

ЛЕКЦІЯ № 9

ТЕМА: Методи моделювання багатокритеріальних задач.

ПИТАННЯ:

1. Метод оптимізації за головним критерієм та метод послідовних поступок.
2. Багатокритеріальна оптимізація за нелінійною схемою компромісів.
3. Ієрархічна система критеріїв як декомпозиція властивостей альтернатив.

Лектор: професор кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки доктор технічних наук, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки КОВБАСЮК Сергій Валентинович

МЕТОД ГОЛОВНОГО КРИТЕРІЮ

Суть методу головного критерію полягає у наступному:

1. Один з критеріїв $q_1(d), \dots, q_p(d)$ визначають як головний, наприклад, критерій $q_1(d)$ – зарплата для обраної роботи.
2. Для інших критеріїв $q_j(d)$, $j = 2, \dots, p$, наприклад, терміну відпустки, відстані до офісу тощо, вводять обмеження.
3. Далі розв'язують однокритеріальну задачу

$$q_1(d) \rightarrow \max \quad (2.1)$$

з обмеженнями

$$q_2(d) \leq q_2^0, q_3(d) \leq q_3^0, \dots, q_p(d) \leq q_p^0. \quad (2.2)$$

Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації зводиться до відомої математичної задачі знаходження умовного екстремуму однієї змінної – головного критерію

$$d^* = \arg \max_{d \in D} \{q_1(d) \mid q_j(d) \leq q_j^0, j = 2, \dots, p\}.$$

Основна проблема, яка виникає при реалізації методу головного критерію – вибір прийнятних значень q_j^0 , $j = 2, \dots, p$, які відокремлюють область D^0 обмежень (2.2) на множині D .

Зрозуміло, що при визначенні q_j^0 , $j = 2, \dots, p$ слід уникати двох крайніх випадків:

- $D / D^0 = \emptyset$, коли обмеження (2.2) існують для всіх точок $d \in D$ (у цьому випадку не зрозуміло для чого потрібні додаткові критерії, крім головного);
- $D \cap D^0 = \emptyset$, тобто серед точок, для яких існують обмеження (5.2), нема жодної допустимої альтернативи.

Приклад 4.1.

Таблиця 4.1. Варіанти альтернатив місця роботи

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв)
1	9000	20	60
2	5000	30	20
3	7000	36	40
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	6000	30	10
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

Нехай з точки зору ОПР головним критерієм обрано критерій q_1 – зарплата. Задаймо обмеження для інших двох критеріїв:

- термін відпустки – не менше ніж 30 днів;
- термін поїздки – не більше ніж 40 хв.

Відповідно з даними табл. 4.1 таким обмеженням задовольняють лише варіанти {2, 3, 5, 6, 9}.

Таблиця 5.1. Варіанти альтернатив, що задовольняють обмеженням

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв)
2	5000	30	20
3	7000	36	40
5	4000	60	15
6	6000	30	10
9	6500	35	40

МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ ПОСТУПОК

КРОК 1

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ \dots \succ q_p(d).$$

$$q_1^* = \arg \max_{d \in D} q_1(d).$$

Особливість оптимізації за методом послідовних поступок полягає у тому, що відхилення від оптимального рішення за більш важливими критеріями, вимагає поліпшення значень менш важливих таким чином, щоб сумарний вииграш за менш важливими критеріями істотно перевищував втрату ефективності за більш важливими.

Формально це означає, що після визначення d_1^* призначаємо допустимому поступку Δ_{q_1} для критерію $q_1(d)$ і

КРОК 2

$$q_2^* = \arg \max_{\substack{d \in D \\ q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q_1}}} q_2(d).$$

КРОК 3

$$q_3^* = \arg \max_{d \in D} q_3(d).$$

$$q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q_1}$$

$$q_2(d) \geq q_2^* - \Delta_{q_2}$$

.....

КРОК N

Процес продовжується доки не буде розв'язана однокритеріальна оптимізаційна задача для останнього критерію $q_p(d)$

Приклад 7.1.

