Лінійні геометричні об’єкти (Пряма на площині. Площина і пряма в просторі)

1. Рівняння лінії

<u>Означення</u>. Геометричним місцем точок на площині називають множину всіх точок цієї площини, які мають деяку спільну властивість.

<u>Означення</u>. Нехай задано рівняння (1) $F(x,y)=0$. Множину всіх точок M координатної площини, координати x і y яких задовольняють даному рівнянню, називають лінією, що визначається цим рівнянням.

<u>Означення</u>. Нехай на координатній площині задано деяку лінію l. Рівнянням, що відповідає даній лінії або просто рівнянням лінії l називають таке рівняння (1) $F(x,y)=0$, якому задовольняють координати x і y всіх точок цієї лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

Якщо рівняння деякої лінії відоме, то дослідження геометричних властивостей цієї лінії зводиться до вивчення властивостей її рівняння – у цьому полягає одна з основних ідей аналітичної геометрії. Цінність цієї ідеї в тому, що дослідження рівняння є значно простішим, а ніж безпосереднє геометричне дослідження лінії. Крім того, для дослідження рівняння існують добре розроблені методи алгебри і математичного аналізу.

<u>Означення</u>. Лінія називається а***лгебраїчною***, якщо її рівняння (1) є алгебраїчним, тобто многочленом змінних $x,\ y$. Степінь рівняння алгебраїчної лінії називається ***порядком*** цієї ***лінії***.

Приклади:

$2x-3y-4=0$ – алгебраїчне рівняння 1-го порядку; $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ – алгебраїчне рівняння 2-го порядку.

Рівняння типу (1) можуть бути не алгебраїчними, Якщо лінія визначається не алгебраїчним рівнянням, то вона називається неалгебраїчною або трансцендентною, наприклад, $\sin x+\cos x-1=0$, $2^y-\ln x+2=0$ тощо.

2. Пряма на площині

2.1. Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним даній прямій; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої, тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{a}\left(\alpha;\beta\right)$, який називається *напрямним вектором прямої*. Складемо рівняння цієї прямої.

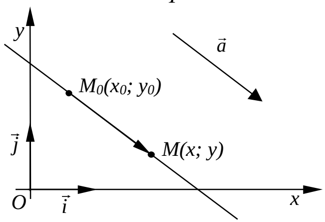

Рис. 1

Напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l – це вектор, паралельний до прямої l (рис. 1). Довільна точка M лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{a}$. Якщо координати точки M позначити $\left(x;y\right)$, то $\overrightarrow{M_0M}\left(x-x_0, y-y_0\right)$. Умова колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ запишеться так (пропорційність координат):

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}. \qquad (2)$$

Задавати пряму співвідношеннями (2) можна і у випадку, коли один із знаменників α чи β в (2) дорівнює нулю, якщо вважати, що дорівнює нулю і відповідний чисельник. Наприклад, запис

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{\beta}$$

означає, що $x-x_0=0 \Leftrightarrow x=x_0$, тобто пряма проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}\left(0;\beta\right)$ (паралельно осі Oy).

Означення. Рівняння (1) або (2) називається ***канонічним рівнянням прямої***.

Запишемо рівняння прямої l, що проходить через дві задані точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$ і $M_2\left(x_2;y_2\right)$.

За напрямний вектор прямої l можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ і задача зведеться до попередньої. Рівняння прямої l приймає вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3)$$

Запишемо рівняння прямої l, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно ненульовому вектору $\vec{N}(A;B)$.

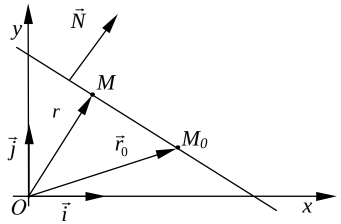

Рис. 2

Виберемо на прямій l довільну точку M зі змінними координатами x, y. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0.$$

Скористаємося виразом для скалярного добутку у координатній формі. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ має координати $x-x_0$, $y-y_0$, а вектор $\vec{N}$ – координати A, B. Тому шукане рівняння можна подати у вигляді

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \iff Ax+By+C=0, \qquad (4)$$

де $C=-(Ax_0+By_0)$.

<u>**Означення**</u>. Рівняння (4) називається ***загальним рівнянням прямої***, а вектор $\vec{N}(A;B)$ – ***нормальним вектором*** прямої.

Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні, отже, їхні відповідні координати пропорційні.

Запишемо рівняння прямої l, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k.

Перейдемо до рівняння прямої у формі (4). До такої форми можна звести загальне рівняння (1) прямої, яка не паралельна осі Oy $(B\neq 0)$:

$$Ax+By+C=0 \iff By=-Ax-C \iff y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \iff y=kx+b, \qquad (6)$$

де $k=-\dfrac{A}{B}$, $b=-\dfrac{C}{B}$.

<u>Означення</u>. Число $k=-\dfrac{A}{B}$ називається ***кутовим коефіцієнтом*** прямої.

<u>Означення</u>. Рівняння прямої (6) називається рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

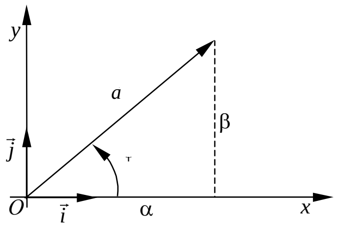

Рис. 3

<u>Зауваження 1</u>. Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано вектор $\vec{a}(\alpha;\beta)$. Число $k=\dfrac{\beta}{\alpha}$ називається кутовим коефіцієнтом вектора $\vec{a}$. З рис. 3 випливає геометричний смисл кутового коефіцієнта вектора:

$$k=\frac{\beta}{\alpha}=\operatorname{tg}\angle\left(\vec{i},\vec{a}\right)=\operatorname{tg}\varphi.$$

Кутовий коефіцієнт вектора характеризує його напрямок і не залежить від довжини вектора.

З'ясуємо геометричний смисл коефіцієнта b у рівнянні (6). Для цього покладемо в (6) $x=0$. В результаті отримуємо $y=b$. Отже, число b є ординатою точки перетину $Q(0;b)$ прямої (6) з віссю Oy (рис. 4).

