Варіант 1

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x)=0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\textit{а)}\, A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}; \ \textit{б)}\, A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 13, \\ 2x + 3y + z = 16, \\ x + y + 4z = -1. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;3;6)$, $M_2(2;2;1), M_3(-1;0;1), M_4(-4;6;-3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (3;-2;1)$, $\vec{q} = (-1;1;-2), \vec{r} = (2;1;-3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (11;-6;5)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{6}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $\text{ï ð}_{\vec{b}}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz; площиною, що проходить через точку $(0;0;1)$ паралельно площині Oxy; площиною, що проходить через точку $(1;2;0)$ і містить вісь Oz; площиною, що проходить через точку $(0;3;0)$ і пряму $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-4}{0}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(2;3;1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 15$ та один з фокусів $F(-10;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 13$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{14}{13}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = -4$;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 = 8z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x + y + z = 4, x = 2, y = 3,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + x_2; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + 1; x_3 + 2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -10 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Варіант 2

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 6x - 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 13, \\ x - 2y + z = -3, \\ 4x - y + z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-4;2;6)$, $M_2(2;-3;0), M_3(-10;5;8), M_4(-5;2;-4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (2;1;0)$, $\vec{q} = (1;-1;2), \vec{r} = (2;2;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;7;-7)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ï\ ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-1;2), B(3;-1), C(0;4)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oxy; площиною Oyz; площиною, що проходить через точки $(0;0;3)$ і $(0;1;0)$ паралельно осі Ox; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ і пряму $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{3}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0\left(1;2;\dfrac{3}{2}\right)$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{2};$$

$$l_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b=2$ *і один з фокусів* $F(4\sqrt{2};0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a=7$, *ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{85}}{7}$;

в) параболи, якщо її директриса $D: x=5$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2+12xy-22x-12y-19=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2+4y^2=16z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z=x^2+y^2, x+y=4,$$

$$x=0, y=0, z=0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$A\vec{x}=(0;x_2-x_3;0)$

$B\vec{x}=(3x_1+5x_3;x_1+x_2+1;3x_2-6x_3)$.

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}-2 & 0 & 4\\ 8 & 4 & 11\\ -1 & 0 & 3\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2+$$
$$+12x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3.$$

Варіант 3

1. Обчислити визначник:
а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{Vmatrix}, f(x) = x^2 + 7x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:
а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 8, \\ x + y - z = 2, \\ x - y + 4z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(7;2;4)$, $M_2(7;-1;-2), M_3(-7;-3;2), M_4(-4;2;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;-2)$, $\vec{q} = (3;-1;1), \vec{r} = (4;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\vec{a} = (-5;9;-13)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = \dfrac{1}{5}, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{2}$.
Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію $\text{ïð}_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;5), B(2;2), C(4;6)$. У ΔABC знайти:
а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxy та Oxz; площиною, що проходить через прямі: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=z-1$ і $x=t$, $y=2, z=t$; площиною, що проходить через пряму $\begin{cases}3x-z-3=0,\\ y=0,\end{cases}$ паралельно осі Oy.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(1;0;4)$ та прямі

$$l_1:\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1};$$

$$l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо* $A(3;0), B\left(2;\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо рівняння її асимптот* $y=\pm\dfrac{3}{4}x; A(-8;0)\in\Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D: y=-2$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$9x^2+4y^2=36-36z^2.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z=x^2+y^2, x^2+y^2-ax=0, z=0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}x^2=2py,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$A\vec{x}=(3x_1+2x_2-x_3^2;2x_1+x_3;3x_1-x_2)$

$B\vec{x}=(0;3x_1-2x_2;x_1+x_2-3x_3)$.

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A=\begin{Vmatrix}3&10&1\\0&1&0\\1&2&3\end{Vmatrix}$.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+$$
$$+12x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3.$$

Варіант 4

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x)=0$:

$$A=\begin{Vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}; f(x)=x^2-9x+10.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а) A=\begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{Vmatrix};\ б) A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-3y+4z=10, \\ 3x-6y+z=0, \\ x+3y+3z=13. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í}=x_{ç.î}+x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=2, \\ 3x_1+x_2-2x_3-2x_4=3, \\ x_1-3x_2+4x_3-4x_4=1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;1;4)$, $M_2(-1;5;-2), M_3(-7;-3;2), M_4(-6;-3;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p}=(0;5;1)$, $\vec{q}=(3;2;-1), \vec{r}=(-1;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a}=(-15;5;6)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}, |\vec{p}|=4, |\vec{q}|=\dfrac{1}{2}, (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\dfrac{5\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію ї$ð_{\vec{b}}(-\vec{a}+2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1), B(5;4), C(1;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною, що проходить через осі Ox і Oz; площиною, що проходить через прямі $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{3}$ і $x=\frac{y-3}{-2}=z$; площиною Oyz; площиною, що проходить через точки $(0;0;2)$ і $(0;3;0)$ паралельно осі Ox.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;3;1)$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1};$$
$$l_2:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса Е, *якщо ексцентриситет* $\varepsilon=\frac{\sqrt{21}}{5}, A(-5;0)\in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо* $A(\sqrt{80};3)$, $B(4\sqrt{6};3\sqrt{2})\in\Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D: y=1$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2+y^2+z^2=2z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2=x^2+y^2, x^2+y^2-ax=0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$A\vec{x}=(6x_2-x_3;5x_1+x_2-x_3;4x_3)$

$B\vec{x}=(x_1+x_2+2;3x_1-x_3;x_2+3x_3)$.