КРОК 1

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ q_3(d)$$

$$q_1^* = 9000 \text{ грн (варіанти 1 та 7)}$$

КРОК 2

Призначаємо допустиму поступку для критерію $q_1(d)$
 $\Delta_{q_1} = -1000 \text{ грн.}$

$$q_2^* = \arg \max_{q_1(d) \geq 8000 \text{ грн}} q_2(d).$$

Варіант 4

КРОК 3

$$\Delta_{q_1} = -5 \text{ днів.}$$

Варіант 4 (з можливих 4 та 7)

Критерій оптимальності на основі згортки професора Вороніна А.М.

Скалярна згортка проф. Вороніна А.Н. реалізує **концепцію нелінійної схеми компромісів**. У цьому випадку схема компромісів полягає у відповіді на питання: скількома одиницями виграшу по одному критерію якості можна компенсувати неминучий програш одиниць по іншому критерію.

Методика вироблення оптимального рішення багатокритерійної задачі згідно зі згортою проф. Вороніна А. М.:

- 1) Вибір критеріїв ефективності роботи системи.
- 2) Отримання експериментальних даних, що характеризують якість функціонування системи згідно з вибраними критеріями.
- 3) Визначення аналітичної залежності для критеріїв оптимальності згідно з отриманими експериментальними даними.
- 4) Рішення задачі багатокритерійної оптимізації згідно з вибраним критерієм якості (згортка проф. Вороніна А.М.).

$$\chi^* = \arg \min_{\chi \in G} \sum_{k=1}^d \gamma_k [1 - \varphi_{0k}(\chi)]^{-1}$$

де: χ - оптимізований параметр;
 G - область визначення функцій часткових критеріїв оптимальності;
 γ_k - коефіцієнт важливості (вага) k -ї критерійної функції;
 $\varphi_{0k}(\chi)$ — нормована функція k -го часткового критерію оптимальності;
 $K=1\dots d$ - коефіцієнт підсумовування по кількості часткових критеріїв якості;
 χ^* - мінімально можливе (для встановлених обмежень часткових критеріїв) значення оптимізованого параметра.

Розроблення моделі визначення оптимального кількісного складу РЛС БП РЛК

1. Вибір частинних критеріїв оптимальності.

$$\begin{aligned} O(n) &\rightarrow \max, \\ S(n) &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

$O(n)$ - точність визначення параметрів руху КА в БП РЛК

$S(n)$ - вартість комплексу

n - оптимізуємий (варійований) параметр : кількість вимірювачів

2. Формування аналітичних залежностей для частинних критеріїв оптимальності.

$$S(n) = 0,22 + 0,78 * n$$

Таблиця 10.1

Залежність точності і вартості БП РЛК з малими та великими базами від кількості РЛС

Кількість позицій	n	1	2	3	4	6
Точність	$O_m(n)$	1	1,43	1,72	2	2,45
Точність	$O_b(n)$	1	2,60	3,96	4,18	4,29
Вартість	$S(n)$	1	1,78	2,56	3,34	4,9

Модельні функції часткових критеріїв:

$$O(n) = o_0 + o_1 n + o_2 n^2,$$
$$S(n) = s_0 + s_1 n,$$

Результат згладжування розрахункових даних МНК:

$$O_M(n) = 0,5798 + 0,455n - 0,0241n^2,$$
$$O_B(n) = -1,0333 + 2,3018n - 0,2369n^2,$$
$$S(n) = 0,22 + 0,78 * n$$

3. Розрахунок оптимальної кількості вимірювачів в БП РЛК.