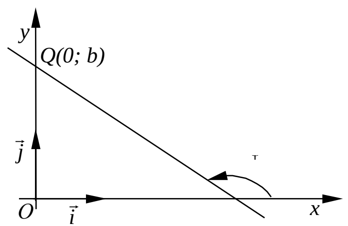

Рис. 4

Запишемо рівняння прямої, що має заданий кутовий коефіцієнт k і проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$.

Оскільки пряма (6) проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$, отримуємо тотожність

$$y_0=kx_0+b \iff b=y_0-kx_0. \qquad (7)$$

Підставивши (7) в (6), будемо мати шукане рівняння

$$y=kx_0+y_0-kx_0 \iff y-y_0=k(x-x_0). \qquad (8)$$

Перейдемо до параметричних рівнянь прямої. Під такими рівняннями розуміють рівняння, в яких координати довільної точки прямої виражаються через довільний параметр t .

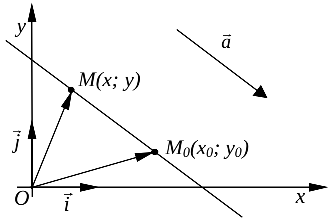

Рис. 5

Нехай пряма l проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}\left(\alpha;\beta\right)$ (рис. 5). Довільна точка $M\left(x; y\right)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ колінеарні, тобто тоді і тільки тоді, коли ці вектори відрізняються числовим множником

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} . \tag{9}$$

Векторну рівність (9) можна подати у координатній формі:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha t \\ y - y_0 = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \tag{10}$$

<u>Означення</u>. Рівняння (10) називаються ***параметричними рівняннями*** прямої.

Усі одержані вище рівняння прямої лінії є рівняннями першого степеня відносно змінних *x* і *y*, тобто лінійними рівняннями. Отже, рівняння будь-якої прямої, яка лежить в площині *Oxy*, є лінійним рівнянням відносно *x* і *y*.

Покажемо тепер, що правильним буде й обернене твердження: довільне лінійне рівняння (4) $Ax + By + C = 0$, де $A^2 + B^2 \neq 0$, визначає пряму на площині.

Нехай $\left(x_0; y_0\right)$ – пара чисел, які є розв'язком рівняння (4), тобто

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 . \tag{11}$$

Точка $M_0\left(x_0; y_0\right)$ належить до геометричного місця точок, яке визначається рівнянням (4). Віднімемо від рівняння (4) тотожність (11). Отримаємо рівняння, рівносильне рівнянню (4):

$$Ax + By + C - \left(Ax_0 + By_0 + C\right) = 0 \Leftrightarrow A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0 . \tag{12}$$

Якщо ввести позначення $\overrightarrow{M_0M}$ (має координати $x-x_0$, $y-y_0$), $\vec{N}(A;B)$, то рівняння (12) прийме вигляд:

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0.$$

Згідно з доведеним вище це означає, що рівняння (12), а тому і рівносильне йому рівняння (4), визначає пряму l, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}(A;B)$.

2.2. Взаємне розміщення двох прямих на площині. Кут між двома прямими

Нехай у декартовій прямокутній системі координат на площині задано загальні рівняння двох прямих l_1 та l_2

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{13}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{14}$$

Можливі такі випадки взаємного розміщення цих прямих:

1) вони можуть перетинатися;
2) можуть бути паралельними;
3) можуть співпадати.

Зауважимо, що дослідження взаємного розміщення двох прямих, заданих рівняннями (13) і (14) – це з точки зору алгебри дослідження розв'язку системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Перетину двох прямих з алгебраїчної точки зору відповідає випадок, коли система рівнянь (13), (14) має єдиний розв'язок; паралельності прямих - випадок, коли ця система не має розв'язків, тобто є несумісною; співпаданню прямих - випадок, коли система має нескінченну множину розв'язків.

Твердження. Для того щоб прямі l_1 та l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}. \tag{15}$$

(Якщо прямі l_1 та l_2 перетинаються, то нормальні вектори $\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1)$ і $\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2)$ відповідно прямих (13) і (14) не колінеарні. Умовою неколінеарності векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$ є умова (15).)

Твердження. Для того щоб дві різні прямі (1) і (2) були паралельними, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

(Дійсно, за умови паралельності прямих l_1 та l_2 нормальні вектори цих прямих $\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1)$ і $\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2)$ колінеарні, тобто має місце рівність $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Але обов'язково $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, оскільки у противному разі рівняння (13) і (14) зображали б одну і ту ж пряму, а це суперечить умові, що прямі різні.)

Твердження. Для того щоб прямі (13) і (14) співпадали, необхідно і достатньо виконання умов

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,$$

тобто пропорційності коефіцієнтів одного рівняння відповідним коефіцієнтам другого рівняння.

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними (або нормальними) векторами. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, дістанемо другий кут, який доповнює перший до π. Шукати кут між прямими будемо за допомогою скалярного добутку (напрямних або нормальних) векторів. Наприклад, для прямих (13) і (14):

$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Приклади

1. Знайти точку перетину прямих $4x - 3y + 9 = 0$ і $3x + 2y - 23 = 0$.

Координати шуканої точки задовольняють обидва рівняння прямих і тому знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 3y + 9 = 0 \\ 3x + 2y - 23 = 0. \end{cases}$$

Розв’яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 4x-3y=-9 \\ 3x+2y=23; \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4\cdot 2-(-3)\cdot 3=8+9=17,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 23 & 2 \end{vmatrix}=-9\cdot 2-(-3)\cdot 23=-18+69=51,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 3 & 23 \end{vmatrix}=4\cdot 23-(-9)\cdot 3=92+27=119;\quad x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{51}{17}=3,\ \ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{119}{17}=7.$$

Отже , точка перетину прямих – $(3;7)$.

2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;5)$ перпендикулярно до прямої $4x+3y-2=0$.

