2. ГЕОМЕТРІЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

Тема 2.5: Криві на поверхні еліпсоїда.

1. Нормальні перерізи.
2. Геодезична лінія.

Із множини кривих, які можна провести через дану точку поверхні еліпсоїда, особливу зацікавленість представляють плоскі перерізи, які утворюються від перетину поверхні еліпсоїда площиною, що проходить через нормаль до даної поверхні.

Треба зазначити, що, в загальному випадку, плоский переріз еліпсоїда є еліпс. Якщо нормальний переріз перпендикулярний площині екватора, то він перетворюються в меридіанний еліпс, а нормальний переріз в заданій точці, що проходить під азимутом 90° є першим вертикалом цієї точки. Перерізи, утворені площинами, паралельними площині екватора, будуть колами і називаються паралелями, а перерізи, які утворені площинами, що проходять через центр еліпсоїда називаються центральними перерізами.

В сфероїдній геодезії нормальні перерізи знаходять широке застосування, тому розглянемо їх детальніше.

1. Нормальні перерізи

Особливістю нормального перерізу є наявність у нього хоча б однієї геодезичної точки – точки, в якій головна нормаль кривої збігається з нормаллю до поверхні еліпсоїда. Через задану точку на поверхні можна провести скільки завгодно нормальних перерізів.

Якщо на поверхні еліпсоїда візьмемо дві точки *A* і *B* з широтами B_1 та B_2 відповідно (*рис. 2.12*), при цьому $B_2 > B_1$, то нормаль до поверхні еліпсоїда, проведена в точці *A* перетинає малу вісь ближче до центру еліпсоїда ніж нормаль в точці B, тобто

$$On_1 < On_2. \qquad (a)$$

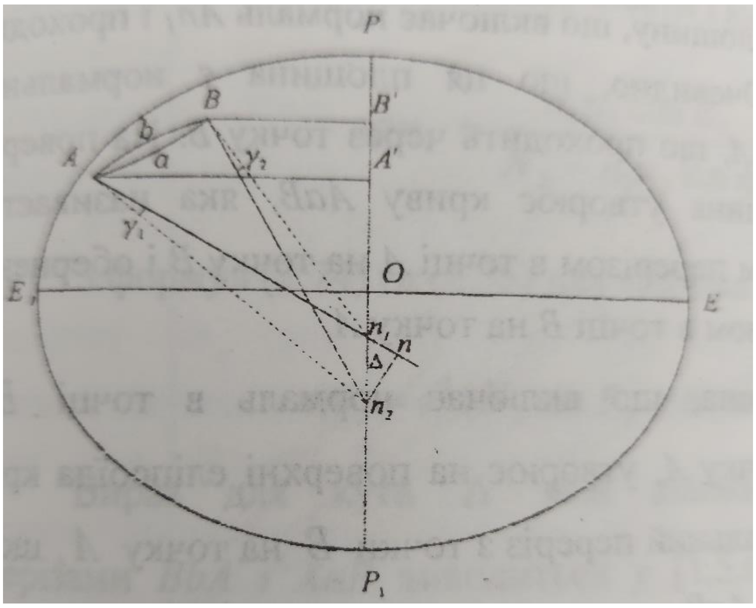

Рис. 2.12.

Ці нормалі – це дві перехресні в просторі прямі, що не перетинаються (якщо точки *A* і *B* не лежать на одному меридіані).

Доведемо, що нормальні перерізи між двома точками на еліпсоїді в загальному випадку не збігаються.

Із трикутника $AA'n_1$ (*рис. 2.12*) маємо

$$n_1A' = N_1\cos(90° - B_1) = N_1\sin B_1,$$

$$On_1 = n_1A' - A'O.$$

або

$$On_1 = N_1\sin B_1 - N_1(1-e^2)\sin B_1 = e^2N_1\sin B_1. \tag{2.74}$$

Із трикутника $BB'n_2$ (*рис. 2.12*) маємо

$$n_2B' = N_2\cos(90° - B_2) = N_2\sin B_2,$$

$$On_2 = n_2B' - B'O.$$

або

$$On_2 = N_2\sin B_2 - N_2(1-e^2)\sin B_2 = e^2N_2\sin B_2. \tag{2.75}$$

Отже, при $B_2 > B_1$ буде виконуватися умова (а); нормальні перерізи (криві *AaB* і *BbA*) при цьому розташуються так, як показано на *рис 2.12*, тобто крива *BbA* північніше кривої *AaB.*

