

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 1

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для проведення практичних занять з навчальної дисципліни
«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «магістр» спеціальності
174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та
робототехніка»
освітньо-професійна програма «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка»
факультет комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки і робототехніки

Рекомендовано на засіданні кафедри
метрології та інформаційно-
вимірювальної техніки
27 лютого 2024 р., протокол № 2

Розробник: д.т.н., професор, завідувач кафедри метрології та
інформаційновимірювальної техніки ПОДЧАШИНСЬКИЙ Юрій

Житомир
2024

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 2

Методичні вказівки для проведення практичних занять з дисципліни «Основи наукових досліджень» для студентів спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»/ Укладач Ю.О. Подчашинський. – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2024.– 32 с.

Укладач: Ю.О. Подчашинський

Рецензенти:

д.т.н., доцент, професор кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна Кирилович В.А.

к.т.н., доцент, доцент кафедри робототехніки, електроенергетики та автоматизації ім. проф. Б.Б. Самотокіна Гуменюк А.А

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 3

ЗМІСТ

	стор.
1. Мета і завдання практичних занять	4
2. Попередня обробка результатів вимірювань. Застосовування методів виключення результатів з грубими похибками	5 2.1.
Завдання попередньої обробки експериментальних даних	5
2.2. Методи виключення результатів з грубими похибками	5
2.3. Критерій Ірвіна	7
2.4. Критерій Романовського	7
2.5. Критерій Діксона	8
2.6. Критерії «Зс», Райта	9
2.7. Критерій Смирнова	10
2.8. Критерій Шовене	11
3. Опрацювання результатів сумісних вимірювань	12
3.1. Обчислення оцінок лінійної функції за методом найменших квадратів	12
3.2. Метод оцінок на основі ортогональної регресії	14
4. Завдання на практичні заняття	16
Додаток А. Коефіцієнт довіри t_{α} (квантилі розподілу Стюдента)	22
Додаток Б. Значення функції нормального розподілу	22
Додаток В.	
В.1. Приклад виконання завдань	23
В.2. Опрацювання результатів рівноточних багатократних вимірювань	24
Література	32

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Мета практичних занять - вивчення на базі сучасного математичного апарату методів обробки результатів експериментальних наукових досліджень та набуття магістрантами необхідних знань, пов'язаних з аналізом проблемних ситуацій і методів пошуку оптимальних рішень. На основі концептуальних моделей і методів обробки результатів наукових експериментів сформувати у магістрантів практичні навички і уміння прийняття обґрунтованих і професійно-грамотних рішень в практиці розробки та експлуатації систем управління.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 4

Основними завданнями практичних занять є набуття магістрантами знань та умінь практичного застосування методів обробки результатів наукових досліджень, що використовують алгоритмічні методи обробки вимірювальної інформації.

У методичних рекомендаціях викладена сукупність операцій, здійснюваних над результатами вимірювань об'єкту досліджень з метою отримання інформації про його властивості. Одним з головних завдань експериментального дослідження є перевірка математичної моделі об'єкту, тобто опису у кількісній формі взаємозв'язку між вхідними і вихідними параметрами об'єкту. Другім завданням обробки отриманої в результаті експерименту вимірювальної інформації є завдання оптимізації, тобто знаходження такої комбінації впливаючих незалежних змінних, при якій вибраний показник оптимальності набуває екстремального значення.

В процесі вимірювань, подальшої обробки даних, а також формалізації результатів у вигляді математичної моделі, виникають похибки і втрачається частина інформації, що міститься в початкових даних. Застосування методів обробки експериментальних даних дозволяє визначити точність математичної моделі і судити про її адекватність, підвищити точність отриманих результатів.

2. ПОПЕРЕДНЯ ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ. ЗАСТОСОВУВАННЯ МЕТОДІВ ВИКЛЮЧЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ З ГРУБИМИ ПОХИБКАМИ

2.1. Завдання попередньої обробки експериментальних даних

Загальним завданням попередньої обробки експериментальних даних є виключення спостережень, що містять грубі похибки, а також зменшення впливу систематичної складової похибок вимірювання. При однократному виробничому вимірюванні така попередня обробка ускладнена. Багатократні вимірювання дають деяку сукупність результатів, яка має бути оброблена для отримання найбільш достовірного значення вимірюваної величини і оцінки його точності.

Перш за все, з сукупності експериментальних даних слід виключити результати спостережень, що в явному вигляді містять грубі похибки і тому помітно відрізняються від інших результатів. Якщо повної упевненості в наявності грубої похибки немає, то такий результат слід залишити у вибірці, а потім перевірити правомірність його віднесення до неї (за допомогою відповідних статистичних критеріїв).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 5

2.2. Методи виключення результатів з грубими похибками

Для виключення грубих похибок застосовують апарат перевірки статистичних гіпотез. У метрології використовуються статистичні гіпотези, під якими розуміють гіпотези про вид невідомого розподілу, або про параметри відомих розподілів.

Разом з висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що суперечить їй. Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу. А конкуруючою (альтернативною) називають ту, яка суперечить нульовій.

При висуненні і прийнятті гіпотези можуть мати місце наступні чотири випадки:

- 1) гіпотеза приймається, причому й насправді вона правильна;
- 2) гіпотеза вірна, але помилково відкидається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою першого роду, а ймовірність її появи позначають рівнем значущості q ;
- 3) гіпотеза відкидається, причому насправді вона невірна;
- 4) гіпотеза невірна, але помилково приймається. Помилку, що виникає при цьому, називають помилкою другого роду, а ймовірність її появи позначають β .

- 5) Величину $1-\beta$, тобто ймовірність, що гіпотеза буде знехтувана, коли вона помилкова, називають потужністю критерію.

Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень) називають сукупність значення критерію, при яких гіпотезу приймають. Критичною називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відкидають. Область прийняття гіпотези і критична область розділені критичними точками, що дорівнюють табличним значенням критеріїв.

Перевірку статистичної гіпотези проводять для прийнятого рівня значущості q (приймається рівним 0,1; 0,05; 0,01 тощо). Так, прийнятий рівень значущості $q=0,05$ означає, що висунута нульова статистична гіпотеза може бути прийнята з довірчою ймовірністю $p=0,95$. Або є ймовірність відкинути цю гіпотезу (зробити помилку першого роду), що дорівнює $p = 0,05$.

Нульова статистична гіпотеза підтверджує належність "підозрілого" результату вимірювання (спостереження) даних групі вимірювань, що перевіряється. Формальним критерієм аномальності результату спостережень (підставою для ухвалення конкуруючої гіпотези: "підозрілий" результат не належить даній групі вимірювань) при цьому служить межа, що відстоїть від центру розподілу на величину tS , тобто:

$$|x_{ii} - \bar{x}| \leq tS, \quad (2.1)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 6

де x_{in} – результат спостереження, що перевіряється на наявність грубої похибки;
 t – коефіцієнт, що залежить від закону розподілу, об'єму вибірки, рівня значущості.

Таким чином, межі похибок залежать від виду розподілу, об'єму вибірки і вибраної довірчої ймовірності.

При обробці вже наявних результатів спостережень довільно відкидати окремі результати не слід, оскільки це може привести до фіктивного підвищення точності результату вимірювань. Група вимірювань (вибірка) може містити декілька грубих похибок і їх виключення проводять послідовно, тобто поодинці.