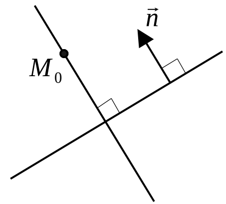

Рис. 5

Шукана пряма перпендикулярна до заданої прямої, а тому паралельна до її нормального вектора $\vec{n}=(4;3)$. Підставимо координати точки M_0 та вектора $\vec{n}$ в рівняння (3):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{3},\ \ \frac{x-2}{4}-\frac{y-5}{3}=0,\ \ \frac{3(x-2)-4(y-5)}{12}=0,\ 3x-6-4y+20=0,$$

або остаточно $3x-4y+14=0$.

3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-3;2)$ і паралельна до прямої $2x+5y+7=0$.

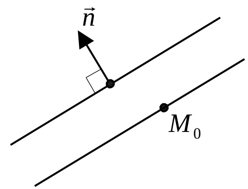

Рис. 6

Шукана пряма перпендикулярна до нормального вектора заданої прямої $\vec{n}=(2;5)$. Використаємо рівняння (2):

$2(x-(-3))+5(y-2)=0$, $2x+6+5y-10=0$, або $2x+5y-4=0$.

4. Визначити кут між прямими:
$5x-y+7=0$ і $3x+2y-3=0$;

Використаємо формулу (7): $A_1=5$, $B_1=-1$, $A_2=3$, $B_2=2$;

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot3+(-1)\cdot2}{\sqrt{5^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{15-2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=45^\circ.$$

5. Перевірити, чи перпендикулярні прямі:
$3x-2y+4=0$ і $4x+6y-3=0$;

Використаємо формулу (8). В даній задачі $A_1=3$, $B_1=-2$, $A_2=4$, $B_2=6$. Оскільки $3\cdot4+(-2)\cdot6=0$, то прямі перпендикулярні.

6. Перевірити, чи паралельні прямі:
$-3x+4y-7=0$ і $6x-8y+2=0$;

Використаємо умову (9). В даній задачі

$$A_1=-3,\ B_1=4,\ C_1=-7,\ A_2=6,\ B_2=-8,\ C_2=2.$$

Перевіряємо рівність $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$: $\frac{-3}{6}=\frac{4}{-8}$. Отже, прямі паралельні, причому не співпадають, так як $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

3. Площина у просторі

3.1. Загальне рівняння площини

<u>Означення</u>. Лінійним рівнянням відносно змінних $x,\ y$ і z називається рівняння вигляду

$$Ax+By+Cz+D=0\,, \qquad (1)$$

де $A,\ B,\ C$ – сталі, які не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

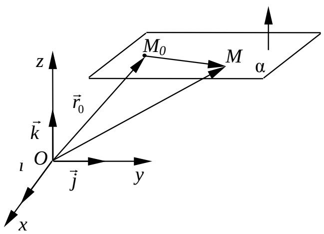

Рис. 1

Площина α однозначно визначається точкою M_0, через яку вона проходить, і ненульовим вектором $\vec{N}(A;\,B;\,C)$, перпендикулярним до цієї площини. Нехай M – змінна точка площини α.

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який з'єднує задану точку M_0 площини α з довільною точкою M цієї площини, перпендикулярний вектору $\vec{N}$. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0 \qquad (2)$$

Якщо точки M_0 і M мають координати $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ і $M(x;\,y;\,z)$, то в координатній формі рівняння (2) набуває вигляду

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow \qquad (2')$$

$$Ax+By+Cz+D=0\,, \qquad (3)$$

де $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

У вигляді (2) або (3) можна подати рівняння будь-якої площини, оскільки будь-яка площина перпендикулярна деякому вектору $\vec{N}$ і проходить через деяку точку M_0.

<u>Означення</u>. Рівняння (1) називається загальним рівнянням площини, а вектор $\vec{N}(A;\,B;\,C)$ – нормальним вектором площини.

3.2. Рівняння площини у відрізках

Нехай у рівнянні площини α

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (4)$$

всі коефіцієнти відмінні від нуля. Геометрично це означає, що площина α перетинає всі три координатні осі і не проходить через початок координат. Покладаючи по черзі: 1) $y=z=0$; 2) $x=z=0$; 3) $x=y=0$, знаходимо точки перетину площини α з координатними осями. Такими точками будуть відповідно точки

$$M_1\left(-\frac{D}{A};\,0;\,0\right),\quad M_2\left(0;\,-\frac{D}{B};\,0\right),\quad M_3\left(0;\,0;\,-\frac{D}{C}\right).$$

Перетворимо рівняння (1) наступним чином:

$$Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz=-D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1, \qquad (5)$$

де $p=-\frac{D}{A}$, $q=-\frac{D}{B}$, $r=-\frac{D}{C}$.

Означення. Рівняння (5) площини α називається рівнянням площини у відрізках.

Геометричний зміст коефіцієнтів рівняння (5) полягає в наступному: числа p, q і r є відповідно абсцисою, ординатою і аплікатою точок перетину площини α відповідно з осями Ox, Oy і Oz, тобто точок

$$M_1(p;\,0;\,0),\ M_2(0;\,q;\,0) \text{ і } M_3(0;\,0;\,r).$$

3.3. Рівняння площини, що проходить через три точки.

Нехай задано три точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ і $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$, які не лежать на одній прямій. За цієї умови задані точки визначають одну і тільки одну площину α, яка через них проходить. Знайдемо рівняння цієї площини.

Нехай $M(x;\, y;\, z)$ – довільна точка простору (рис. 1).

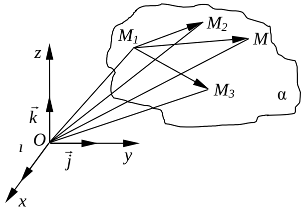

Рис. 1

Якщо точка M лежить у площині α, то вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні і навпаки, якщо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні, то точка M лежить у площині α. Умовою компланарності цих трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0. \qquad (6)$$

Рівність (6) є необхідною і достатньою умовою того, що точка M лежить у площині α.

Отже, всі точки, радіуси-вектори $\vec{r}$ яких задовольняють рівнянню (6), заповнюють площину, що визначається точками $M_1,\, M_2$ і M_3.