Візьмемо площину, що включає нормаль An_1 і проходить через точку *B*. Очевидно, що ця площина є нормальною площиною в точці *A*, що проходить через точку *B*. На поверхні еліпсоїда ця площина утворює криву *AaB*, яка називається прямим нормальним перерізом в точці *A* на точку *B* і оберненим нормальним перерізом в точці *B* на точку *A*.

Інша площина, що включає нормаль в точці *B* і проходить через точку *A*, утворює на поверхні еліпсоїда криву *BbA* – прямий нормальний переріз з точки *B* на точку *A*, що не збігається з кривою *AaB*.

Ці дві криві *AaB* і *BbA* називаються взаємними нормальними перерізами.

Так, між двома точками еліпсоїда *A* і *B*, в загальному випадку, проходять два нормальних перерізи:

AaB – називається прямим нормальним перерізом для точки *A* і оберненим нормальним перерізом для точки *B*;

BbA – називається прямим нормальним перерізом для точки *B* і оберненим нормальним перерізом для точки *A*.

Знайдемо кут γ_1, під яким видно відрізок n_1n_2 із точки *A* (*рис. 2.12*). Із прямокутного трикутника nn_1n_2, в якому n_1n_2 є гіпотенузою, знайдемо

$$nn_1 = n_1n_2\sin B_1,$$

$$nn_2 = n_1n_2\cos B_1.$$

Тоді кут γ_1, можна визначити із прямокутного трикутника Ann_1.

$$\tan\gamma_1 = \frac{n_1n_2\cos B_1}{N_1 + n_1n_2\sin B_1}. \tag{2.76}$$

Аналогічним чином можна знайти і кут γ_2

$$\tan\gamma_2 = \frac{n_1n_2\cos B_2}{N_2 - n_1n_2\sin B_2}. \tag{2.77}$$

З формул (2.74) та (2.75) для відрізка n_1n_2 отримаємо

$$n_1n_2 = e^2(N_2\sin B_2 - N_1\sin B_1). \tag{2.78}$$

Вираз для кута *Δ* між взаємними нормальними перерізами *BbA* і *AaB* виводиться у курсі сферичної геодезії. З точністю до малих величин третього порядку $e^2\sigma^3$, де $\sigma = \frac{s}{N_m}$, запишемо

$$\Delta = \frac{1}{4}\varepsilon^2\sigma^2\cos^2 B_m \sin 2A\,. \tag{2.79}$$

Із формули (2.79) слідує, що величина *A* переходить в нуль двічі: при *A = 0* і при *A = 90°*. Іншими словами, взаємні нормальні перерізи збігаються, якщо пункти лежать на одному меридіані або на одній паралелі. Цей висновок справедливий лише з тією точністю, з якою виведена формула (2.79).

Крім кута між взаємними нормальними перерізами, розглянемо також лінійну розбіжність між ними, яка, очевидно, буде максимальною для середніх точок дуг *AaB* та *BbA* (*рис. 2.13*).

Формула для обчислення найбільшої лінійної розбіжності між перерізами *AaB* і *BbA* буде наступною