Всі методи виключення грубих похибок (промахів) можуть бути розділені на два основні типи:

а) методи виключення при відомому генеральному середньоквадратичному відхиленні (СКВ);

б) методи виключення при невідомому генеральному СКВ.

У першому випадку СКВ обчислюється за результатами всієї вибірки результатів спостережень. Після вилучення грубих похибок обчислення СКВ потрібно повторити

Оскільки на практиці частіше зустрічаються вимірювання при невідомому СКВ (обмежене число спостережень), далі розглянуті такі критерії перевірки "підозрілих" (з точки зору похибок) результатів спостережень: Ірвіна, Романовського, Діксону, Смирнова, Шовене, "3 σ ".

Так як вимоги, що визначають межу, за якою знаходяться "грубі" результати спостережень, для різних критеріїв різні, то перевірку слід виконувати по декількох критеріях (рекомендується використовувати не менше трьох критеріїв з тих, що розглядаються далі). Остаточний висновок про приналежність "підозрілих" результатів даної сукупності спостережень слід робити по більшості критеріїв.

2.3. Критерій Ірвіна

Для отриманих експериментальних даних визначають коефіцієнт по формулі: $\Delta = (x_{n+1} - x_n) / S$,

$$\Delta = \frac{x_{n+1} - x_n}{S} \quad (2.2)$$

де x_{n+1} , x_n – найбільші значення випадкової величини; S – середнє квадратичне відхилення, обчислене по всіх значеннях вибірки. Потім цей коефіцієнт порівнюється з табличним значенням λ_q , можливі значення якого наведені в табл.

2.1.

Таблиця 2.1

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 7

Число вимірювань n	Рівень значущості	
	$q=0,05$	$q=0,01$
1	2	3
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Якщо $\lambda > \lambda_q$, то нульова гіпотеза не підтверджується, тобто результат – помилковий, і він має бути виключений при подальшій обробці результатів спостережень.

2.4. Критерій Романовського

Конкуруюча гіпотеза про наявність грубих похибок в “підозрілих” результатах підтверджується, якщо виконується нерівність:

$$|x_{ii} - \bar{x}| \geq t S_p, \quad (2.3)$$

де t_p – квантиль розподілу Стюдента при заданій довірчій ймовірності з числом мір свободи $k=n-k_n$ (k_n – число “підозрілих” результатів спостережень). Значення квантилів для розподілу Стюдента представлені в додатку А.

Точкові оцінки розподілу $\bar{x}$ і СКВ результатів спостережень обчислюється без урахування k_n “підозрілих” результатів спостережень.

2.5. Критерій Діксона

Критерій заснований на припущенні, що похибки вимірювань мають нормальний закон розподілу (заздалегідь необхідна побудова гістограми результатів спостережень і перевірка гіпотези про приналежність нормальному закону розподілу). При використанні критерію обчислюють коефіцієнт Діксону (спостережуване значення критерію) для перевірки найбільшого або найменшого екстремального значення залежно від числа вимірювань. У табл. 2.2 приведені формули коефіцієнтів Діксону. Коефіцієнти r_{10}, r_{11} застосовують, коли є один викид, а r_{21}, r_{22} – коли два викиди. При цьому потрібне первинне впорядкування

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 8

результатів вимірювань (об'єму вибірки). Критерій застосовується, коли вибірка може містити більш, ніж одну грубу похибку.

Таблиця 2.2

Число вимірювань n (обсяг вибірки)	Коефіцієнт Діксону	Для найменшого експериментального значення параметра	Для найбільшого експериментального значення параметра
3-7	r_{10}	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Обчислені для вибірки по формулах значення коефіцієнтів Діксону r порівнюють з табличним значенням коефіцієнтів Діксону r_q (табл. 2.3).

Нульова гіпотеза про відсутність грубої похибки виконується, якщо виконується нерівність $r < r_q$. Якщо $r > r_q$, то результат визнається грубою похибкою і виключається з подальшої обробки.

Таблиця 2.3

Статистика	Число вимірювань	r_q при рівні значущості q			
		0,1	0,05	0,02	0,01
r_{01}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,631	0,683
	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,409	0,477	0,551	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 9

	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497
г22					

2.6. Критерії «Зс», Райта

Критерій «правило трьох сигм» є одним з простих способів перевірки результатів, що мають нормальний закон розподілу. Суть правила трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевершує потрібного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл досліджуваної випадкової величини невідомий, але умова, вказана в приведеному правилі, виконується, то є підстави припускати, що ця величина розподілена нормально; інакше вона не розподілена нормально. З цією метою для вибірки (включаючи підозрілий результат) обчислюється $\bar{x}$ і оцінка СКВ результату спостережень.

Результат, який задовольняє умові $x_{in} - \bar{x} \geq 3S$, вважається за той, що має грубу похибку і вилучається, а раніше обчислені характеристики розподілу уточнюються.

Цьому критерію аналогічний критерій Райта, заснований на тому, що якщо залишкова похибка більше чотирьох сигм, то цей результат вимірювання є грубою похибкою і має бути виключений при подальшій обробці. Обидва критерії надійні при числі вимірювань більше 20...50.

Може статися, що при нових значеннях $\bar{x}$ і S інші результати потраплять в категорію аномальних. Однак, двічі використовувати критерії грубої похибки не рекомендується.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 10

2.7. Критерій Смирнова

Критерій Смирнова використовується при об'ємах вибірки $n \geq 25$. Він встановлює менш жорсткі межі грубої похибки. Для реалізації цього критерію обчислюються дійсні значення квантилів розподілу (спостережуване значення критерію) по формулі: $\max |x_{ii} - \bar{x}|$. (2.4)

$$\beta = \frac{\max |x_{ii} - \bar{x}|}{s}$$

Знайдене значення порівнюється з критерієм β_k , наведеним в табл. 2.4.

Таблиця 2.4.

Об'єм вибірки n	Граничне значення β_k при рівні значущості q				
	0,100	0,050	0,010	0,005	0,001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944
30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

2.8. Критерій Шовене

Критерій Шовене застосовується для законів, що не суперечать нормальному, і будується на визначенні числа очікуваних результатів спостережень n_{oc} , які мають такі ж великі похибки, як і “підозрілий” результат. Гіпотеза про наявність грубої похибки приймається, якщо виконується умова:

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 11

$$n_{оч} \leq 0,5. \quad (2.5)$$

Порядок перевірки гіпотези наступний:

1) обчислюється середнє арифметичне $\bar{x}$ і СКВ результатів спостережень для всієї вибірки;

2) з таблиці інтегральної функції нормованого нормального розподілу

$$\frac{|x_{in} - \bar{x}|}{s}$$

$z =$

(додаток 2) по величині z визначається ймовірність появи “підозрілого” результату в генеральній сукупності чисел n :

$$P(zS < x_{in} - \bar{x}). \quad (2.6)$$

3) число очікуваних результатів $n_{оч}$ визначається по формулі:

$$n_{оч} = nP. \quad (2.7)$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 12

3. ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СУМІСНИХ ВИМІРЮВАНЬ

3.1. Обчислення оцінок лінійної функції за методом найменших квадратів

Вважається, що залежність між величинами y та x є лінійною. Сформуємо відповідні рівняння системи для знаходження коефіцієнтів a та b :

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b n = \sum y_i \end{cases}$$

В цілях більш компактного запису «лічильник» можна опустити, оскільки і так зрозуміло, що підсумовування здійснюється від 1 до 6. Розрахунок краще оформляти у вигляді таблиці.