<u>**Означення**</u>. Рівняння (1) називається векторним рівнянням площини, що проходить через точки $M_1,\, M_2,\, M_3$.

Врахувавши, що вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ мають координати відповідно

$(x-x_1;\, y-y_1;\, z-z_1)$, $(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1)$ і $(x_3-x_1;\, y_3-y_1;\, z_3-z_1)$,

перепишемо рівняння (6) у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Рівняння (9) є шуканим рівнянням площини α, що проходить через три задані точки $M_1,\, M_2,\, M_3$.

3.4. Взаємне розміщення двох площин

Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано дві площини своїми рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (8)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (9)$$

За рівняннями (8) і (9) будемо визначати взаємне розміщення цих площин, тобто коли вони паралельні, коли співпадають і коли перетинаються.

Необхідні і достатні умови паралельності площин (8) і (9):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}. \qquad (10)$$

Для співпадання двох площин (10) і (11) необхідно і достатньо

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}. \qquad (11)$$

Для перетину двох площин (8) і (9) необхідно і достатньо порушення умов (10) та (11), тобто виконання нерівності

$$\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1} \text{ чи } \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{C_2}{C_1}. \qquad (12)$$

Означення. Кутом між площинами (8) та (9) називають кут між їх нормальними векторами.

Приклади

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1\ 2;-2;1$, $M_2\ 1;3;2$, $M_3\ -1;1;3$.

Рівняння площини має вигляд (7):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 1-2 & 3+2 & 2-1 \\ -1-2 & 1+2 & 3-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-(y+2)\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}-1 & 5\\ -3 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)(5\cdot 2-3\cdot 1)-(y+2)(-1\cdot 2-1\cdot(-3))+(z-1)(-1\cdot 3-5\cdot(-3))=0,\quad 7(x-2)-(y+2)+12(z-1)=0,$$

$$7x-14-y-2+12z-12=0,$$

або остаточно маємо $7x-y+12z-28=0$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-2;2)$ паралельно до площини $2x-2y+5z+4=0$.

Задана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(2;-2;5)$. Тому, внаслідок паралельності площин, шукана площина також перпендикулярна до цього вектора. Її рівняння буде мати вигляд (2’):

$$2(x-3)-2(y-(-2))+5(z-2)=0,$$

$$2x-6-2y-4+5z-10=0,$$

або $\quad 2x-2y+5z-20=0$.

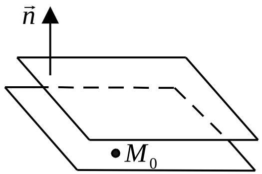

Рис. 16

3. Знайти кут між площинами $4x-2y-4z+3=0$ і $3x+6y+2z+7=0$.

Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(4;-2;-4)$ і $\vec{n}_2=(3;6;2)$. Кут між ними і є кутом між площинами. Знаходимо $\cos\varphi=\dfrac{4\cdot 3+(-2)\cdot 6+(-4)\cdot 2}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=\dfrac{12-12-8}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}}=\dfrac{-8}{6\cdot 7}=\dfrac{-4}{21}$,

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{21}\right).$$

4. Перевірити, чи паралельні площини $2x+5y-3z+1=0$ і $4x+10y+z-3=0$.

Використаємо умову (10). Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(2;5;-3)$, $\vec{n}_2=(4;10;1)$. Так як $\dfrac{2}{4}=\dfrac{5}{10}\neq\dfrac{-3}{1}$, то площини не паралельні.

4. Пряма у просторі

4.1. Пряма як лінія перетину двох площин

Згідно з означенням лінія у просторі визначається як перетин двох поверхонь. Оскільки пряму у просторі можна розглядати як перетин двох непаралельних площин, то її у декартовій прямокутній системі координат завжди можна задати двома лінійними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{1}$$

що визначають ці площини. З іншого боку, два лінійних рівняння (1) є рівняннями деякої прямої тоді і тільки тоді, коли відповідні їм площини не паралельні.

<u>Означення</u>. Рівняння системи (1) називаються загальними рівняннями прямої.

4.2. Канонічні і параметричні рівняння прямої

Пряма l у просторі однозначно визначається довільною своєю точкою $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ і деяким ненульовим вектором $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, паралельним до l.

<u>Означення</u>. Ненульовий вектор $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, паралельний до прямої l, називається ***напрямним вектором*** цієї прямої.

Знайдемо рівняння прямої l, якщо відома точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$, через яку вона проходить, і задано напрямний вектор $\vec{a}(m;\, n;\, p)$ цієї прямої (рис. 1).

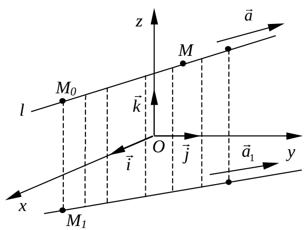

Рис. 1

Для того щоб точка $M(x;\, y;\, z)$ лежала на прямій l, яка проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, необхідно і достатньо, щоб вектор

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;\, y-y_0;\, z-z_0)$$

був колінеарним вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, тобто необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались три рівності

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (2)$$

Означення. Рівняння (4) називаються канонічними рівняннями прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\ n;\ p)$.

Нехай задано дві різні точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Складемо рівняння прямої M_1M_2.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ є напрямним вектором цієї прямої. Підставимо у рівняння (2) замість координат точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ координати точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, а замість координат вектора $\vec{a}(m;\ n;\ p)$ координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. В результаті матимемо канонічні рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3)$$

Перейдемо до параметричного задання прямої у просторі, тобто зображення координат змінної точки прямої як функцій довільного параметра.

Нехай пряму l задано точкою $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і напрямним вектором $\vec{a}(m;\ n;\ p)$ (рис. 3).