$$q_{max} = \frac{1}{16}N_m e^2\sigma^3\cos^2 B_m \sin 2A. \tag{2.80}$$

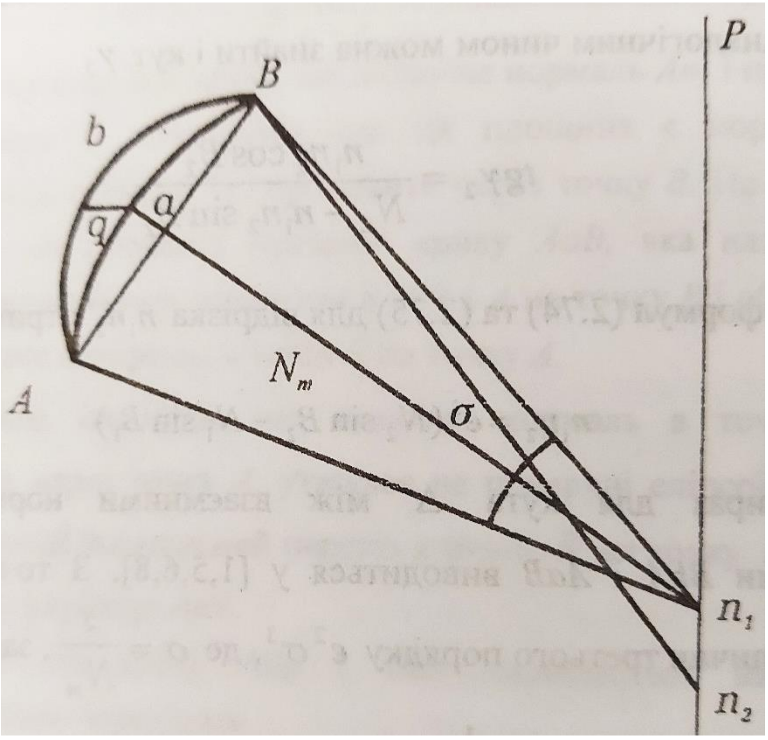

Рис. 2.13

Таблиця 2.2 дає представлення про числові значення величин *Δ* та q.

Таблиця 2.2

A, °	*B, °*	*s, км*	*Δ, "*	*q, мм*
45	50	30	0,003	0,1
45	50	100	0,031	3,7
45	50	150	0,056	12,8

Значення *Δ* та q показують, що для типових довжин сторін класичних геодезичних мереж, які створювались переважно методом тріангуляції, в 20-25 км подвійним характером нормальних перерізів можна не рахуватися. При опрацюванні першокласних тріангуляцій остаточні значення азимутів виводяться із сотими долями секунди, тобто похибки окремих обчислювальних процедур, при передачі азимута не повинні перевищувати ± 0,002-0,003".

Тому очевидно, що при високоточній передачі азимутів, коли сторони можуть перевищувати 30 км, приходиться рахуватися із кутовою різницею між взаємними нормальними перерізами.

Уявімо собі, що в точці A встановлений кутомірний прилад таким чином, що його вертикальна вісь збігається з нормаллю An_a (*рис. 2.14*); тоді, при наведені на точку B, площина візування збігається з площиною, що проходить через точки A, n_a, B, або, як вище було зазначено, з площиною прямого нормального перерізу із точки A на точку B. Перетином цієї площини з поверхнею еліпсоїда буде крива AaB.

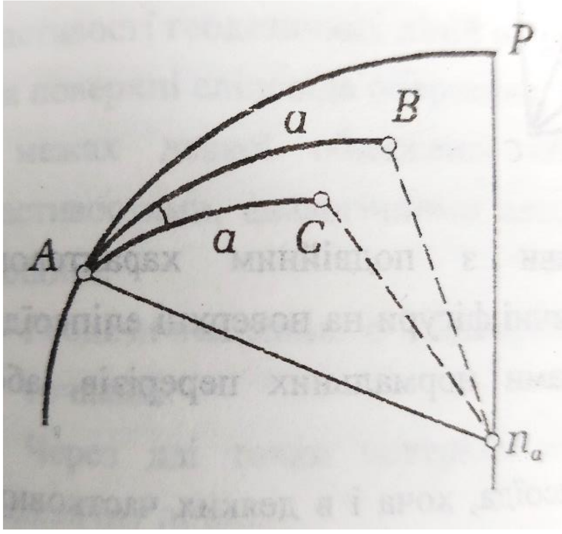

Рис. 2.14

При аналогічному наведені на точку С візирна площина перетне поверхню еліпсоїда по деякій кривій AaC, яка буде прямим нормальним перерізом із точки A на очку C. Горизонтальний кут в точці A між напрямами на точки B і C буде мірою двогранного кута BAn_aC між нормальними площинами в A, що проходять через точки B і C.

Отже, вимірювані в тріангуляції *горизонтальні кути на поверхні еліпсоїда є кутами між прямими нормальними перерізами в даній точці*.