Таблиця 3.1. Значення параметрів

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	5,12	5,41	5,63	5,71	5,92	6,16
x_i^2	4	1	0	1	4	9
$x_i y_i$	-10,24	-5,41	0	5,71	11,84	18,48

$$\sum x_i = 3$$

$$\sum y_i = 33,95$$

$$\sum x_i^2 = 19$$

$$\sum x_i y_i = 20,38$$

Система матиме вигляд:

$$\begin{cases} 19a + 3b = 20,38 \\ 3a + 6b = 33,95 \end{cases}$$

Розрахунок системи проведемо за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 19 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 105 \neq 0$$

Отже система має єдине рішення.

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 20,38 & 3 \\ 33,95 & 6 \end{vmatrix} = 20,38 \cdot 6 - 33,95 \cdot 3 = 20,43$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 19 & 20,38 \\ 3 & 33,95 \end{vmatrix} = 19 \cdot 33,95 - 20,38 \cdot 3 = 583,91$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{20,43}{105} = 0,19 \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{583,91}{105} = 5,56$$

Для побудови графіка функції знайдемо її значення.

$$f(-3) = 0,19 \cdot (-3) + 5,56 = 5$$

$$f(4) = 0,19 \cdot 4 + 5,56 = 6,32$$

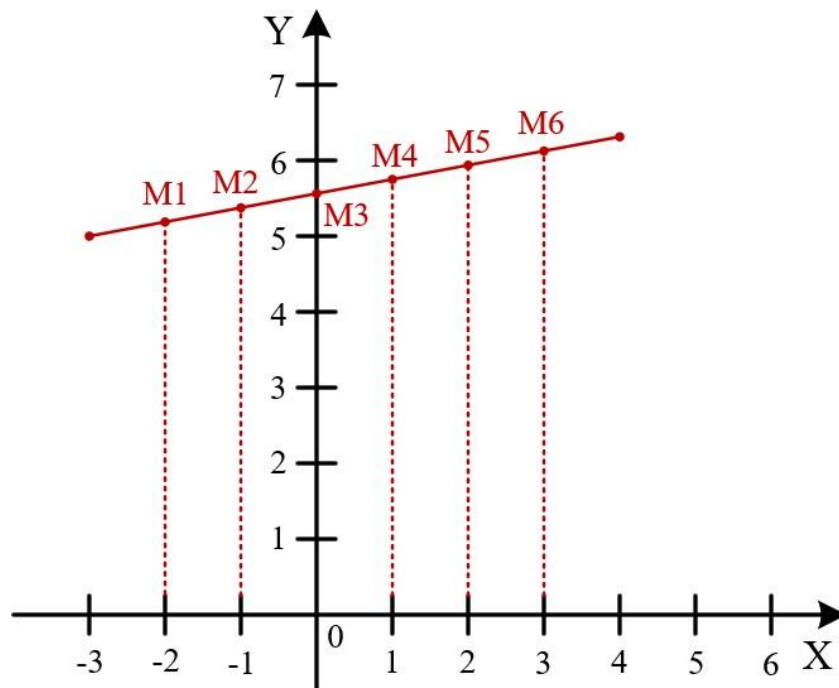


Рис. 3.1. Графік лінійної функції $y = ax + b$

Для визначення точності даного методу знайдемо суму квадратів відхилення між розрахованим та отриманим значеннями.

Таблиця 3.2. Значення похибки вимірювань

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	5.12	5.41	5.63	5.71	5.92	6.16
$f(x)$	5.18	5.37	5.56	5.75	5.94	6.13
$(y_i - f(x_i))^2$	0.0036	0.0016	0.0049	0.0016	0.0004	0.0009

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - f(x_i))^2 = 0,013$$

З усіх лінійних функцій функції показник є найменшим, тобто це найкраще наближення до результатів вимірювань.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ OK5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 14

3.2. Метод оцінок на основі ортогональної регресії

Якщо є сукупність експериментально отриманих значень x_i і y_i , причому відомий характер функціональної зв'язку між величинами X і Y , обробка таких результатів вимірювань зводиться до обчислення параметрів функції, найкращим чином відображає дану експериментальну залежність (така функція називається рівнянням регресії).

Цей метод зручний для обробки експериментальних функціональних залежностей при лінійного зв'язку між X і Y (рис. 3.2.):

$$Y = aX + b$$

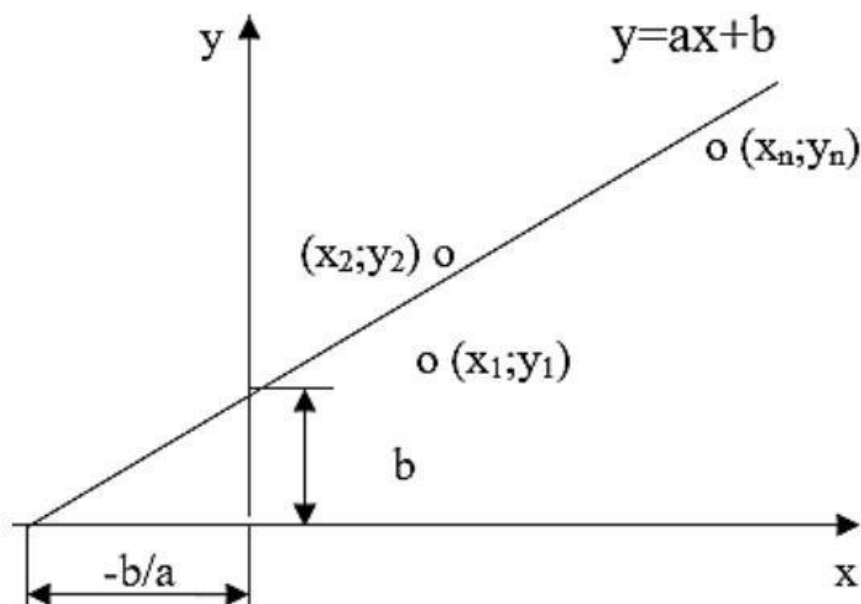


Рис. 3.2. Графік лінійної функції В результаті обробки серії експериментальних величин x_i і y_i обчислюються коефіцієнти лінійної регресії a і b :

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 15

$$a = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right) / \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 / n \right]$$

$$b = \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right) / n$$

Якщо інтервал між сусідніми значеннями x_i постійний і кожне з них одне число i , вирази спрощуються:

$$a = 6[2 \sum_{i=1}^n i y_i - (n+1) \sum_{i=1}^n y_i] / [n(n^2 - 1)]$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{n+1}{2} a$$

Для визначення похибок можна обчислити середньоквадратичні відхилення оцінок величин a і b , але краще розрахувати середньоквадратичне відхилення точок x_i ; y_i від рівняння регресії прямої $y = ax + b$:

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 / [(n-1)(a^2 + 1)]}$$

Для визначення ширини смуги, що характеризує похибку лінійної регресії, по обидва боки від прямої $y = ax + b$ слід відкласти значення $S_{y(x)}$, де

$$S_{y(x)} = s / \sqrt{n}$$

4. ЗАВДАННЯ НА ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Завдання 4.1. Опрацювання результатів рівноточних багатократних вимірювань

В результаті рівноточних багатократних вимірювань фізичної величини отримано результати, що наведено в табл. 4.1. Будемо рахувати, що систематична

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 16

похибка відсутня. Потрібно надати точкові та інтервальні оцінки випадкової складової похибки вимірювань фізичної величини.