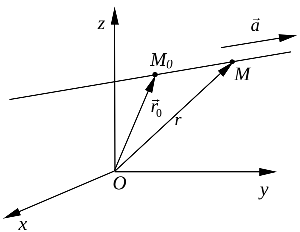

Рис. 3

Позначимо через $M(x;\ y;\ z)$ довільну точку простору. Точка $M(x;\ y;\ z)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ колінеарні. Отже, для будь-якої точки M прямої l має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}t\ . \tag{4}$$

Запишемо її у координатній формі:

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, \quad -\infty < t < \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Рівняння (5) є параметричними рівняннями прямої. Якщо параметр t пробігає всю множину дійсних чисел, точка $M\left(x;\ y;\ z\right)$ пробігає всю пряму.

4.3. Кут між прямою і площиною. Умова перпендикулярності прямої і площини

1. Розглянемо площину α, яку задано загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \tag{6}$$

і пряму l з канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}\ . \tag{7}$$

Означення 1. Якщо пряма l не перпендикулярна до площини α, то кутом між прямою l і площиною α називається менший з двох кутів між цієї прямою та її ортогональною проекцією на площину α. Якщо ж пряма і площина перпендикулярні, то кут між ними вважається рівним $\frac{\pi}{2}$.

Обчислення кута між прямою l і площиною α зведемо до обчислення кута між напрямним вектором $\vec{a}\left(m;\ n;\ p\right)$ прямої l та нормальним вектором $\vec{N}\left(A;\ B;\ C\right)$ площини α (рис. 1, 2).

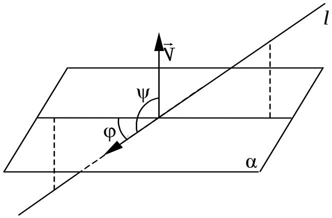

Рис. 2

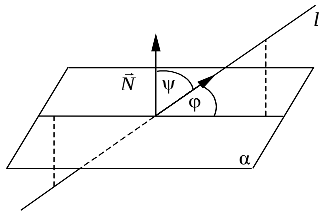

Рис. 1

Нехай φ – кут між прямою l і площиною α, а $\psi = \left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{N}\right)$. Якщо $\psi \le \dfrac{\pi}{2}$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \psi$ і $\sin\varphi = \cos\psi$ (рис. 1). Якщо ж $\psi > \dfrac{\pi}{2}$, то $\varphi = \psi - \dfrac{\pi}{2}$ і $\sin\varphi = -\cos\psi$ (рис. 2). Оскільки $\sin\varphi \ge 0$, то для кожного φ маємо

$$\sin\varphi = |\cos\psi| .$$

З означення скалярного добутку випливає, що

$$\cos\psi = \frac{\vec{N}\cdot\vec{a}}{|\vec{N}||\vec{a}|} .$$

Тому

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} . \qquad (8)$$

Якщо пряму l задано загальними рівняннями, то для того щоб скористатись формулою (8), попередньо потрібно визначити координати напрямного вектора $\vec{a}$ прямої l.

2. Якщо пряма l, яку задано рівняннями (7), перпендикулярна до площини α з рівнянням (6), то напрямний вектор $\vec{a}(m; n; p)$ прямої l колінеарний нормальному вектору $\vec{N}(A; B; C)$ площини α. Тому координати цих векторів пропорційні, тобто існує таке відмінне від нуля число λ, що

$$A = \lambda m,\ B = \lambda n,\ C = \lambda p$$

або

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{9}$$

Навпаки, якщо рівності (9) виконуються, то вектори $\vec{a}(m; n; p)$ і $\vec{N}(A; B; C)$ колінеарні, тобто напрямний вектор заданої прямої l паралельний до нормального вектора заданої площини α. З цього випливає, що пряма l і площина α взаємно перпендикулярні. Цим самим доведено наступну теорему.

Теорема 1. Для того щоб пряма l і площина α були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб координати напрямного вектора прямої l були пропорційні коефіцієнтам при x, y, z в рівнянні (6) площини α.

Приклади

1. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0 \ 2;-3;1$ паралельно до вектора $\vec{s} = \ 4;3;-2$.

Канонічні рівняння мають вигляд (2):

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2} = t, \quad \begin{cases} \dfrac{x-2}{4} = t \\ \dfrac{y+3}{3} = t, \\ \dfrac{z-1}{-2} = t, \end{cases} \quad \text{звідки}$$

маємо рівняння прямої в параметричній формі

$$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -3+3t \\ z = 1-2t, \quad t \in R. \end{cases} \quad \rfloor$$

2. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 3 = 0 \\ 3x + 2y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

Знайти її канонічні рівняння.

Знаходимо на прямій довільну точку M_0, наприклад точку з координатою $x = 0$. Підставивши це значення в загальні рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} 3\cdot 0 + y - 2z + 3 = 0 \\ 0 + 2y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо координати y та z:

$$\begin{cases} y - 2z = -3 \\ 2y + 3z = 8; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - (-2)\cdot 2 = 7;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot 3 - (-2)\cdot 8 = 7,\ y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 2\cdot(-3) = 14,\ z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2.$$

Отже, точка $M_0(0;1;2)$ лежить на прямій.

Знаходимо напрямний вектор прямої. Нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = (3;1;-2)$, $\vec{n}_2 = (1;2;3)$. Їх векторний добуток

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (1\cdot 3 - (-2)\cdot 2)\vec{i} - (3\cdot 3 - (-2)\cdot 1)\vec{j} + (3\cdot 2 - 1\cdot 1)\vec{k} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + 5\vec{k}.$$

За знайденими точкою $M_0(0;1;2)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (7;-11;5)$ запишемо канонічні рівняння прямої (23):

$$\frac{x}{7}=\frac{y-1}{-11}=\frac{z-2}{5}.$$

3*. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ і площини $2x+4y+3z-8=0$.

Знайдемо рівняння прямої в параметричній формі:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}=t;$$

$$\frac{x-2}{3}=t,\ x=2+3t;\ \frac{y-1}{-2}=t,\ y=1-2t;\ \frac{z+1}{1}=t,\ z=-1+t.$$

Знайдені рівняння

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \\ z=-1+t \end{cases}$$

підставляємо в рівняння площини і знаходимо параметр точки перетину:

$$2(2+3t)+4(1-2t)+3(-1+t)-8=0,$$

$$4+6t+4-8t-3+3t-8=0,\ \text{звідки}\ \ t=3.$$

Координати точки перетину знаходяться з параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x=2+3\cdot3=11 \\ y=1-2\cdot3=-5 \\ z=-1+3=2. \end{cases}$$

Отже, точка перетину $M(11;-5;2)$.