Якщо взяти трикутник, у вершинах якого виміряні кути, то, внаслідок неспівпадіння прямих і обернених нормальних перерізів, отримана із вимірювань фігура буде мати шість сторін (*рис. 2.15*).

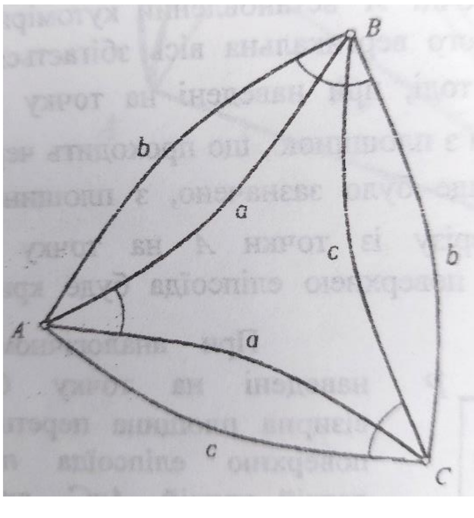

Рис. 2.15

Очевидно, що неспівпадання прямих і обернених нормальних перерізів приводить до того, що на поверхні еліпсоїда виміряні горизонтальні кути не утворюють замкнутого трикутника (виміряні кути на кожному пункті показані дугою).

Щоб не мати справи з подвійним характером нормальних перерізів, геометричні фігури на поверхні еліпсоїда можна утворювати або хордами нормальних перерізів, або геодезичними лініями.

Застосування хорд еліпсоїда, хоча і в деяких часткових випадках, приводить до виразів в замкнутій формі (замість нескінченних рядів), проте хорда не володіє таким узагальненням як геодезична лінія для розв’язування задач сфероїдної геодезії.

Отже, подвійний характер нормальних перерізів послужив однією із головних причин для утворення фігур на поверхні еліпсоїда із геодезичних ліній.

2. Геодезична лінія

Геодезичні лінії мають велике значення в сфероїдній геодезії. Якщо на площині розв’язування геодезичних задач проводиться з відрізками прямих та прямолінійними фігурами, а на сфері задачі розв’язуються з лініями великих кіл, то на еліпсоїді мають справу з геодезичними лініями та фігурами, що ними утворені.

Теорія геодезичних ліній розвинулась в зв’язку з широким застосуванням градусних вимірювань, значну роль в яких відігравали геодезичні трикутники. Дослідження, проведені з цього питання Клеро, Лежандром, Гауссом та іншими вченими, виявили властивості геодезичних ліній на різних поверхнях, в тому числі і на поверхні еліпсоїда обертання. Геодезична лінія на поверхні, в межах деякої обмеженої області, володіє наступними властивостями, аналогічними властивостям відрізку прямої на площині:

1) Геодезична лінія є найкоротшою відстанню між двома точками.
2) Через дві точки поверхні можна провести тільки одну геодезичну лінію.
3) Через задану точку поверхні в заданому напрямі проходить тільки одна геодезична лінія.
4) На гладкій поверхні матеріальна точка рухається за інерцією вздовж геодезичної лінії; натягнута на такій поверхні нитка розташовується по дузі геодезичної лінії.

А загалом, якщо стична площина в будь-якій точці лінії буде нормальна до поверхні, то така лінія і буде для даної поверхні геодезичною.

Площину, що вміщує дотичну до кривої в даній точці і точку на кривій, нескінченно близьку до точки дотику, називають стичною площиною.

Геодезичну лінію на поверхні еліпсоїда можна побудувати наступним способом. Сумістивши в даній точці A (*рис. 2.16*) вертикальну вісь кутомірного приладу з нормаллю до поверхні еліпсоїда, з допомогою візирної труби відмічають на цій поверхні в заданому напрямі точку a_1. Перемістивши прилад в точку a_1 та сумістивши його вертикальну вісь з нормаллю до поверхні еліпсоїда в цій точці, направляють візирну вісь на попередню точку A. Після цього, повернувши трубу на 180° відмічають наступну точку a_2. Потім переносять прилад в точку a_2, візують на точку a_1 і відмічають на 180° від неї положення точки a_3. Послідовно переходячи в точки a_3 a_4 і і т. д., відмічають точки a_4, a_5 … . Зменшуючи відстані між суміжними точками (в границі до нескінченно малої величини), отримаємо лінію, яка і буде геодезичною лінією заданого напряму.