3.1. Встановимо область обмежень розв'язуваного завдання оптимізації для кожного частинного критерію.

$$\min O(n) = O(1) \leq (\varphi_1(n) = O(n)) \leq \max O(n) = O(6),$$
$$\min S(n) = S(1) \leq (\varphi_2(n) = S(n)) \leq \max S(n) = S(6).$$

3.2. Нормування частинних критеріїв оптимізації

$$\varphi_{01}(n) = \frac{\min O(n) = O(1)}{\varphi_1(n)},$$
$$\varphi_{02}(n) = \frac{\varphi_2(n)}{\max S(n) = S(6)}.$$

3.3. Оптимальна кількість вимірювачів в БП РЛК для двох критеріальних функцій визначається залежністю

$$n^* = \arg \min \sum_{k=1}^2 \gamma_k [1 - \varphi_{0k}(n)]^{-1},$$

де: n^* – оптимальна за критерієм «ефективність-вартість» кількість вимірювачів (у розглядаємій задачі – РЛС), що входять до складу БП РЛК.

Мінімальне значення функціонала визначається відповідно до виразу

$$\frac{d}{dn} \sum_{k=1}^2 \gamma_k [1 - \varphi_{0k}(n)]^{-1} = 0$$

або після диференціювання

$$\sum_{k=1}^2 \gamma_k [1 - \varphi_{0k}(n)]^{-2} \frac{d\varphi_{0k}(n)}{dn} = 0.$$

Оптимальною кількістю вимірювачів в БП РЛК є дійсний корінь рівняння:

$$\frac{\gamma_1 \frac{d}{dn} \varphi_{01}(n)}{(1 - \varphi_{01}(n))^2} + \frac{\gamma_2 \frac{d}{dn} \varphi_{02}(n)}{(1 - \varphi_{02}(n))^2} = 0.$$

$$- \frac{\gamma_1 \min Q(n)(q_1 + 2q_2 n)}{(q_0 + q_1 n + q_2 n^2)^2 \left(1 - \frac{\min Q(n)}{q_0 + q_1 n + q_2 n^2}\right)^2} + \frac{\gamma_2 S_1}{\max S(n) \left(1 - \frac{s_0 + s_1 n}{\max S(n)}\right)^2} = 0.$$

3.4. Пошук коренів рівнянь є заключним етапом визначення оптимальної кількості вимірювачів в БП РЛК

$$n_M^* = 2,92 \rightarrow n_M = 3$$

$$n_B^* = 2,12 \rightarrow n_B = 2$$

Таблиця 6.9

Значення цільової функції χ при цілих значеннях n

Кількість позицій n у БП РЛК		2	3	4
Значення вихідного функціоналу χ для	з великими базами	3,2	3,5	4,4
	з малими базами	5,2	4,5	5,1