4*. Знайти проекцію точки $P(8;-1;7)$ на площину $3x-2y+4z+4=0$ і точку, симетричну точці P відносно даної площини.

Перпендикуляр PO паралельний до нормального вектора площини $\vec{n} = \; 3;-2;4 \;$ і проходить через точку P. Його рівняння має вигляд (2):

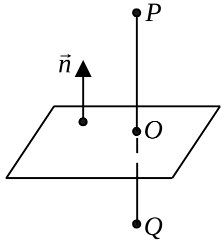

Рис. 20

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-7}{4}.$$

Проекцію точки P знаходимо як точку перетину прямої PO і заданої площини. Для цього спочатку записуємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-7}{4} = t;$$

$$\frac{x-8}{3} = t, \; x = 8+3t, \; \frac{y+1}{-2} = t, \; y = -1-2t, \; \frac{z-7}{4} = t, \; z = 7+4t.$$

Знайдені параметричні рівняння $\begin{cases} x = 8+3t \\ y = -1-2t \\ z = 7+4t \end{cases}$ підставляємо в рівняння площини:

$$3 \;\; 8+3t \;\; -2 \;\; -1-2t \;\; +4 \;\; 7+4t \;\; +4 = 0,$$

$$24+9t+2+4t+28+16t+4 = 0,$$

$$58+29t = 0.$$

Звідси, $t = -2$ – параметр точки перетину. Знаходимо її координати

$$\begin{cases} x = 8+3\cdot \;\; -2 \;\; = 2 \\ y = -1-2\cdot \;\; -2 \;\; = 3 \\ z = 7+4\cdot \;\; -2 \;\; = -1. \end{cases}$$

Таким чином, проекція – точка $O \;\; 2;3;-1 \;$.

Нехай Q – точка, симетрична точці P відносно даної площини. Тоді точка O – середина відрізка PQ і тому

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_O = \frac{y_P + y_Q}{2},\ z_O = \frac{z_P + z_Q}{2}$$, звідки знаходимо

$$x_Q = 2x_O - x_P,\ y_Q = 2y_O - y_P,\ z_Q = 2z_O - z_P.$$

Підставляючи в дані формули координати точок O та P, дістанемо

$$x_Q = 2\cdot 2 - 8 = -4,\ y_Q = 2\cdot 3 - (-1) = 7,\ z_Q = 2\cdot(-1) - 7 = 9.$$

Отже, координати симетричної точки $Q(-4; 7; -9)$.

Додаток 1*. Про рівняння ГМТ

Аналітичне дослідження геометричного місця точок проводиться за такою схемою:

1. Передусім, вибирається деяка координатна система. Довільну точку M, що належить до даного геометричного місця точок, назвемо змінною точкою цього геометричного місця точок. Координати змінної точки M у вибраній системі координат позначимо $x,\ y$ і назвемо змінними координатами.
2. Геометричні співвідношення між точками даного геометричного місця точок за допомогою відомих формул аналітичної геометрії подаються у вигляді співвідношень між координатами цих точок. Зокрема, це може бути деяке рівняння з двома невідомими x і y, якому задовольняють координати точок даного геометричного місця. У самому загальному випадку таке рівняння можна записати у вигляді
$$F(x,y)=0, \qquad (1)$$
де $F(x,y)$ – символ функції двох змінних, тобто символ деякої операції, що проводиться над змінними x і y.
3. Якщо для деякого геометричного місця точок складено рівняння вигляду (1), то це рівняння повністю визначає це геометричне місце точок. Дійсно, стосовно кожної точки M_1 з координатами x_1, y_1 без будь-яких ускладнень чисто аналітично можна вияснити, належить ця точка до даного геометричного місця точок чи не належить. Якщо числа $x_1,\ y_1$ задовольняють рівнянню (1), тобто має місце тотожність
$$F(x_1,y_1)=0,$$
то точка M_1 належить геометричному місцю. Якщо ж
$$F(x_1,y_1)\neq 0,$$
то точка M_1 не належить геометричному місцю точок, яке визначається рівнянням (1).

Для прикладу, отримаємо рівняння кола як рівняння геометричного місця точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини.

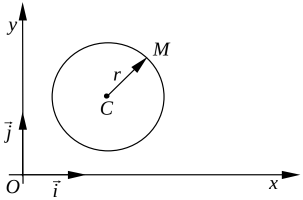

Рис. 1

Отже, нехай точка $C(a;b)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ є центром кола з радіусом r (рис 1). Для довільної точки $M(x;\,y)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ кола має місце рівність

$$|CM| = r. \qquad (2)$$

З іншого боку, $|CM|$ є відстанню між двома точками C і M, тобто

$$|CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Тому рівність (2) набуває вигляду

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \;\Leftrightarrow\; (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (3)$$

Отже, координати довільної точки кола задовольняють рівнянню (3).

Легко бачити, що для точки M, яка не лежить на колі, виконується одна з двох умов: $|CM| > r$ або $|CM| < r$. Це свідчить про те, що рівнянню (3) задовольняють координати тільки точок кола, а тому рівняння (3) є рівнянням кола.

Оскільки степінь рівняння (3) дорівнює двом, то коло є лінією другого порядку.

Додаток 2*. Дослідження загального рівняння прямої

Дослідження загального рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

– це дослідження того, як залежить розміщення прямої на площині від перетворення в нуль деяких з його коефіцієнтів.

Можливі такі випадки:

1°. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$. Пряма (1) перетинає координатні осі у різних точках і називається прямою загального положення (рис. 1).

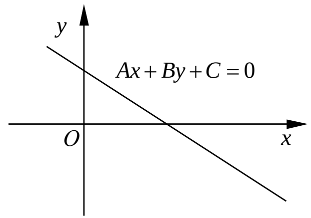

Рис. 1

2°. $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$. Рівняння (1) приймає вигляд

$$Ax + By = 0. \qquad (2)$$

Рівнянню (2) задовольняють координати початку координат $O(0; 0)$. Тому рівняння (2) визначає пряму, що проходить через початок координат (рис. 2).