Дійсно, площина, що проходить через будь-які три суміжні точки a_{i-1}, a_i, a_{i+i} буде стичною площиною, яка проходить через нормаль еліпсоїда в точці a, тобто будь-яка точка, що побудована таким чином буде геодезичною.

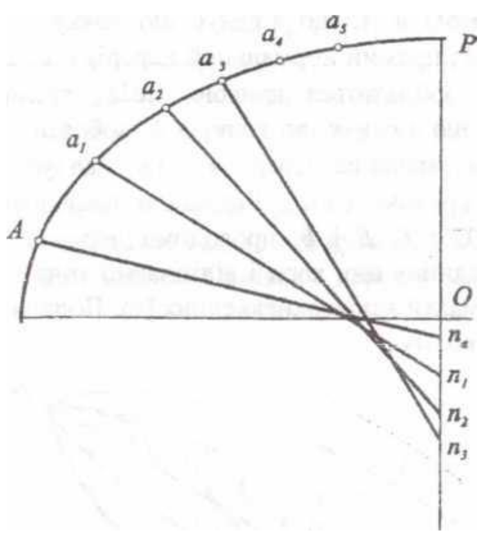

Рис. 2.16

В розглянутому методі побудови геодезичної лінії кожна наступна точка визначається двома їй попередніми при умові прямування до нуля відстані між кожними двома суміжними точками.

Існує інший спосіб побудови геодезичної лінії між точками A і B. Нехай AaB – прямий нормальний переріз в точці А, а BbA – в точці B (*рис. 2.17*). З'єднаємо точки A і B хордою; проведемо нормаль із середини даної хорди до поверхні еліпсоїда і позначимо точку перетину цієї нормалі з поверхнею еліпсоїда через C.

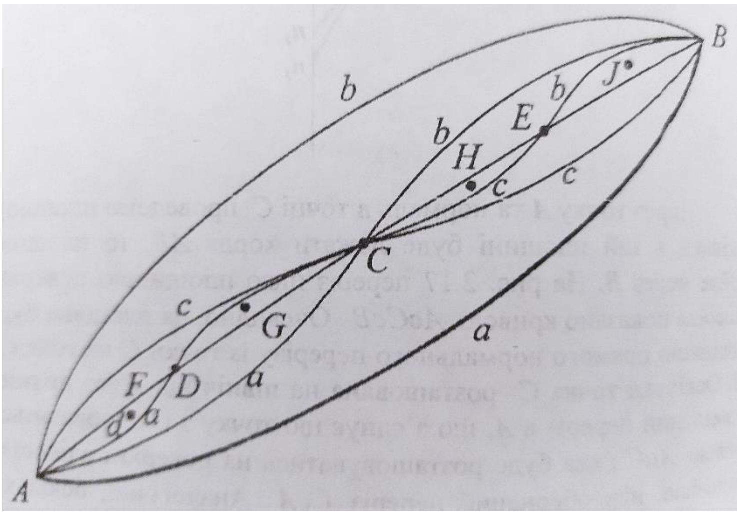

Рис. 2.17

Через точку A та нормаль в точці C проведемо площину. Оскільки в цій площині буде лежати хорда AB, то площина пройде через B. На *рис. 2.17* переріз цією площиною поверхні еліпсоїда показано кривою $AcCcB$. Очевидно, ця площина буде площиною прямого нормального перерізу із точки C на точки A і B. Оскільки точка C розташована на північ від A, то прямий нормальний переріз в A, що з'єднує цю точку з C, зобразиться кривою AaC, яка буде розташовуватись на поверхні еліпсоїда південіше, ніж обернений переріз CcA. Аналогічно, оскільки точка B розташована на північ від C, то прямий нормальний переріз в точці B, що з'єднує точки B і C, зобразиться кривою BbC, яка буде розташована північніше нормального перерізу CcB. З'єднавши хордами точки A і C та C і B, знайдемо на цих хордах середні точки і в них проведемо нормалі до поверхні еліпсоїда (нехай перетини цих нормалей з поверхнею еліпсоїда будуть відповідно в D і E).