Послідовність виконання завдання:

1. Обчислити оцінку дійсного значення фізичної величини (середньоарифметичне значення, середньгеометричне значення та медіану результатів вимірювань).

2. Обчислити оцінку випадкової похибки проведених вимірювань (дисперсію та середньоквадратичне значення отриманих результатів вимірювань відносно оцінки фізичної величини з п.1).

3. Визначити закон розподілу результатів вимірювань на основі побудови гістограми.

4. Перевірити результати вимірювань (табл. 4.1) на наявність грубих помилок за будь-якими трьома критеріями з списку: критерій Ірвіна, критерій Романовського, критерій Диксона, критерій 3 сігма, критерій Смирнова, критерій Шовене. Виключити з вибірки виявлені результати з грубими помилками.

5. Повторити пп. 1-3 після виключення грубих помилок.

6. Обчислити межі довірчого інтервалу випадкової похибки для ймовірності $p=0,95$ та закону розподілу, визначеного в пп. 3 та 5.

Вказані в пп. 1-6 провести в ручному режимі. Також для цих обчислень скласти програму розрахунків та отримати результати.

Порівняти результати ручного розрахунку та роботи програми, зробити висновки.

Таблиця 4.1

Результати рівноточних багатократних вимірювань

№ відліку	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	503,6	987,8	1988,5	3003,9	4003,6	5006,0	499,8	999,8	2005,3	3003,9
2	495,6	990,6	2002,1	3005,6	4004,0	5000,6	499,6	1001,9	2001,8	2997,6
3	503,0	1008,1	2002,1	2990,6	3994,8	4998,6	500,5	997,7	2002,3	2997,9
4	498,6	998,3	2003,7	2952,0	3997,7	4997,1	500,3	1003,6	1996,7	2997,7
5	491,8	993,4	2000,8	3001,4	4003	5014,5	500,5	1002,6	2000,9	3005,4
6	51,2	991,6	2004,6	3000,8	3994,1	5004,8	500,5	1001,2	2000,0	2997,8
7	498,5	994,3	2001,2	2997,0	3997,0	5003,2	499,5	1000,4	203,0	2993,8
8	504,5	993,0	2005,1	3001,5	3993,0	5003,8	498,8	993,1	2003,3	2984,1
9	496,6	990,3	2001,8	3004,8	4000,0	4999,9	497,5	996,6	1995,3	311,8
10	500,0	1010,3	2000,4	2995,4	3998,1	5001,4	501,4	997,7	2005,2	2999,1
11	493,3	999,2	2002,8	2997,8	400,9	4999,3	498,0	1002,5	2098,7	3008,6

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015								Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ ОК5-1-2024	
	Екземпляр № 1								Арк 34 / 17	

12	498,9	994,8	2003,5	2996,8	4003,4	506,4	500,3	998,4	1996	2998,3
13	493,5	101,1	2002,1	2998,0	3994,9	4990,1	500,6	998,3	2001,1	2994,5
14	491,3	1001,3	2001,1	2999,9	4004,8	4998,1	1500,4	95,9	2002,0	2999,0
15	504,3	1018	1998,2	3000	4004,9	4994,6	499,2	999,3	2005,2	3009,8
16	504,7	996,3	1999,4	2995,8	3995,4	5005,4	499,3	1000,6	2001,0	3006,9
17	503,6	994,4	2002,7	3003,3	3994,1	4998,0	502,0	998,9	1999,4	2997,8
18	493,3	997,5	1997,4	2999,3	3993,1	5010,7	501,3	1001,4	2004,9	3005,1
19	494,5	998,6	1999,2	3003,2	4004,2	4997,3	499,4	1002,5	2003,2	2995,6
20	502,5	1003,0	202,8	1003,3	3994,8	4999,5	499,5	997,9	1995,4	2999,2

Продовження таблиці 4.1

№ відліку	Варіант									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	498,5	994,3	2001,2	3003,2	3997,0	5003,2	499,5	1000,4	203,0	2993,8
2	504,5	993,0	2005,1	2997,0	3993,0	5003,8	498,8	993,1	2003,3	2984,1
3	496,6	990,3	2001,8	3001,5	4000,0	4999,9	497,5	996,6	1995,3	311,8
4	500,0	1010,3	2000,4	3004,8	3998,1	5001,4	501,4	997,7	2005,2	2999,1
5	493,3	999,2	2002,8	2995,4	400,9	4999,3	498,0	1002,5	2098,7	3008,6
6	49K,9	994,8	2003,5	2997,8	4003,4	506,4	500,3	998,4	1996	2998,8
7	493,5	101,1	2002,1	2996,8	3994,9	4990,1	500,6	998,3	2001,1	2994,5
8	491,3	1001,3	2001,1	2998,0	4004,8	4998,1	1500,4	95,9	2002,0	2999,0
9	504,3	1018	1998,2	2999,9	4004,9	4994,6	499,2	999,3	2005,2	3009,8
10	504,7	996,3	1999,4	3000,7	3995,4	5005,4	499,3	1000,6	2001,0	3006,9
11	503,6	987,8	1988,5	3005,6	4003,6	5006,0	499,8	999,8	2005,3	3003,9
12	495,6	990,6	202,8	2990,6	4004,0	5000,6	499,6	1001,9	2001,8	2997,6
13	503,0	1008,1	2002,1	2952,0	3994,8	4998,6	500,5	997,7	2002,3	2997,9
14	503,6	994,4	3003,9	2995,8	3994,1	4998,0	502,0	998,9	1999,4	2997,8
15	493,3	997,5	2002,7	3003,3	3993,1	5010,7	501,3	1001,4	2004,9	3005,1
16	494,5	998,6	1997,4	2999,3	4004,2	4997,3	499,4	1002,5	2003,2	2995,6
17	502,5	1003,0	1999,2	3006,7	4006,7	4999,5	499,5	997,9	1995,4	2999,2
18	498,6	998,3	2003,7	3001,4	3997,7	4997,1	500,3	1003,6	1996,7	2997,7
19	491,8	993,4	2000,8	3000,8	4003,6	5014,5	500,5	1002,6	2000,9	3005,4
20	51,2	991,6	2004,6	1003,3	3994,1	5004,8	500,5	1001,2	2000,0	2997,8