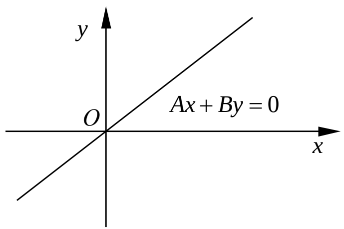

Рис. 2

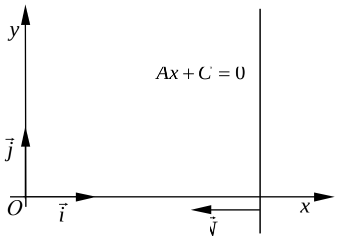

Рис. 3

3°. $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$. Рівняння (1) приймає вигляд

$$Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{A}. \qquad (3)$$

Нормальний вектор $\vec{N}(A;0)$ прямої (3) паралельний базисному вектору $\vec{i}(1;0)$. Тому рівняння (3) визначає пряму, яка паралельна осі Oy (рис. 3). Якщо в умовах 3° і $C = 0$, то рівняння (3) приймає вигляд

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0. \qquad (4)$$

Пряма (4) паралельна базисному вектору $\vec{j}(0;1)$ і проходить через початок координат. Тому рівняння (4) є рівнянням координатної осі Oy. Про те, що рівняння (4) є рівнянням осі Oy, можна також зробити висновок, виходячи з того, що тільки для точок осі Oy абсциса x дорівнює нулю.

4. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$. Рівняння (1) набуває вигляду

$$By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{C}{B}. \qquad (5)$$

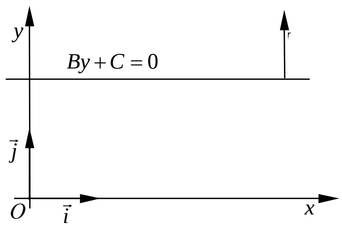

Рис. 4

Нормальний вектор прямої (5) $\vec{N}(0;B)$ паралельний базисному вектору $\vec{j}(0;1)$. Тому рівняння (5) визначає пряму, паралельну координатній осі Ox (рис. 4). Якщо в умовах 4° і $C = 0$, то рівняння (5) приймає вигляд

$$y = 0. \qquad (6)$$

Рівняння (6) є рівнянням координатної осі Ox.

Довільну пряму на площині можна задати її загальним рівнянням

$$Ax + By + C = 0. \qquad \textbf{(*)}$$

Разом з тим, цю пряму можна задати і рівнянням

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0, \qquad \textbf{(**)}$$

де λ **– довільне число, відмінне від нуля. Тому взаємно-однозначної відповідності між множиною всіх рівнянь першого степеня і множиною всіх прямих на площині встановити не можна. Хоча кожному рівнянню першого степеня і відповідає єдина пряма на площині, обернене твердження є хибним: кожну пряму на площині можна задати нескінченною кількістю лінійних рівнянь вигляду (**).**

Додаток 3. Формула для знаходження відстані від точки до прямої. Нормальне рівняння прямої

1. Нехай пряму l задано загальним рівнянням

$$Ax + By + C = 0\,. \qquad (1)$$

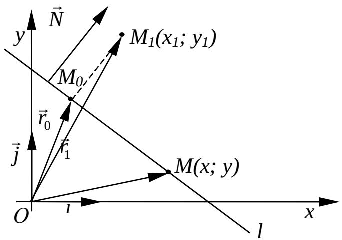

Рис. 1

Як і раніше, $(x; y)$ – координати змінної точки M прямої l (рис. 1), $\vec{N}(A; B)$ – нормальний вектор прямої l, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x; y)$ – радіус-вектор змінної точки $M(x; y)$. У векторній формі рівняння (1) набуває вигляду

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + C = 0\,, \qquad (2)$$

оскільки скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{N}$ дорівнює $\vec{r} \cdot \vec{N} = Ax + By$.

Нехай задано точку $M_1(x_1; y_1)$ (рис. 1). Потрібно знайти відстань d від точки M_1 до прямої l. Позначимо ортогональну проекцію точки $M_1(x_1; y_1)$ на пряму l через $M_0(x_0; y_0)$, а радіуси-вектори точок M_1 і M_0 – через $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ і $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. Тоді

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right|. \qquad (3)$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ колінеарний вектору $\vec{N}$, тобто справедлива рівність

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \lambda\vec{N}\,. \qquad (4)$$

Для знаходження невідомого множника λ обидві частини рівності (4) помножимо скалярно на вектор $\vec{N}$:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\cdot\vec{N} = \lambda\vec{N}\cdot\vec{N} \iff \vec{r}_1\cdot\vec{N} - \vec{r}_0\cdot\vec{N} = \lambda\left|\vec{N}\right|^2. \qquad (5)$$

Скористаємось тепер тим, що точка M_0 лежить на прямій l і тому

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{N} + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_0 \cdot \vec{N} = -C. \tag{6}$$

Якщо підставити (6) у (5), то будемо мати

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C = \lambda \left|\vec{N}\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C}{\left|\vec{N}\right|^2}. \tag{6′}$$

З (3), (4), (6′) знаходимо шукану відстань d:

$$d = \left|\overrightarrow{M_0 M_1}\right| = \left|\lambda \vec{N}\right| = \frac{\left|\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C\right)\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|^2} = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C\right|}{\left|\vec{N}\right|}. \tag{7}$$

Формулу (7) можна записати у координатній формі:

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{8}$$

Отже, щоб знайти відстань від заданої точки $M\left(x_1; y_1\right)$ до заданої прямої (1), потрібно підставити координати цієї точки у ліву частину рівняння (1) і модуль отриманого таким чином числа поділити на довжину нормального вектора прямої (1).