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}4&4&-1\\0&-4&0\\6&2&-1\end{Vmatrix}$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3.$$

Варіант 5

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 8x + 7.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 4z = -2, \\ x + 2y + z = 11, \\ 3x + y + z = 14. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-1;-5;2)$, $M_2(-6;0;-3), M_3(3;6;-3), M_4(-10;6;7)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (2;1;0)$, $\vec{q} = (1;-1;2), \vec{r} = (3;7;-7)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2;2;-1)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію ї ð$_{\vec{b}}(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1), B(4;5), C(2;0)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{3}=z$ і $x=-t-1, y=t+3, z=t+2$; площиною, що перпендикулярна до площини Oxz і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 3.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;3;3)$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1};$$
$$l_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a=11$, *ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{57}}{11}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ *і фокусна відстань* $2c=10\sqrt{13}$;

в) параболи Π, *якщо вісь симетрії* Ox, $A(27;9)\in\Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2-y^2+z^2=4.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2+y^2=2ax, z=x, z=3x.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$A\vec{x}=(x_1-3x_2^2;5x_2-x_3;4x_1-x_2)$

$B\vec{x}=(x_1+2x_2;2x_2-x_3;5x_1-x_2-2x_3)$.

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \end{Vmatrix}$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2-5x_2^2-10x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3.$$

Варіант 6

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 12 & -3 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x - 12.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 5z = -12, \\ 2x + 4y + z = 13, \\ 3x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 9, \\ 12x_1 + 15x_2 - 10x_3 + 9x_4 = 10, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(0;-1;-1)$, $M_2(-2;3;5), M_3(1;-5;-9), M_4(-1;-6;3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;2;0)$, $\vec{q} = (2;-1;3), \vec{r} = (0;1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2;0;-1)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ï ð_{\vec{b}}(2\vec{a} + 4\vec{b})$.

9. Дано точки $A(1;3), B(-2;1), C(0;-3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz; площиною Oxy; площиною, що проходить через точку $(4;-1;0)$ і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 3; площиною, що проходить через точку $(0;3;0)$ і пряму $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;0;1)$ та прямі

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1};$$
$$l_2:\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b=\sqrt{15}$ *і ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{10}}{25}$*;*

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\dfrac{3}{4}x$ *і дійсна піввісь* $a=8$*;*

в) параболи Π, *якщо її вісь симетрії* Oy, $A(4;-8)\in\Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$z^2-x^2-2y=0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z=x^2-y^2, z=0, z=2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}x^2+(y-4)^2=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox.

Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(x_3;x_1+2x_2;-7x_1-3x_3)$$
$$B\vec{x}=(x_1;x_2+x_3^3;x_1-2x_2-x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}-3&0&-1\\2&1&-4\\-2&0&-2\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3.$$

Варіант 7

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 5x - 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\textit{а)}\, A = \begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{Vmatrix}; \textit{ б)}\, A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x - y - z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 0, \\ 5x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 21x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(5;2;0)$, $M_2(2;5;0), M_3(1;2;4), M_4(-1;1;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;2)$, $\vec{q} = (1;0;1), \vec{r} = (-1;2;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-2;4;7)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію $\text{ï ð}_{\vec{b}}(-2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-2), B(2;0), C(-1;1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz; площиною, що проходить через точку $(0;2;0)$ паралельно площині Oxz; площиною, що проходить через точку $(1;0;3)$ і містить вісь Oy; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ і пряму $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z}{2}$.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(0;3;-1)$ та прямі

$$l_1:\frac{x+4}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-2};$$
$$l_2:\frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-5}{-5}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a=4$ і один з фокусів $F(3;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b=2\sqrt{10}$ і один з фокусів $F(-11;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D: x=-2$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:
$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0.$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$\frac{x^2}{25}-z^2-\frac{y^2}{9}=1.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2=4(x^2+y^2), x^2+y^2+z^2=1.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2}, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(0;x_1+4x_3;4x_1-x_2-x_3)$$
$$B\vec{x}=(x_1+3;x_2+3x_3;x_1-4x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2-6x_2^2-10x_3^2+4x_1x_2+6x_2x_3.$$

Варіант 8

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 8x + 9.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1, \\ 2x - 3y + 4z = 13, \\ 3x + y + z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -11. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;-1;-2)$, $M_2(1;2;1), M_3(5;0;-6), M_4(-10;9;-7)$.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;3;0)$, $\vec{q} = (2;-1;1), \vec{r} = (0;-1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (6;12;-1)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію $\text{ïð}_{\vec{b}}(-3\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-4;2), B(3;3), C(6;8)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxz та Oyz; площиною, що паралельна осі Oy і проходить через точки $(3;0;0)$ і $(0;0;1)$; площиною, що проходить через прямі $x = 2t, y = -3t + 3, z = t$ і $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(3;2;6)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1};$$
$$l_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 4$ *і один з фокусів* $F(3;0)$*;*

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 4$, *ексцентриситет* $\varepsilon = \dfrac{7}{5}$*;*

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 6$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y = x^2, z = y, z + y = 2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x = y, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З’ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (3x_2 - x_3; x_1 + x_3; x_2 - 4x_3)$$
$$B\vec{x} = (x_1; x_2^2 + x_3; -x_1 + x_2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -8 & 5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$4x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Варіант 9