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 18

Продовження таблиці 4.1

№ відліку	Варіант									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	603,6	999,2	2004,6	5007,0	400,9	5005,4	498,8	1000,6	2004,9	3008,6
2	595,6	994,8	2001,2	5006,6	4003,4	4998,0	497,5	998,9	2003,2	2998,8
3	603,0	101,1	2005,1	4998,6	3994,9	5010,7	501,4	1001,4	1995,4	2994,5
4	598,6	1001,3	2001,8	4997,1	4004,8	4997,3	498,0	1002,5	2003,3	2999,0
5	591,8	1018	2000,4	5014,5	4004,9	4999,5	500,3	997,9	1995,3	3009,8
6	56,2	996,3	2002,8	5004,8	3995,4	5004,8	500,6	993,1	2005,2	3006,9
7	598,5	994,4	2003,5	5003,2	3994,1	5003,2	1500,4	996,6	2098,7	2997,8
8	604,5	997,5	2002,1	5003,8	3993,1	5003,8	499,2	997,7	1996,6	3005,1
9	596,6	998,6	2001,1	4999,9	4004,2	4999,9	499,3	1002,5	2001,1	2995,6
10	600,0	1003,0	1998,2	5001,4	4006,7	5001,4	502,0	998,4	2002,0	2999,2
11	593,3	987,8	1999,4	4999,3	4003,6	4999,3	501,3	998,3	2000,0	3003,9
12	59К,9	990,6	3003,9	506,4	4004,0	506,4	499,4	95,9	203,0	2997,6
13	593,5	1008,1	2002,7	4990,1	3994,8	4990,1	499,5	999,3	2005,3	2997,9
14	591,3	998,3	1997,4	4998,1	3997,7	4998,1	499,8	999,8	2001,8	2997,7
15	604,3	993,4	1999,2	4994,6	4003,6	4994,6	499,6	1001,9	2002,3	3005,4
16	604,7	991,6	1988,5	5005,4	3994,1	5006,0	500,5	997,7	1996,7	2997,8
17	603,6	994,3	202,8	4998,0	3997,0	5000,6	500,3	1003,6	2000,9	2993,8
18	593,3	993,0	2002,1	5010,7	3993,0	4998,6	500,5	1002,6	1995,4	2984,1
19	594,5	990,3	2003,7	4997,3	4000,0	4997,1	500,5	1001,2	2003,3	311,8
20	502,5	1010,3	2000,8	4999,5	3998,1	5014,5	499,5	1000,4	1995,3	2999,1

Завдання 4.2. Опрацювання результатів сумісних вимірювань

В результаті сумісних вимірювань отримано результати вимірювань двох фізичних величин x та y , що пов'язані між собою лінійною функціональною залежністю (табл. 4.2). Будемо рахувати, що систематична похибка відсутня. Потрібно обчислити оцінки параметрів a і b лінійної залежності $y=ax+b$, та визначити точність цих оцінок.

Оцінки обчислити за методом найменших квадратів та за методом оцінок на основі ортогональної регресії. Для проведення розрахунків скласти програму. Також оцінити параметри лінійної залежності графічним методом.

Порівняти отримані результати двох варіантів розрахунків та графічної оцінки, зробити висновки.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 19

Таблиця 4.2

Експериментальні дані для визначення лінійної залежності $y=ax+b$

Варіант	X						Y					
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	y1	y2	y3	y4	y5	y6
1	1	2	3	4	5	6	3,00	4,55	6,02	7,56	9,10	10,70
2	0	1	2	3	4	5	5,10	2,05	-1,00	-4,10	-7,15	-9,90
3	-1	0	1	2	3	4	8,22	7,14	5,91	4,85	3,74	2,66
4	-2	-1	0	1	2	3	5,12	5,41	5,63	5,71	5,92	6,16
5	-3	-2	-1	0	1	2	1,20	2,49	4,12	5,60	6,92	8,21
6	-4	-3	-2	-1	0	1	2,50	4,19	6,49	8,25	10,20	11,90
7	-5	-4	-3	-2	-1	0	9,50	8,40	7,45	6,24	5,20	4,20
8	6	5	4	3	2	1	4,99	3,91	2,20	1,02	0,06	-1,26
9	3	2	1	0	-1	-2	-2,90	-3,97	-5,18	-5,96	-7,02	-7,87
10	4	3	2	1	0	-1	0,00	0,45	1,06	1,59	1,99	3,07
11	1	2	3	4	5	6	3,00	4,55	6,02	7,56	9,10	10,70
12	0	1	2	3	4	5	5,10	2,05	-1,00	-4,10	-7,15	-9,90
13	-1	0	1	2	3	4	8,22	7,14	5,91	4,85	3,74	2,66
14	-2	-1	0	1	2	3	5,12	5,41	5,63	5,71	5,92	6,16
15	-3	-2	-1	0	1	2	1,20	2,49	4,12	5,60	6,92	8,21
16	-4	-3	-2	-1	0	1	2,50	4,19	6,49	8,25	10,20	11,90
17	-5	-4	-3	-2	-1	0	9,50	8,40	7,45	6,24	5,20	4,20
18	6	7	8	9	10	11	3,00	4,55	6,02	7,56	9,10	10,70
19	0	-1	-2	-3	-4	-5	5,10	2,05	-1,00	-4,10	-7,15	-9,90
20	1	2	3	4	5	6	8,22	7,14	5,91	4,85	3,74	2,66
21	2	1	0	-1	-2	-3	5,12	5,41	5,63	5,71	5,92	6,16
22	3	2		0	-1	-2	1,20	2,49	4,12	5,60	6,92	8,21
23	5	6	7	8	9	10	2,50	4,19	6,49	8,25	10,20	11,90
24	-6	-5	-4	-3	-2	-1	9,50	8,40	7,45	6,24	5,20	4,20
25	18	17	16	15	14	13	4,99	3,91	2,20	1,02	0,06	-1,26
26	-1	0	1	3	4	5	-2,90	-3,97	-5,18	-5,96	-7,02	-7,87
27	7	6	5	4	3	2	0,00	0,45	1,06	1,59	1,99	3,07
28	-1	-2	-3	-4	-5	-6	3,00	4,55	6,02	7,56	9,10	10,70
29	10	11	12	13	14	15	5,10	2,05	-1,00	-4,10	-7,15	-9,90
30	7	8	9	10	11	12	8,22	7,14	5,91	4,85	3,74	2,66

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	<i>Екземпляр № 1</i>	<i>Арк 34 / 20</i>

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 21

Додаток А

Коефіцієнт довіри t_{α} (квантилі розподілу Стюдента)

r_k	При α			r_k	При γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
1	12,706	63,657	636,619	19	2,093	2,861	3,883
2	4,303	9,925	31,598	20	2,086	2,845	3,850
4	2,776	4,604	8,610	22	2,074	2,819	3,792
5	2,571	4,032	6,859	23	2,069	2,807	3,797
6	2,447	3,707	5,959	24	2,064	2,797	3,745
7	2,365	3,499	5,405	25	2,060	2,787	3,725
8	2,306	3,355	5,041	26	2,056	2,779	3,707
9	2,262	3,250	4,781	27	2,052	2,763	3,674
10	2,23	3,169	4,587	28	2,048	2,763	3,674
11	2,201	3,106	4,437	29	2,045	2,756	3,659
12	2,179	3,055	4,318	30	2,042	2,750	3,646
13	2,160	3,012	4,221	40	2,021	2,704	3,551
14	2,145	2,977	4,140	50	2,008	2,677	3,497
16	2,120	2,921	4,015	80	1,990	2,639	3,416
17	2,110	2,898	3,965	100	1,984	2,626	3,391
18	2,101	2,878	3,922	∞	1,960	2,576	3,291