Проведемо нормальну площину в D через A і в той же час через точку C. На поверхні еліпсоїда отримаємо криву $AdDdC$, що буде мати нормаль в точці D. Аналогічно отримаємо криву $CcEeB$, що має нормаль в точці E. Очевидно, прямий нормальний переріз в A, що з'єднує цю точку з D зобразиться кривою AaD; прямий нормальний переріз в C, що з'єднує цю точку з D зобразиться кривою CcO; прямий нормальний переріз в B, що з'єднує цю точку з E, зобразиться кривою BbE, а прямий нормальний переріз в C, що з'єднує цю точку з E, зобразиться кривою CcE. З'єднавши послідовно хордами A і D, D і C, C і E, E і B, проводимо нормалі до поверхні еліпсоїда в серединах цих хорд і відмічаємо точки F, G, H, J перетину цих нормалей з поверхнею еліпсоїда. Подальші дії аналогічні вище наведеному.

Якщо представити продовження цього процесу до нескінченності, то в границі нього ми прийдемо до елементарних хорд, кінці яких дадуть на поверхні еліпсоїда неперервну криву, що розташована між точками A і B. При цьому площина, що проходить через нормаль до еліпсоїда, яка проведена із середини деякої елементарної хорди і через саму хорду, перетвориться в стичну площину отриманої кривої в точці, що відповідає середині даної хорди. Тому побудовані точки утворять неперервну криву $AFDGCHEJB$, яка і буде геодезичною лінією між A і B, оскільки виконана умова, що визначає геодезичну лінію: в кожній точці її нормаль до поверхні буде лежати в стичній площині кривої.

З достатньою точністю можна прийняти, що при азимутах, не близьких до 90 або 270°, нормальний переріз, що проходить через нормаль до поверхні еліпсоїда, яка проведена із середини хорди A і B, ділить кути між взаємними нормальними перерізами навпіл. Оскільки переріз $AcCcB$ (*рис. 2.17*) ділить навпіл кути при A і B між кривими AaB і BbA, переріз $AdDdC$ ділить навпіл кути при A і C між кривими AaC і AcC, то скористаємось вказаною властивістю кривих на поверхні еліпсоїда для виводу кута між геодезичною лінією і прямим нормальним перерізом. Якщо Δ – кут між взаємними нормальними перерізами в точці A, тобто між кривими AaB і BbA, то δ – кут першого елемента геодезичної лінії в A з прямим нормальним перерізом на B, тобто з кривою AaB (*рис. 2.18*).

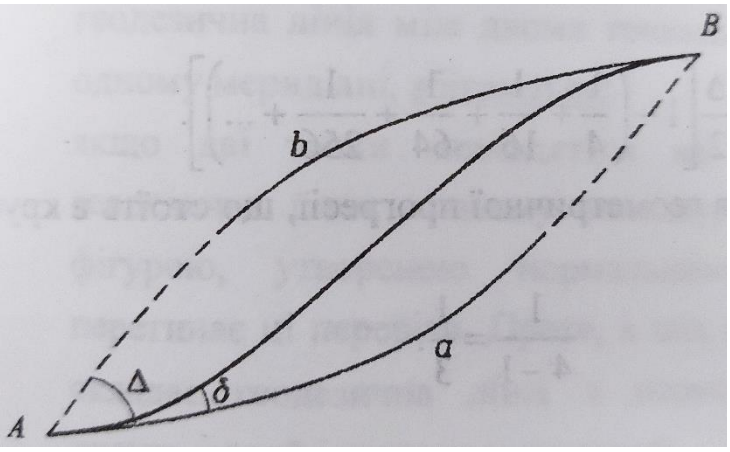

Рис. 2.18

Будемо мати такі криві між кривими:

AcC і AaB ……… $\Delta/2$,

AcC і AaC ……… $\Delta/4$,

AdD і AaC ……… $\Delta/8$,

AdD і AaB ……… $\Delta/2 - \Delta/8$,

AdD і AaD ……… $\Delta/32$,

AdD і AfD ……… $\Delta/16$,

AfD і AaB ……… $\Delta/2 - \Delta/8 - \Delta/32$, тощо.

