовості) розв'язуваних задач.



Дякую за увагу!