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x + 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 11, \\ 4x + 2y + 4z = 14, \\ 3x - y + 5z = 12. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 35, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 50. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-2;0;-4)$, $M_2(-1;7;1), M_3(4;-8;-4), M_4(1;-4;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;3;2)$, $\vec{q} = (2;1;-1), \vec{r} = (1;-1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (1;-4;4)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію $\text{ïð}_{\vec{b}}(\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-1), B(1;-6), C(9;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що паралельна осі Ox і проходить через точки $(0;3;0)$ і $(0;0;2)$; площиною, що проходить через прямі $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z}{3}$ і $x = t+1$, $y = -2t+1, z = t+1$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(4;3;10)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5};$$

$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо* $A(0;\sqrt{3}), B\left(\sqrt{\tfrac{14}{3}};1\right) \in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо ексцентриситет* $\varepsilon = \dfrac{8}{7}, A(8;0) \in \Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D : y = -4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 + 3y^2 - 24z = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 - y^2 = 2az, x^2 + y^2 \le a^2, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (4x_1 - x_2 + x_3; 0; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_2 - x_3; 5).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ -9 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 10

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\textit{а)}\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{Vmatrix};\ \textit{б)}\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = -10, \\ x + 2y - 3z = -14, \\ 2x - y - z = -3. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(14;4;5)$, $M_2(-5;-3;2), M_3(-2;-6;-3), M_4(-2;2;-1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (4;1;1)$, $\vec{q} = (2;0;-3), \vec{r} = (-1;2;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-9;5;5)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$ і $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ї\,ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;-2), B(1;5), C(-4;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxy та Oxz; площиною, що проходить через пряму $\begin{cases} 3x + z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, паралельно осі Oy; площиною, що проходить через точку $(2;0;0)$ і пряму $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$. Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;0;-6)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1};$$

$$l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E*, якщо ексцентриситет* $\varepsilon = \dfrac{7}{8}, A(8;0) \in \mathrm{E}$*;*

б) гіперболи Γ*, якщо* $A\left(3;-\sqrt{\dfrac{15}{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{28}{3}};2\right) \in \Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D : y = 4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = a^2,$$

$$y = x, y = 2x, z = 0 (x \ge 0, y \ge 0).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (5x_1 + 2x_2^2; x_2 - x_3; x_1)$$

$$B\vec{x} = (0; x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_2 - 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-6x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Варіант 11

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 9 & -1 \\ 8 & -3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 6x + 19.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 2x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3), M_3(5;2;6)$, $M_4(8;4;-9)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;4;1)$, $\vec{q} = (1;3;-1), \vec{r} = (-2;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-5;-5;5)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 10, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ï\eth_{\vec{b}}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(5;8), B(-2;9), C(-4;5)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(-2;3;4)$ і відтинає на осях Oy і Oz відрізки 3 і 4; площиною, що проходить через точки $(-1;2;0), (0;2;1)$, $(2;2;-1)$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2};$$

$$l_2 : \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 12$ та ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{22}}{6}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}x$ і фокальна відстань $2c = 10$;

в) параболи Π, якщо вісь симетрії Ox і точка $A(-7;-7) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - 3y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З’ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2; x_1 - 4x_3; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1^3 + x_2; x_1 - x_2; x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Варіант 12

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 10 & 2 \\ -14 & -3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 7x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 11, \\ x + y - 5z = 11, \\ 5x + y - z = 27. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;-1;2)$, $M_2(1;2;-1), M_3(3;2;1), M_4(-4;2;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (5;1;0)$, $\vec{q} = (2;-1;3), \vec{r} = (1;0;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (13;2;7)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 4, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію ï ð$_{\vec{b}}(2\vec{a} - 4\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-4), B(-4;3), C(2;2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-3}$ і $\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$; площиною, що проходить через точку $(2;6;1)$ перпендикулярно до осі Oz.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(1;-1;1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-13}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-6}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-10}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b=2$, *ексцентриситет* $\varepsilon=\frac{5}{\sqrt{29}}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\frac{12}{13}x$ *та дійсна піввісь* $a=13$;

в) параболи Π, *якщо вісь симетрії* Ox *і точка* $A(-5;15)\in\Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2+4z^2-8y=0\,.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2),$$

$$y=x, y^2=x.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z=x^2, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(0;x_1+2x_2+3x_3;x_2-4x_3)$$

$$B\vec{x}=(-x_1+2x_2;x_1+3;3x_1-2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2+2x_3^2-x_1x_2+4x_2x_3.$$

Варіант 13

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 8 & -4 \\ 9 & -5 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = -12, \\ 2x + 3y + 4z = -2, \\ x - y - 5z = 15. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í} ,$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 15x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;1;2)$, $M_2(-1;1;2), M_3(2;-2;4), M_4(-1;0;-2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;1)$, $\vec{q} = (-2;0;1), \vec{r} = (3;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-19;-1;7)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 6, |\vec{q}| = 7, (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(\vec{a} + 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(2;5), B(5;2), C(-3;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площиною Oxy; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ паралельно осям Ox та Oy; площиною, що проходить через точку $(1;1;0)$ і містить вісь Oz; площиною, що проходить через точки $(0;0;0),(0;0;1)$, $(2;1;0)$; площиною, що проходить через точки $(6;0;0)$ і $(0;3;0)$ паралельно осі Oz.

Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1: \frac{x-3}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3};$$

$$l_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-8}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 6$ *та один з фокусів* $F(-4;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 3$ *та один з фокусів* $F(7;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D: x = -7$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = az, x^2 + y^2 = ax, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = y, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1^2 + x_2; -x_3; x_1 - x_2 + x_3)$$

$$B\vec{x} = (4x_3; 0; x_1 - 2x_2 - 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 14

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{Vmatrix}, f(x) = x^2 + 10x + 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{Vmatrix};\ \text{б) } A = \begin{Vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = -5, \\ x + y - z = -1, \\ 3x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;3;1)$, $M_2(4;1;-2), M_3(6;3;7), M_4(7;5;-3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;2)$, $\vec{q} = (0;1;1), \vec{r} = (2;-1;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;-3;4)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію $ï\,ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(6;-2), B(1;3), C(-4;0)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площиною Oxz; площиною, що проходить через точку $(0;3;0)$ паралельно площині Oxz; площиною, що проходить через точку $(1;0;1)$ і містить вісь Oy; площиною, що проходить через точки $(0;1;0),(0;2;0),(1;0;2)$; площиною, що проходить через точку $(-1;0;2)$ перпендикулярно до осі Oz.
Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(0;-2;-8)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 7$ *і один з фокусів* $F(5;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 11$ *та ексцентриситет* $\varepsilon = \frac{12}{11}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 10$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + 7y^2 + 4z^2 - 28 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (-x_3; 4x_1 + x_2 - x_3; x_2 + 2x_3)$$

$$B\vec{x} = (5; x_1 + x_2; -3x_2 + 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 8 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-2x_1^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Варіант 15

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 2x - 11.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а)}\, A = \begin{Vmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix};\ \text{б)}\, A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 10, \\ 3x - y + 4z = 20, \\ x - 2y - 2z = -5. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 11x_3 + 9x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;3;1), M_3(3;2;1), M_4(5;9;-8)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (3;1;0)$, $\vec{q} = (-1;2;1), \vec{r} = (-1;0;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;3;-1)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію $\text{ї ð}_{\vec{b}}(-3\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;5), B(6;2), C(-3;-4)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxz та Oxy; площиною, що проходить через точку $(1;2;3)$ паралельно площині Oyz; площиною, що проходить через лінії перетину площин $x=3$ і $y=0$ та $x=3$ і $z=0$; площиною, що проходить через точки $(0;-3;4)$ та $(1;3;0)$ паралельно осі Ox.

Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2;-1;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1};$$

$$l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса Е, *якщо точки* $A\left(-\sqrt{\frac{17}{3}};\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{21}}{2};\frac{1}{2}\right) \in \text{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо рівняння асимптот* $y = \pm\frac{1}{2}x$ *та* $A(6;0) \in \Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D: y = -1$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$12x^2 - 2y - 5z^2 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x,$$

$$y = 2x, x = 1.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oy. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 - x_3; 3x_1 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_1 + x_2^2; x_1).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$3x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

Варіант 16

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 10 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 11x + 15.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y - z = -6 \\ 8x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{\div.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\div.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3), M_3(-2;7;3), M_4(-4;8;-12)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (2;0;3)$, $\vec{q} = (-1;2;1), \vec{r} = (1;1;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-1;7;-4)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - 5\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-4;0), B(2;5), C(2;-2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oyz і Oxy; площиною, що проходить через точку $(-2;0;3)$ перпендикулярно до осі Oz; площиною, що проходить через точки $(1;1;-1),(0;2;2),(2;0;1)$; площиною, що проходить через точки $(2;0;0)$ і $(-2;6;0)$ перпендикулярно до площини Oxy. Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2;0;-1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса Е*, якщо ексцентриситет* $\varepsilon = \frac{3}{5}$, $A(0;8) \in$ Е*;*

б) гіперболи Γ*, якщо* $A(\sqrt{6};0)$, $B(-2\sqrt{2};1) \in \Gamma$*;*

в) параболи, якщо її директриса $D : y = 9$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - xy + y^2 + x + y = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 + 2z^2 = 6y.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Oy. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_3; 0; x_1 + x_2 + x_3)$$
$$B\vec{x} = (2x_1 + x_3; x_2^2; x_1 - x_2 + 2x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 12 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-3x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Варіант 17

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 7y - z = -4, \\ 3x - y + 2z = 13, \\ x + 4y + 3z = 16. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-3;4;-7)$, $M_2(1;5;-4), M_3(-5;-2;0), M_4(2;5;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;1;4)$, $\vec{q} = (0;-3;2), \vec{r} = (2;1;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (6;5;-14)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію $ï\,ð_{\vec{b}}(-2\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-1;-3), B(2;4), C(3;-1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$*;*

б) довжину висоти M_4H*, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$*;*

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$*;*

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2*;*

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$*;*

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$*.*

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxy ³ Oxz; площиною, що проходить через точку $(1;3;2)$ перпендикулярно до осі Oy; площиною, що проходить через вісь Oy і точку $(1;0;1)$; площиною, що проходить через пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z-1}{-2}$ паралельно осі Oy. Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(2;2;5)$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1};$$

$$l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1*;*

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a=11$ *та ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{10}{11}$*;*

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\dfrac{\sqrt{11}}{5}x$ *та фокусна відстань* $2c=12$*;*