Додаток Б

Значення функції нормального розподілу

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2} dt$$

20 - 0

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
-3,5	0,00023	-1,7	0,0446	+0,1	0,5398	+ 1,9	0,9713
-3,4	0,00034	-1,6	0,0548	+0,2	0,5793	+2,0	0,9773
-3,3	0,00048	-1,5	0,0668	+0,3	0,6179	+2,1	0,9821
-3,2	0,00069	-1,4	0,0808	+0,4	0,6554	+2,2	0,9861
-3,1	0,00097	-1,3	0,0968	+0,5	0,6915	+2,3	0,9893
-3,0	0,00135	-1,2	0,1151	+0,6	0,7257	+2,4	0,9918
-2,9	0,0019	-1,1	0,1357	+0,7	0,7580	+2,5	0,9938
-2,8	0,0026	-1,0	0,1587	+0,8	0,7881	+2,6	0,9953
-2,7	0,0035	-0,9	0,1841	+0,9	0,8156	+2,7	0,9965
-2,6	0,0047	-0,8	0,2119	+ 1,0	0,8413	+2,8	0,9974
-2,5	0,0062	-0,7	0,2420	+ 1,1	0,8643	+2,9	0,9981
-2,4	0,0082	-0,6	0,2743	+ 1,2	0,8849	+3,0	0,99865
-2,3	0,0107	-0,5	0,3085	+ 1,3	0,9032	+3,1	0,99903

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 22

-2,2	0,0139	-0,4	0,3446	+ 1,4	0,9192	+3,2	0,99931
-2,1	0,0179	-0,3	0,3821	+ 1,5	0,9332	+3,3	0,99952
-2,0	0,0228	-0,2	0,4207	+ 1,6	0,9452	+3,4	0,99966
-1,9	0,0287	-0,1	0,4602	+1,7	0,9554	+3,5	0,99977
-1,8	0,0359	0,0	0,500	+ 1,8	0,9641		

Додаток В

В.1. Приклад виконання завдання

В.1.1. Опрацювання результатів рівноточних багатократних вимірювань

В результаті рівноточних багатократних вимірювань фізичної величини отримано результати, що наведено в табл. В.1.1. Враховуючи, що систематична похибка відсутня, потрібно надати точкові та інтервальні оцінки випадкової складової похибки вимірювань фізичної величини, також для обчислень скласти програму розрахунків.

Таблиця В.1.1. Вихідні дані для завдання 1

№ Варіанту			4						
Значення багатократних вимірювань									
3005,6	2990	2952,0	3001,4	3000,8	3003,9	2997,0	3001,5	3004,8	2995,4
2997,8	2996,8	2998,0	2999,9	3000,0	2995,8	3003,3	2999,3	3003,2	1003,3

В.1.2. Опрацювання результатів сумісних вимірювань.

В результаті сумісних вимірювань отримано результати вимірювань двох фізичних величин x та y , що пов'язані між собою лінійною функціональною залежністю (табл. В.1.2.). Враховуючи, що систематична похибка відсутня, потрібно обчислити оцінки параметрів a і b лінійної залежності $y = ax + b$, та визначити точність цих оцінок. Оцінки обчислити за методом найменших квадратів та за методом оцінок на основі ортогональної регресії, для проведення розрахунків скласти програму. Також оцінити параметри лінійної залежності графічним методом, порівняти отримані результати двох варіантів розрахунків та графічної оцінки, зробити висновки.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 23

Таблиця В.1.2. Вихідні дані для завдання 2

№ Вар.	X						Y					
4	-2	-1	0	1	2	3	5,12	5,41	5,63	5,71	5,92	6,16

В.2. Опрацювання результатів рівноточних багатократних вимірювань

В.2.1. Обчислення оцінки дійсного значення фізичної величини.

Визначення середньоарифметичного значення результатів багатократних вимірювань фізичної величини:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \frac{57949,8}{20} = 2897,49$$

Визначення середньгеометричного значення результатів багатократних вимірювань фізичної величини:

$$G(x) = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j} = \sqrt[20]{1,1453 \cdot 10^{69}} = 2837,57$$

Визначення значення медіани результатів багатократних вимірювань фізичної величини, так як масив має парне число значень, формула для знаходження медіани матиме вигляд:

$$M = \frac{x_{(n/2)} + x_{(n/2)+1}}{2} = \frac{2999,9 + 2999,3}{2} = 2999,6$$

В.2.2. Обчислення оцінки випадкової похибки проведених вимірювань

Відносно оцінки фізичної величини у пункті В.2.1, знаходимо значення незміщеної оцінки дисперсії сукупності спостережених значень.

Таблиця В.2.1. Обрахунок значень вибірки

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 24

X	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
3005.6	108.11	11687.77
2990	92.51	8558.10
2952	54.51	2971.34
3001.4	103.91	10797.29
3000.8	103.31	10672.96
3003.9	106.41	11323.09
2997	99.51	9902.24
3001.5	104.01	10818.08
3004.8	107.31	11515.44
2995.4	97.91	9586.37
2997.8	100.31	10062.10
2996.8	99.31	9862.48
2998	100.51	10102.26
2999.9	102.41	10487.81
3000	102.51	10508.30
2995.8	98.31	9664.86
3003.3	105.81	11195.76
2999.3	101.81	10365.28
3003.2	105.71	11174.60
1003.3	-1894.19	3587955.76

Знаходимо незміщену оцінку середньоквадратичного відхилення середнього значення:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{20}} = \frac{446}{4,47} \approx 99,78$$

Проаналізуємо чи немає серед спостережень грубих похибок, для цього сформуємо із спостережень варіаційний ряд та перевіримо крайні члени на аномальність.

$$u_1 = \frac{\bar{x} - \min(x)}{S} = \frac{2897,49 - 1003,3}{446} = 4,247$$

$$u_2 = \frac{\max(x) - \bar{x}}{S} = \frac{3005,6 - 2897,49}{446} = 0,242$$

Перевіримо чи входять значення u_1 та u_2 в інтервал допустимих значень, для цього при ймовірності 0,95 та при 20 вимірах знаходимо табличне значення $u_{\text{доп}} = 2,56$. Оскільки значення u_1 явно перевищує $u_{\text{доп}}$ ряд потрібно досліджувати на наявність грубих похибок.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 25

В.2.3. Визначення закону розподілу результатів вимірювань на основі побудови гістограми

Для побудови гістограми необхідно:

1) Зробити деяку кількість вимірів та в отриманій вибірці знайти мінімальне та максимальне значення вимірювальної величини.

$$x_{min} = 1003,3 \quad x_{max} = 3005,6$$

2) Знайти ширину одного біну.

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{10} = \frac{3005,6 - 1003,3}{10} = 200,23$$

3) Отримані біни послідовно відкласти на осі абсцис, відзначаючи початок і кінець кожного біна, підрахувати кількість значень, що попадають у кожен бін та відкласти по осі ординат.