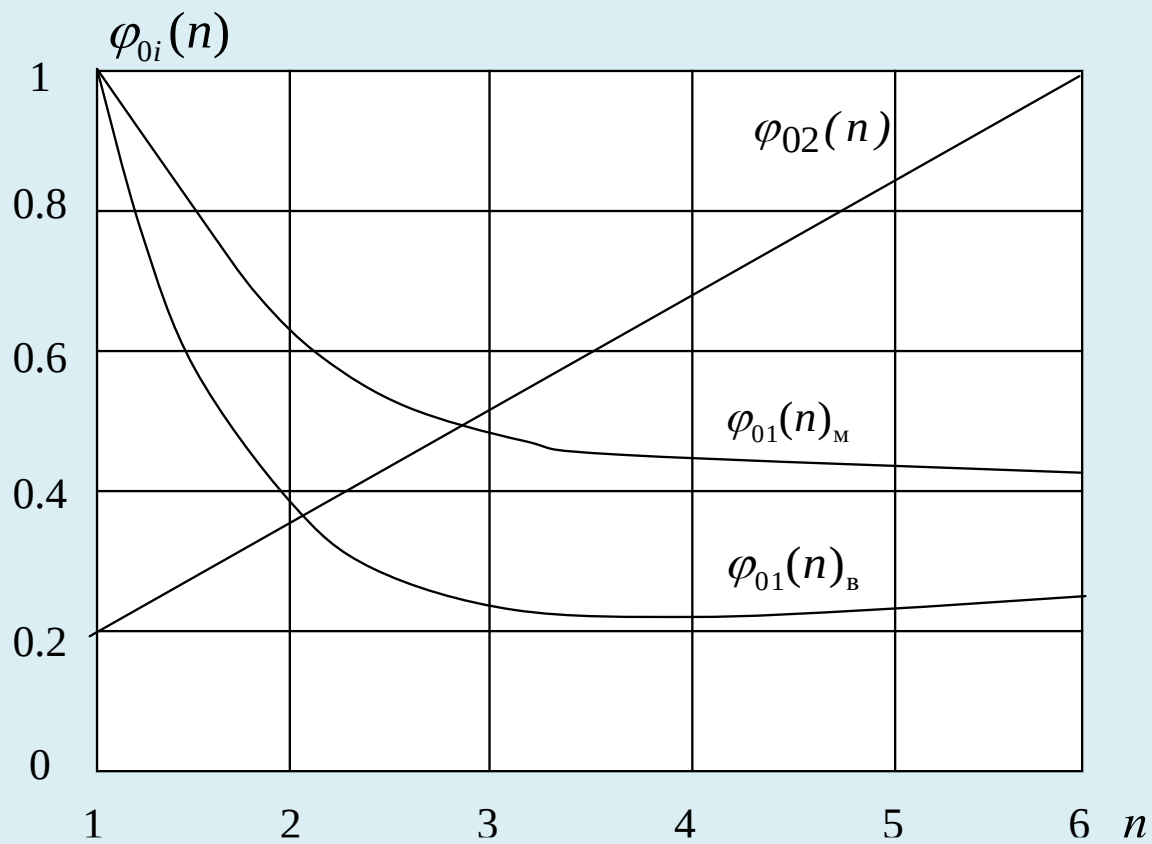


Рисунок 14.1. Графічне розв'язання задачі оптимізації кількості РЛС в БП РЛК

$$q^{(j-1)} = \{q_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{n^{(j-1)}}, j \in [2, m].$$

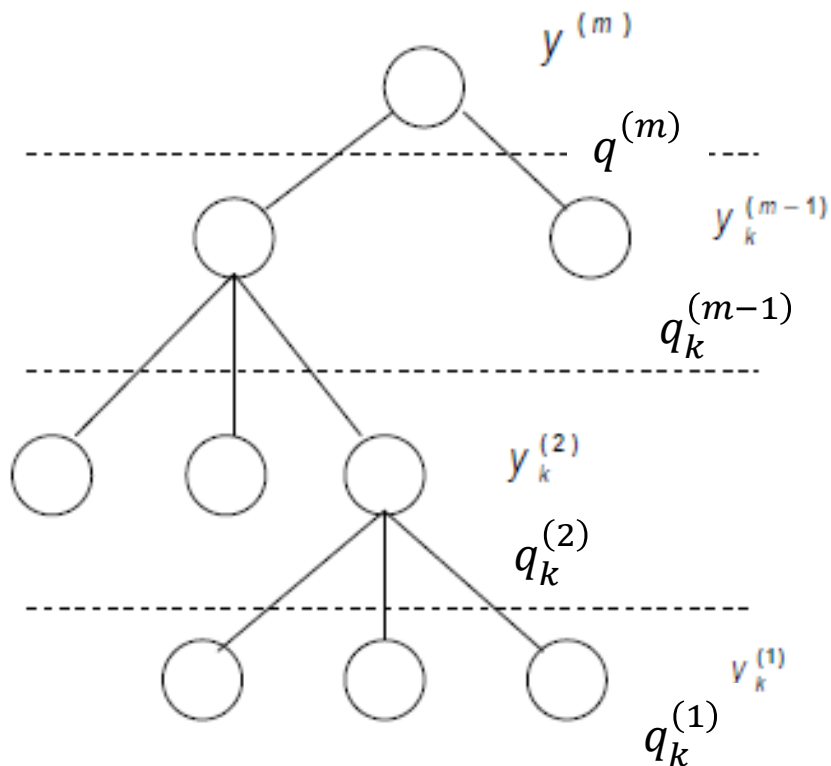


Рисунок 15.1

$$p_{ik}^{(j-1)} = \{p_{ik}^{(j-1)}\}_{k=1}^{n^{(j)}}, j \in [2, m].$$