в) параболи Π*, якщо її вісь симетрії* Ox*,* $A(-7;5)\in\Pi$*;*

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2+4y^2+4z^2=4z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,(z\ge 0),$$

$$x^2+y^2=R(R-2z)$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z=4y^2, \\ x=0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(x_2-3x_3;2x_1+x_2;4x_1-3x_3)$$

$$B\vec{x}=(x_2+x_3+1;x_1-x_2;3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2+10x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3.$$

Варіант 18

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -11 & 0 \\ 7 & 3 & 11 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 2x + 2y + z = -2, \\ x - 3y + 4z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 9x_4 = 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 13x_4 = 13 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 22x_4 = 23 \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0), M_3(2;1;-2), M_4(3;4;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;4)$, $\vec{q} = (-1;1;3), \vec{r} = (1;-2;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (6;-1;7)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, |\vec{p}| = \dfrac{1}{2}, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;-1), B(-2;5), C(3;2)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxz ³ Oxy; площиною, що проходить через точку $(1;3;-1)$ паралельно площині Oxz; площиною, що проходить через точки $(4;0;0),(0;1;3)$ паралельно осі Oy; площиною, що проходить через точку $\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$ і пряму $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-3}$. Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(0;1;-1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b=5$ та ексцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\frac{1}{3}x$ і дійсна піввісь $a=3$;

в) параболи Π, якщо вісь симетрії Ox, $A(-9;6)\in\Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2+12xy+10y^2-6x+4y-1=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$16x^2-y^2+32z=0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2+y^2+z^2=4Rz-3R^2,$$
$$z^2\le 4(x^2+y^2).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Oy. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(x_1+2x_2-x_3;x_2+3x_3;0)$$
$$B\vec{x}=(x_1+x_2^2+x_3;0;x_1-x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A=\begin{Vmatrix}-4&0&1\\7&3&5\\-2&0&-1\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-5x_1^2-x_2^2-8x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3.$$

Варіант 19

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & -14 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 16x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + z = 5, \\ x + y - 3z = -7. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(4;-1;3)$, $M_2(-2;1;0), M_3(0;-5;1), M_4(3;2;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H*, застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;5)$, $\vec{q} = (-1;3;2), \vec{r} = (0;-1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (5;15;0)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$*, який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$*, якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 4, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ï ð$_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;5), B(2;2), C(4;6)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM*, записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD*, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: площиною Oyz; площиною, що проходить через точку $(2;3;1)$ перпендикулярно до осі Ox; площиною, що проходить через точку $(0;2;2)$ і містить вісь Ox; площиною, що проходить через точки $(1;0;0),(3;0;0),(0;1;2)$; площиною, що проходить через точку $(1;0;3)$ паралельно площині Oxy. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(2;2;4)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 9$ і один з фокусів $F(7;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 6$ і один з фокусів $F(12;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = -\frac{1}{4}$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$3x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 = R^2, z = 0,$$
$$Rz = 2R^2 + x^2 + y^2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (-x_1 + x_2; 5; x_2 + x_3)$$
$$B\vec{x} = (3x_1 - x_2; 3x_2; x_2 + 4x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & -4 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_2^2 - 7x_3^3 - x_1x_2 + 2x_2x_3 - 8x_1x_3.$$

Варіант 20

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - x + 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 6y + 3z = 8, \\ 6x + 3y - z = 34, \\ 3x + y - 6z = 22. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - 14x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;0;3), M_3(2;1;-1), M_4(2;-2;-4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H*, застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;1;0)$, $\vec{q} = (0;1;-2), \vec{r} = (1;0;3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2;-1;11)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$*, який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$*, якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oy.

8. Дано вектори $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(-\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-1;2), B(3;-1), C(0;4)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM*, записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD*, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней призми, яка обмежена: площинами Oxz ³ Oyz; площиною, що проходить через точку $(1;2;2)$ перпендикулярно до осі Oz; площиною, що проходить через точку $(0;-1;4)$ паралельно площині Oxy; площиною, що паралельна до осі Oz і проходить через точки $(2;0;5)$ і $(0;3;1)$. Зобразити призму графічно.

12. Задано точку $M_0(0;0;-5)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3};$$

$$l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 5$ та один з фокусів $F(-10;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 9$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{3}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 12$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$36x^2 - 9y^2 - 4z^2 - 36 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 + 2x_2; -3x_3; 4x_1 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; 3x_3; 2x_2 + 1).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 8 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 8x_1x_3.$$

Варіант 21

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x - 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а) A = \begin{Vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix};\ б) A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 5, \\ 2x + y - 3z = -6, \\ 3x - 2y - z = -2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 13x_4 = 23, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 20x_4 = 37, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 19. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(1;-1;2), M_3(0;1;-1), M_4(-3;0;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;2)$, $\vec{q} = (-1;0;1), \vec{r} = (2;5;-3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (11;5;-3)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 8, |\vec{q}| = \dfrac{1}{2}, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1), B(5;4), C(1;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(2;3;-4)$ і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 4; площиною, що проходить через точку $(0;1;0)$ паралельно площині Oxz. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(3;0;2)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{0};$$

$$l_2 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса Е, *якщо* $A(0;-2)$, $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2};1\right) \in$ Е;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\frac{2\sqrt{10}}{9}x$ *і один з фокусів* $F(-11;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D : y = 5$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$y^2 - 4x^2 + z = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, z = 0, y = 1,$$

$$y - 2x, y = 6 - x.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 + 3x_3; x_1; 2x_2 - 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_2; x_1 + 5x_3; x_1^2 + x_2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A = \begin{Vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Варіант 22

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x)=0$:

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 6 \end{Vmatrix}, f(x)=x^2-6x+10.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$3.1) A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{Vmatrix}; 3.2) A=\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+2y+z=-1, \\ x-3y+2z=-1, \\ 3x+y+z=2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í}=x_{ç.î}+x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=3, \\ -2x_1+2x_2+x_3+4x_4=2, \\ 6x_1-5x_2+x_3-7x_4=-1, \\ 4x_1-3x_2+2x_3-3x_4=1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;0;2)$, $M_2(1;2;-1), M_3(2;-2;1), M_4(2;1;0)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H*, застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p}=(2;0;1)$, $\vec{q}=(1;1;0), \vec{r}=(4;1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a}=(8;0;5)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$*, який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$*, якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oz.