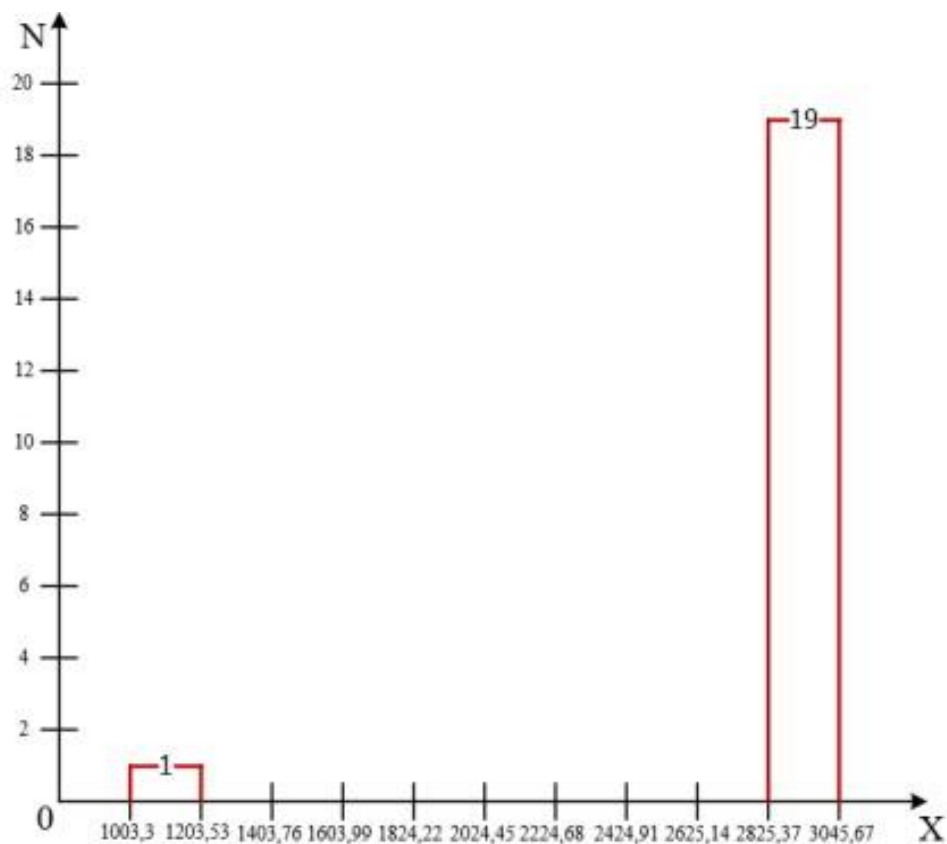


Рис. В.2.1. Гістограма розподілу значень

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 26

З результатів побудови діаграми неможна чітко визначити закон розподілу, так як у вибірці присутня груба похибка, тому потрібно вилучити усі грубі похибки та повторити побудову гістограми.

В.2.4. Оцінка та виключення грубих помилок

В.2.4.1. Критерій Ірвіна

Таблиця В.2.2. Обрахунок наявності похибки у вибірці

<i>X</i>	λ	Похибка
3005.6	-	Відсутня
2990	0.0335	Відсутня
2952	0.0815	Відсутня
3001.4	0.1060	Відсутня
3000.8	0.0013	Відсутня
3003.9	0.0067	Відсутня
2997	0.0148	Відсутня
3001.5	0.0097	Відсутня
3004.8	0.0071	Відсутня
2995.4	0.0202	Відсутня
2997.8	0.0052	Відсутня
2996.8	0.0021	Відсутня
2998	0.0026	Відсутня
2999.9	0.0041	Відсутня
3000	0.0002	Відсутня
2995.8	0.0090	Відсутня
3003.3	0.0161	Відсутня
2999.3	0.0086	Відсутня
3003.2	0.0084	Відсутня
1003.3	4.2916	Присутня

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 27

Як бачимо з результатів обчислення, результат 1003,3 вважається помилковим, тому його потрібно виключити при подальшій обробці результатів спостережень.

В.2.4.2. Критерій Романовського

Для перевірки вибірки на наявність грубої похибки за Романовським потрібно обрати «підозрілі» значення. Підозрілими значеннями можна вважати 2952 та 1003,3.

Визначимо середньоарифметичне значення з виключенням підозрілих значень:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{53994,5}{18} = 2999,69$$

Таблиця В.2.3. Обрахунок значень вибірки

X	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
3005.6	5.91	34.876
2990	-9.69	93.982
3001.4	1.71	2.909
3000.8	1.11	1.222
3003.9	4.21	17.687
2997	-2.69	7.260
3001.5	1.81	3.260
3004.8	5.11	26.067
2995.4	-4.29	18.442
2997.8	-1.89	3.589
2996.8	-2.89	8.378
2998	-1.69	2.871
2999.9	0.21	0.042
3000	0.31	0.093
2995.8	-3.89	15.167
3003.3	3.61	13.000
2999.3	-0.39	0.156
3003.2	3.51	12.289

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 28

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{261,289}{18 - 1}} \approx 3,92$$

Обираємо табличне значення квантилю розподілу Стюдента для значення $k = 18$ та перевіряємо значення на виконання нерівності:

$$|x_n - \bar{x}| \geq 8,24$$

За обрахунками значення з грубою помилкою виявились: 2990, 2952 та 1003,3, при подальшій роботі з вибіркою потрібно виключити ці значення.

В.2.4.3. Критерій Діксона

Для перевірки за критерієм Діксона обчислюють коефіцієнт для перевірки найбільшого або найменшого значення залежно від числа вимірювань.

$$r_{22 \min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1} \quad r_{22 \max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$$

1) Значення коефіцієнтів при першій перевірці вибірки:

$$r_{22 \min} = \frac{2990 - 1003,3}{3003,9 - 1003,3} = 0,993 \quad r_{22 \max} = \frac{3005,6 - 3003,9}{3005,6 - 2990} = 0,109$$

Так, як $0,993 > 0,450$ значення 1003,3 виключено з подальшого обрахунку.

2) Значення коефіцієнтів при другій перевірці вибірки:

$$r_{22 \min} = \frac{2995,4 - 2952}{3003,9 - 2952} = 0,836 \quad r_{22 \max} = \frac{3005,6 - 3003,9}{3005,6 - 2995,4} = 0,225$$

Так, як $0,836 > 0,462$ значення 2952 виключено з подальшого обрахунку.

3) Значення коефіцієнтів при третій перевірці вибірки:

$$r_{22 \min} = \frac{2995,8 - 2990}{3003,9 - 2990} = 0,417 \quad r_{22 \max} = \frac{3005,6 - 3003,9}{3005,6 - 2995,8} = 0,173$$

Після 3 проходу по вибірці не було виявлено грубої похибки, отже за критерієм Діксона можна виключити значення 2952 та 1003,3.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 29

В.2.5. Обчислення оцінок дійсної та випадкової величини після виключення грубих помилок

Визначення середньоарифметичного значення, середньогометричного значення та медіани результатів багатократних вимірювань фізичної величини.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i = \frac{53994,5}{18} = 2999,69$$

$$G(x) = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j} = \sqrt[18]{3,87 * 10^{62}} = 2999,69$$

$$M = \frac{x_{(n/2)} + x_{(n/2)+1}}{2} = \frac{2999,9 + 3000}{2} = 2999,95$$

Відносно оцінки фізичної велечини у пункті, знаходимо значення незміщеної оцінки дисперсії сукупності спостережених значень:

Таблиця В.2.4. Обрахунок значень вибірки

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 30

X	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2990	-9.69	93.982
2995.4	-4.29	18.442
2995.8	-3.89	15.167
2996.8	-2.89	8.378
2997	-2.69	7.260
2997.8	-1.89	3.589
2998	-1.69	2.871
2999.3	-0.39	0.156
2999.9	0.21	0.042
3000	0.31	0.093
3000.8	1.11	1.222
3001.4	1.71	2.909
3001.5	1.81	3.260
3003.2	3.51	12.289
3003.3	3.61	13.000
3003.9	4.21	17.687
3004.8	5.11	26.067
3005.6	5.91	34.876

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{261,29}{18 - 1}} \approx 3,92$$

Знаходимо незміщену оцінку середньоквадратичного відхилення середнього значення:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{18}} = \frac{3,92}{4,24} \approx 0,92$$

Проаналізуємо чи немає серед спостережень грубих похибок, для цього сформуємо із спостережень варіаційний ряд та перевіримо крайні члени на аномальність.

$$u_1 = \frac{\bar{x} - \min(x)}{S} = \frac{2999,69 - 2990}{3,92} = 2,472$$

$$u_2 = \frac{\max(x) - \bar{x}}{S} = \frac{3005,6 - 2999,69}{3,92} = 1,507$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 31

Перевіряємо чи входять значення u_1 та u_2 в інтервал допустимих значень, для цього при ймовірності 0,95 та при 18 вимірах знаходимо табличне значення $u_{don} = 2,50$. Всі значення входять у інтервал допустимих значень.