По аналогії з вище наведеним процесом утворення кутів між кривими, в границі кут між кривою *AaB* та першим елементом геодезичної лінії в *A* буде:

$$\delta = \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta}{8} - \frac{\Delta}{32} - \frac{\Delta}{128} - \frac{\Delta}{512} - \cdots,$$

$$\delta = \frac{\Delta}{2}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256} - \cdots\right).$$

Або

$$\delta = \frac{\Delta}{2}\left\{1 - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots\right)\right\}.$$

Сума членів геометричної прогресії, що стоїть в круглих дужках, буде

$$\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

Відповідно,

$$\delta = \frac{\Delta}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\Delta}{3}.$$

або з врахуванням (2.79)

$$\delta = \frac{1}{12} e^2 \sigma^2 \cos^2 B_m \sin 2A\,. \tag{2.81}$$

Отже, кут між геодезичною лінією, що з'єднує точки *A* і *B*, та прямим нормальним перерізом в кожній з цих точок дорівнює 1/3 кута між прямим і оберненим нормальними перерізами в даній точці.

Розташування геодезичної лінії відносно взаємних нормальних перерізів, в загальному випадку, показано на *рис. 2.18*; пунктирними лініями позначені продовження дуг нормальних перерізів.

В цілому, геодезична лінія на всьому своєму проміжку між заданими точками завжди ближче розташовується до прямого нормального перерізу. Якщо азимути геодезичної лінії близькі до 0 і 90°, розташування геодезичної лінії у відношенні нормальних перерізів дещо інше. Розглянемо окремо ці два випадки розташування геодезичної лінії відносно взаємних нормальних перерізів:

– якщо азимут A_{12} = 0 або 180°, то тоді кут δ буде рівний нулю (2.81), тобто прямий і обернений перерізи та геодезична лінія між двома точками, що знаходяться на одному меридіані, збігаються:
– якщо дві точки знаходяться на одній паралелі, то геодезична лінія, в цьому випадку, або проходить поза фігурою, утвореною нормальними перерізами, або перетинає ці перерізи. Проте, в цих випадках, кут δ, що складає геодезична лінія з нормальними перерізами, досить малий і тому ним нехтують.

Диференційне рівняння геодезичної лінії є рівнянням Ейлера для варіаційної проблеми найкоротшої відстані між двома точками на довільній поверхні і було виведене ним на основі законів механіки. Вивід рівняння геодезичної лінії із геометричного її визначення належить Лагранжу. Подальші дослідження цього питання проведені Гауссом та Бесселем.

Детальний вивід диференційного рівняння геодезичної лінії можна знайти в курсі сфероїдної геодезії. Кінцевий вигляд цього рівняння наступний

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B} \sin B. \tag{2.82}$$

Рівняння (2.82) має важливе значення для дослідження геодезичної лінії, а разом з рівняннями (2.47) та (2.48) є вихідним для розв'язування прямої та оберненої геодезичних задач на поверхні еліпсоїда. Із рівнянь (2.82) та (2.47) знайдемо

$$\frac{dA}{dB} = \frac{M \sin B}{N \cos B} \tan A.$$

Приймаючи до уваги, що

$$r = N \cos B = a \cos u,$$

$$\cos u = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

отримаємо

$$\frac{dA}{\tan A} = \frac{a \sin u du}{a \cos u} = \frac{d(a \cos u)}{a \cos u} = -\frac{dr}{r}.$$

Після інтегрування

$$\ln \sin A = -\ln r + \ln c.$$

Або

$$r \sin A = a \cos u \sin A = N \cos B \sin A = c = const \tag{2.83}$$

де c – постійна інтегрування. Рівняння (2.83) називають рівнянням Клеро. Із цього рівняння слідує, що на поверхні еліпсоїда добуток радіуса паралелі на синус азимута геодезичної лінії постійний для всіх точок геодезичної лінії. Постійну c можна знайти за широтою u, та азимутом A, в початковій точці геодезичної лінії, тобто

$$c = \cos u_1 \sin A_1. \tag{2.84}$$