8. Дано вектори $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q}$ і $\vec{b}=\vec{q}-\vec{p}$, $|\vec{p}|=\frac{5}{2}, |\vec{q}|=2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ї ð_{\vec{b}}(-3\vec{a}+2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1), B(4;5), C(2;0)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM*, записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD*, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(2;1;1)$ і відтинає на осях Ox і Oy відрізки 2 і 3; площиною, що проходить через точку $(1;0;0)$ паралельно площині Oyz. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(5;3;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-3};$$

$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо ексцентриситет* $\varepsilon = \frac{2}{3}$, $A(-6;0) \in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо* $A(\sqrt{8};0)$, $B(3;3) \in \Gamma$*;*

в) параболи, якщо її директриса $D : y = 1$*;*

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:
$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + 7y^2 + 4z^2 = 28y.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y^2 = x, y^2 = 4x, z = 0, z + x = 6.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oy. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_3 + x_1; 6)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + 3x_3; 0; 5x_1 + 6x_2 - 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A = \begin{Vmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2 - 8x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Варіант 23

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 13 \\ 2 & -23 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 24x - 3.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\, A = \begin{Vmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \\ 8x_1 - 4x_2 + 20x_3 - 45x_4 = 28. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;2;-3)$, $M_2(1;0;1), M_3(-2;-1;6), M_4(0;-5;-4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;3)$, $\vec{q} = (1;2;-1), \vec{r} = (2;0;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;1;8)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 7\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію ї ð$_{\vec{b}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;3), B(-2;-1), C(0;-3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: площинами Oxy ³ Oyz; площиною, що проходить через точки $(2;0;0), (-2;3;3), (0;1;2)$. площиною, що проходить через точку $\left(\frac{4}{3};1;0\right)$ та вісь Oz; площиною, що проходить через точку $(0;2;0)$ паралельно площині Oxz. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(1;0;-1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{0}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 25$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{5}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{29}}{14}x$ і фокусна відстань $2c = 30$.

в) параболи Π, якщо вісь симетрії Oy, $A(4;1) \in \Pi$;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 6x.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = \frac{y^2}{2}, 2x + 3y - 12 = 0,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z = y, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 - 3x_3; x_1 + x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_3; 2x_1 - x_3; x_1 - x_3^3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{Vmatrix}$.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-3x_2^2 + 4x_3^2 - x_1x_2 + 10x_1x_3.$$

Варіант 24

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 12 & 5 \\ -5 & -2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x + 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y - 4z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x - y - z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5), M_3(-6;0;-3), M_4(1;-1;2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (3;0;2)$, $\vec{q} = (1;2;-1), \vec{r} = (-1;1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (8;1;12)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з віссю Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 5, (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію ї $\text{ð}_{\vec{b}}(\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-2), B(2;0), C(-1;1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що паралельна осі Oy і відтинає на осях Ox і Oz рівні відрізки довжиною 2; площиною, що проходить через точки $(-2;5;3),(0;0;3),(2;5;-3)$. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(0;3;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0};$$
$$l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 2\sqrt{15}$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{7}{8}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\dfrac{5}{6}x$ і дійсна піввісь $a = 6$;

в) параболи Π, якщо її вісь симетрії Oy, $A(-2;3\sqrt{2}) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:
$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - 4y^2 - z^2 + 4 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = 9 - y^2, 3x + 4y = 12,$$
$$x = 0, y = 0, z = 0 (y \geq 0).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} 2y + z = 2, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (2x_3; x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 2)$$
$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + 3x_3; 0).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & -10 \\ -8 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:
$5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

Варіант 25

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 12 & -4 \\ 10 & -3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 9x + 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а) A = \begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}; б) A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 3, \\ 2x + y - z = 3, \\ x + y + 3z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;-4), M_3(3;0;-1), M_4(7;-3;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;4;1)$, $\vec{q} = (-3;2;0), \vec{r} = (1;-1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-9;-8;-3)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(-3\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-4;2), B(-2;-2), C(6;8)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точки $(0;0;1),(-2;3;1),(4;0;-1)$. площиною, що проходить через точки $(2;0;0)$ і $(0;1;0)$ паралельно осі Oz. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;1;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{0}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a = 13$ і один з фокусів $F(-5;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 4\sqrt{6}$ і один з фокусів $F(-7;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = -\dfrac{3}{8}$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 - y^2 - z^2 - 4 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_2 - 3x_3; x_1 + 2x_3; x_1 - x_2 - x_3)$$

$$B\vec{x} = (0; x_1 + 5; x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-5x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Варіант 26