Для побудови гістограми необхідно:

1) Зробити деяку кількість вимірів та в отриманій вибірці знайти мінімальне та максимальне значення вимірювальної величини.

$$x_{min} = 2990 \quad x_{max} = 3005,6$$

2) Знайти ширину одного біну.

$$x_{max} - x_{min} \quad 3005,6 - 2990$$

$$\Delta x = 1,73$$

3) Отримані біни послідовно відкласти на осі абсцис, відзначаючи початок і кінець кожного біна, підрахувати кількість значень, що попадають у кожен бін та відкласти по осі ординат.

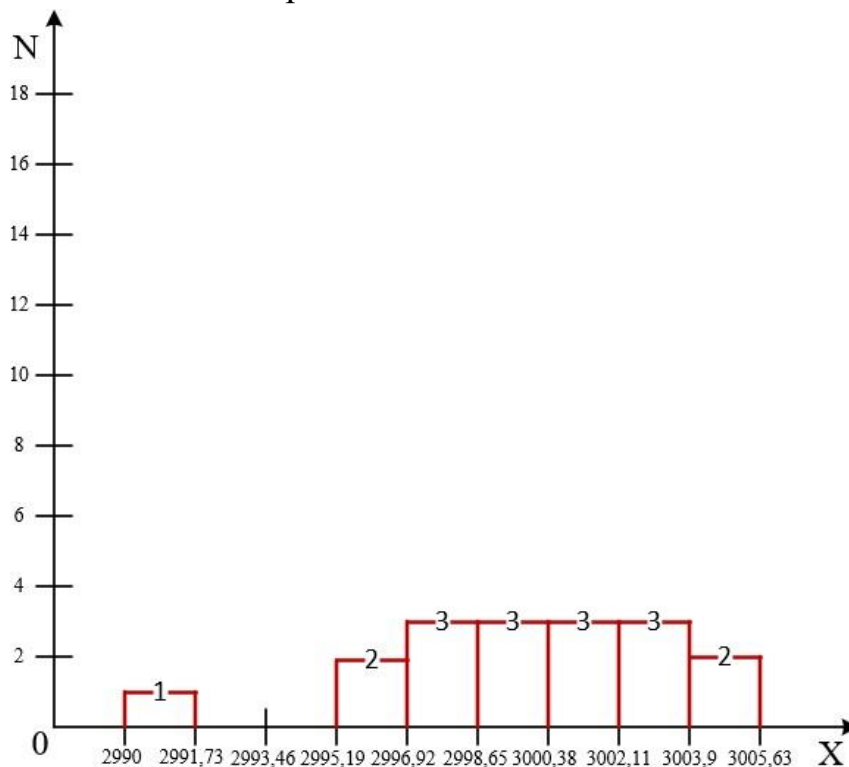


Рис. В.2.2. Гістограма розподілу значень

З результатів побудови діаграми можна визначити нормальний закон розподілу випадкових величин.

В.2.6. Обчислення меж довірчого інтервалу випадкової похибки

Оскільки кількість спостережень менше 30, то при оцінюванні довірчого інтервалу для нормального закону розподілу випадкової величини краще

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 34 / 32

застосовувати значення коефіцієнта Стюдента, що задає допустимі значення гарантійного коефіцієнта. При ймовірності 0,95 та 20-и вимірам відповідає значення коефіцієнта 1,74.

Тому розраховуємо довірчий інтервал за формулою:

$$x = \bar{x} \pm tPSx = 2999,69 \pm (1,74 \cdot 0,92) = 2999,69 \pm 1,60.$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015	Ф-20.09- 05.02/174.00.1/М/ОК5- 1-2024
	Екземпляр № 1	Арк 32 / 32

ЛІТЕРАТУРА

1. Безвесільна О.М., Подчашинський Ю.О. Методи планування та обробки результатів експериментів : підручник. – К. : НТУУ "КПІ ім. І. Сікорського; Ж.: Державний університет "Житомирська політехніка", 2021. – 232 с.
2. Безвесільна О.М., Подчашинський Ю.О. Наукові дослідження в галузі автоматизації та приладобудування. Проектування та моделювання комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних систем : підручник. – К. : НТУУ "КПІ ім. І. Сікорського; Ж.: Державний університет "Житомирська політехніка", 2021. – 896с.
3. Подчашинський Ю.О. Приладова система для вимірювання геометричних параметрів на основі комп'ютеризованої обробки відеозображень : монографія. – Житомир : ЖДТУ, 2018. – 212 с.
4. Метрологічне забезпечення інформаційно-вимірювальних систем: навч. посіб. для студ. спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» / Н.М. Защепкіна, О.В. Шульга, О.А.Наконечний – Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», «Ультрадрук», 2020. 176 с..
5. Теоретичні основи інформаційно-вимірювальних систем: Підручник /В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Єременко та ін.; за ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака / 2е вид., перероб. і доп. – К.: Ун-т новітніх технологій; НАУ, 2017. – 496 с.
6. Поліщук Є.С.,Дорожовець М.М.,Стадник Б.І.,Івахів О.В.,Бойко Т.Г. Засоби та методи вимірювань неелектричних величин : Підручник. – Л. : Бескид Біт, 2008. – 618с. 7. Яцук В.О., Малахівський П.С. Методи підвищення точності вимірювань : Підручник. – Л. : Бескид Біт, 2008. – 368с.
8. Васілевський О.М., Кучерук В.Ю. Основи теорії невизначеності вимірювань : навч. посібник. – вид. стер. – Херсон : Олді-плюс, 2018. – 224 с.
9. Васілевський О.М., Кучерук В.Ю., Володарський С.Т. Непевність результатів вимірювань, контролю та випробувань : підручник. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2020. – 352 с.
10. Кухарчук В.В.,Кучерук В.Ю.,Володарський Є.Г.,Гребко В.В. Основи метрології та електричних вимірювань : підручник. – стереотип. вид. – Херсон : Олді-плюс, 2020. – 538 с.
11. Володарський Э.Т., Кашева Л.О. Статистична обробка даних : навч. посібник. – К. : КНАУ, 2008. – 308с.
12. Ковальчук А.М.,Левицький В.Г.,Самолук І.І.,Янчук В.М. Основи проектування та розробки інформаційних систем : Зб. навч. матеріалів. – Житомир. : ЖДТУ, 2009. – 54с.

13. Прокопенко І. Г. Статистична обробка сигналів : навч. посібник. – К. : НАУ, 2011. – 220 с.

14. Нечаєв В.П.,Берідзе Т.М.,Кононенко В.В.,Рябушенко Н.В.,Брадул О.М. Теорія планування експерименту : Навч. посібник. – К. : Кондор, 2009. – 232с.