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 7x + 12.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 11, \\ 3x + y + z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(0;-3;1)$, $M_2(-4;1;2), M_3(2;-1;5), M_4(3;1;-4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;2;1)$, $\vec{q} = (0;1;-1), \vec{r} = (5;-3;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (15;-20;-1)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 3, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;0), B(1;4), C(3;-1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точку $(0;0;-3)$ та лінію перетину площин $2x+3y-6=0$ і Oxy; площиною, що проходить через точку $(0;0;-2)$ паралельно площині Oxy; площиною, що проходить через точку $(1;0;-2)$ перпендикулярно до осі Ox. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(4;0;-1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3};$$

$$l_2 : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b=7$ і один з фокусів $F(13;0)$;

б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b=4$ і один з фокусів $F(-11;0)$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 13$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + y^2 + 2 = z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y,$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} xy = a^2, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_2 + 3x_3; x_1 - x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 + x_3; -x_2; -x_1 - x_3^3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A = \begin{Vmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 8 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Варіант 27

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 10 & -5 \\ -7 & 4 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 14x + 5.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 5 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + y + 2z = 2, \\ 2x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í}\ ,$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2), M_3(3;0;1), M_4(-4;3;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;1)$, $\vec{q} = (1;-2;0), \vec{r} = (0;3;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (2;7;5)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію $ï ð_{\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;-2), B(1;5), C(-4;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через точки $(0;0;2),(-1;2;3),(1;1;1)$; площиною, що проходить через пряму $x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$ перпендикулярно до площини Oyz. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(1;4;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1};$$

$$l_2 : \frac{x}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо* $A(-3;0)$, $B\left(1;\dfrac{\sqrt{40}}{3}\right) \in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо рівняння її асимптот* $y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}x, A(-6;\sqrt{22}) \in \Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D : y = 4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2 + 10xy + y^2 + 18x - 6y - 16 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$2x^2 + y^2 - 4z = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2 = xy, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oy. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (x_1; x_2 + x_3; x_1 + x_2 + 3x_3)$$

$$B\vec{x} = (x_2; -x_3 + 1; x_1 - x_2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 13 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -3 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Варіант 28

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -7 & -5 \\ 9 & 6 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + x + 3.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 8 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8, \\ x - 3y - 5z = 6, \\ 3x + y - 7z = -4. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í}\,,$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-2;-1;-1)$, $M_2(0;3;2), M_3(3;1;-4), M_4(-4;7;3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;5)$, $\vec{q} = (3;-1;2), \vec{r} = (-1;0;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (8;-7;-13)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}, |\vec{p}| = \dfrac{1}{2}, |\vec{q}| = 4, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію $ïð_{\vec{b}}(-\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(5;8), B(-2;9), C(-4;5)$. В ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через пряму $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$ і точку $(0;0;-3)$; площиною, що проходить через точки $(0;3;0)$ і $(0;0;-3)$ паралельно осі Ox. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(3;-5;0)$ та прямі

$$l_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1};$$
$$l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса Е, *якщо ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{5}{6}$, $A(0;-\sqrt{11})\in$ Е*;*

б) гіперболи Γ, *якщо* $A\left(\sqrt{\dfrac{32}{3}};1\right)$, $B\left(\sqrt{8};0\right)\in\Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D: y=-3$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2+12xy+2y^2+60x+20y+51=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2+y^2+z^2=2x+2y-1.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2+y^2=2x, x^2+y^2=2y,$$
$$z=0, z=x+2y.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox.

Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(x_2-x_3;3;x_2+x_3)$$
$$B\vec{x}=(x_1;0;x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}2&0&1\\-3&-7&5\\1&0&2\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+x_1x_3+4x_2x_3.$$

Варіант 29

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -7 & 9 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 3x + 12.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-3;-5;6)$, $M_2(2;1;-4), M_3(0;-3;-1), M_4(-5;2;-8)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (4;0;1)$, $\vec{q} = (3;1;-1), \vec{r} = (0;-2;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (0;-8;9)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ï ð_{\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-4), B(-4;3), C(2;2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{-2}$ і $x=0, y=2t$, $z=2-t$; площиною, що проходить паралельно осі Oy і відтинає на осях Ox і Oz рівні відрізки довжиною 2. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(4;1;5)$ та прямі

$$l_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{0};$$
$$l_2: \frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a=15$, *ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{13}{15}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{8}x$ *і фокусна відстань* $2c=18$;

в) параболи Π, *якщо її вісь симетрії* Oy, $A(4;-10)\in\Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$z=x^2+2y^2-2.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z=xy, x^2+y^2=R^2\,(x,y,z\geq 0).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Oy.

Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(5x_3;-x_1+2x_2;0)$$

$$B\vec{x}=(x_1-x_2-x_3;x_2^2+x_1;-x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}-4 & 0 & -1\\ 2 & 7 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-4x_1^2+5x_2^2-x_3^2-6x_1x_2+2x_2x_3.$$

Варіант 30

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 3x + 8.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}; \; A = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\text{÷.í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{\text{÷.í}}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;-4;-3)$, $M_2(5;-6;0), M_3(-1;3;-3), M_4(-10;-8;7)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;0;5)$, $\vec{q} = (3;2;7), \vec{r} = (5;0;9)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-4;2;-12)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Oz.

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(-2\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(2;5), B(5;2), C(-3;-3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней тіла, яке обмежене: координатними площинами; площиною, що проходить через пряму $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно до площини Oyz; площиною, що проходить через прямі $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ і $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-3}$. Зобразити тіло графічно.

12. Задано точку $M_0(3;2;0)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1};$$

$$l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 2\sqrt{2}$, *ексцентриситет* $\varepsilon = \frac{7}{9}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ *і дійсна піввісь* $a = 6$;

в) параболи Π, *якщо вісь симетрії* Oy, $A(15;-45) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4xy + 4y + 1 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями: $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, z = 0$.

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x = 2 - y^2, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Oy. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (6x_3; -x_2 - x_3; x_1 - 2x_2)$$

$$B\vec{x} = (x_1 - 2x_2; x_2 - 3x_3; 4x_2 + 4).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Додаткові задачі

1. Розв'язати матричне рівняння:

1) $A_1X = A_2$; 3) $A_3X = A_4$.

2) $XA_5A_6 = (1\ -2)$; 4) $A_7X = A_8$.

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{Vmatrix}; A_2 = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix}; A_3 = \begin{Vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{Vmatrix};$$

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}; A_6 = \begin{Vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -7 \end{Vmatrix};$$

$$A_5 = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}, A_7 = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, A_8 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

2. Нехай $A^2 + A + E = 0$. Довести, що матриця A невироджена. Вивести формулу для знаходження A^{-1}.

3. Довести, що довільну матрицю можна зобразити у вигляді симетричної та кососиметричної матриці.

4. Довести:

$$a_{11}^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n} \\ a_{21}a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n} \\ a_{31}a_{3n} \end{vmatrix} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{n1}a_{n2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{n1}a_{n3} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n} \\ a_{n1}a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

5. Обчислити визначник Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 \end{vmatrix}. \quad A_9 = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{Vmatrix}.$$

6. Знайти значення багаточлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ від матриці A_9.

7. Перевірити формулу:

$$(S^{-1}AS)^n = S^{-1}A^nS.$$

8. Знайти обернену матрицю A^{-1}:

$$1)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$$2)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{Vmatrix}.$$

9. Знайти ранг матриці:

$$1)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$$2)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

10. Знайти значення λ, при яких матриця A_{10} (завдання 11) має найменший ранг.

11. Знайти ранг матриці A_{10} при різних значеннях λ.

$$A_{10} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{Vmatrix}; A_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{Vmatrix}.$$

12. Дослідити систему, яка задана розширеною матрицею, при різних значеннях λ.

$$1)\ A = \left\Vert \begin{array}{ccc|c} 3 & 2-\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\lambda \\ 4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda+4 & 2\lambda+3 \end{array} \right\Vert.$$

$$2)\ A = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{array} \right\|.$$

$$3)\ A = \left\| \begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right\|.$$

13. Які з рядків матриці A:

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{array} \right\|$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків для однорідної системи рівнянь, з матрицею B:

$$B = \left\| \begin{array}{ccccc} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right\|.$$

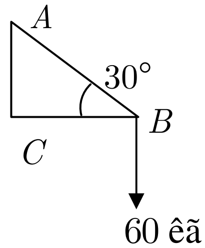
14. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні і $\overrightarrow{AB} = \frac{\alpha}{2}\vec{a}, \overrightarrow{BC} = 4(\beta\vec{a} - \vec{b}), \overrightarrow{CD} = 4\beta\vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$. Знайти α і β і довести колінеарність $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{DA}$.

15. Задано два вектори $\vec{a} = (8;4;1)$ та $\vec{b} = (2;-2;1)$. Знайти вектор $\vec{c}$, компланарний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ортогональний вектору $\vec{a}$, рівний йому за довжиною і утворює з вектором $\vec{b}$ тупий кут.

16. Визначити параметр λ так, щоб векторний добуток векторів $\vec{a} = (0;2;-1)$ і $\vec{b} = (2;0;\lambda)$ утворював кут $\frac{2\pi}{3}$ з прямою $y = 2x - 2, z = 3x - 1$.

17. Обчислити в точці $M(-3;4;2)$ напруженість $\vec{M}$ магнітного поля, утвореного струмом $\vec{I} = -3\vec{k}$, який тече вздовж прямолінійного провідника.

18. Вантаж вагою 60 кг підтримується двома стрижнями AB і CB. Визначити сили, які виникають в стрижнях, якщо $\angle ABC = 30°$.



19. Скласти рівняння бісектриси кута, утвореного прямими $x - 7y = 1$ та $x + y = -7$, всередині якого знаходиться точка $A(1,1)$.

20. При яких значеннях B та D пряма $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ лежить у площині Oxy.

21. При яких значеннях D пряма $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$ перетинає вісь Oz.

22. Показати, що прямі $x = 3z - 4$, $y = z + 2$ та $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ перетинаються. Знайти точку їх перетину.

23. Напрямні косинуси прямої, яка проходить через точку $M(2;1;-1)$ пропорційні числам $3:4:1$. Знайти рівняння площини, яка проходить через цю пряму і перпендикулярна до площини $5x - 3y + 2z - 9 = 0$.

24. Вивести формулу відстані між двома точками в полярних координатах.

25. Знайти рівняння гіперболи, директриси якої поділяють фокусну відстань на три рівні частини.

26. Скласти рівняння дотичних до кривої $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y = 16$, які проходять через точку $A(3;3)$.

27. Визначити тип кривої:

1) $(3x - 4y)^2 - 5(x + 2y - 1)^2 = 1$.

2) $(4x + 3y - 1)^2 + (4x + 3y + 2)^2 = 5$.