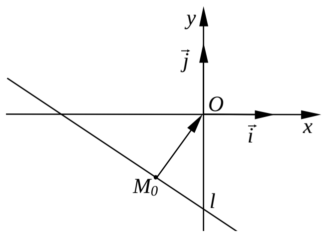

Рис. 2

Звернемо увагу на частинний випадок, коли точка M_1 співпадає з початком координат (рис. 2). Нехай M_0 – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат O на пряму l. Врахувавши, що $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $\vec{r}_0 = -\overrightarrow{M_0 O}$, з (4), (6′) отримуємо

$$\overrightarrow{M_0 O} = \lambda \vec{N} = \frac{\vec{0} \cdot \vec{N} + C}{\left|\vec{N}\right|^2} \vec{N} = \frac{C\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|^2}, \tag{9}$$

$$d_0 = \left|\overrightarrow{M_0 O}\right| = \frac{\left|C\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|^2} = \frac{|C|}{\left|\vec{N}\right|}. \tag{10}$$

Звичайно, формулу (10) для розглянутого частинного випадку можна отримати безпосередньо з формули (7).

Приклад 1. Знайти відстань від точки $M_1(3;-4)$ до прямої l, заданої рівнянням $4x+3y-10=0$.

Розв'язання. Підставимо координати точки M_1 та коефіцієнти $A=4$ і $B=3$ у формулу (8):

$$d=\frac{|4\cdot 3-3\cdot 4-10|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|-10|}{5}=2 \text{ (лін. од.).}$$

2. Нехай пряма (2) не проходить через початок координат, тобто $C\neq 0$.

<u>**Означення 1**</u>. Одиничний вектор $\vec{n}_0$, перпендикулярний до прямої і напрямлений від початку координат до прямої (рис. 3), назвемо одиничним вектором нормалі.

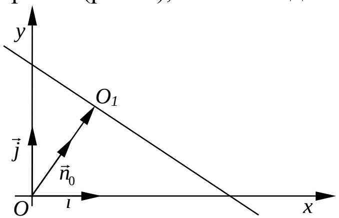

Рис. 3

Згідно з формулами (9) і (10) маємо

$$\vec{n}_0=\frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|}=-\frac{C\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|^2}:\frac{|C|}{\left|\vec{N}\right|}=-\frac{C}{|C|}\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}. \qquad (11)$$

Отже,

$$\begin{cases}\vec{n}_0=-\dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C>0\\[2ex] \vec{n}_0=\dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C<0.\end{cases} \qquad (12)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2) на довільний ненульовий множник λ. В результаті отримаємо рівносильне рівняння

$$\vec{r}\cdot\left(\lambda\vec{N}\right)+\lambda C=0, \qquad (13)$$

яке визначає ту ж саму пряму l, що і рівняння (2).

Нормальним вектором у рівнянні (13) є вектор $\lambda\vec{N}$. Довжину цього вектора можна зробити якою завгодно шляхом відповідного підбору множника λ. Виберемо множник λ таким, щоб вектор $\lambda\vec{N}$ дорівнював одиничному вектору нормалі до прямої, тобто, щоб

$$\lambda\vec{N}=\vec{n}_0. \qquad (14)$$

Згідно з формулою (11) для цього потрібно взяти

$$\lambda=\lambda_0=-\frac{C}{|C|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|}, \qquad (15)$$

тобто

$$\begin{cases} \lambda_0=-\dfrac{1}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо } C>0 \\ \lambda_0=\dfrac{1}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо } C<0. \end{cases} \qquad (15')$$

<u>Означення 2</u>. Множник λ_0, що визначається формулою (15) (або (15′)), називається нормувальним множником прямої l.

Підставимо в рівняння (13) замість λ його значення λ_0 з (15):

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0+\frac{C\left(-C\right)}{|C|\left|\vec{N}\right|}=0 \iff \vec{r}\cdot\vec{n}_0-\frac{C^2}{|C|\left|\vec{N}\right|}=0 \iff$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0 - \frac{|C|^2}{|C||\vec{N}|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{n}_0 - \frac{|C|}{|\vec{N}|} = 0 .$$

Звідси, згідно з формулою (10),

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0 - d_0 = 0 . \qquad (16)$$

Означення 3. Рівняння прямої (16) називається нормальним рівнянням прямої.

До нормального вигляду можна звести рівняння будь-якої прямої, що не проходить через початок координат. Зручність використання нормального рівняння прямої (16) пояснюється геометричним змістом вектора $\vec{n}_0$ і числа d_0, які визначають це рівняння: $\vec{n}_0$ – одиничний вектор нормалі до прямої; d_0 – відстань від початку координат до прямої.

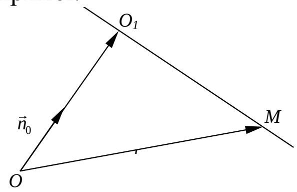

Рис. 4

Відмітимо, що рівняння (16) можна отримати дуже просто шляхом наступних геометричних міркувань: проекція вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 4), тобто радіуса-вектора $\vec{r}$ довільної точки прямої (2), на одиничний вектор нормалі $\vec{n}_0$ дорівнює відстані d_0 від початку координат O до прямої. З іншого боку, ця проекція дорівнює скалярному добутку $\text{пр}_{\vec{n}_0}\vec{r} = \vec{r}\cdot\vec{n}_0$. Отже, $d_0 = \vec{r}\cdot\vec{n}_0 \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0 - d_0 = 0$.

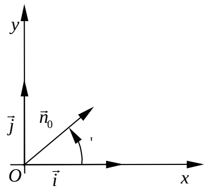

Рис. 5

Цінність наведеного вище аналітичного виведення рівняння (16) полягає у тому, що це виведення дало нам формулу (15) для нормувального множника і без будь-яких змін може бути перенесеним на випадок векторів тривимірного простору. Повернемося до формули (11) і перепишемо її з врахуванням того, що вектор $\vec{N}$ має координати $(A;B)$:

$$\vec{n}_0 = -\frac{C}{|C|}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(A\vec{i}+B\vec{j}\right). \qquad (17)$$

З іншого боку, для вектора $\vec{n}_0$ можна записати (рис. 5)

$$\vec{n}_0 = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \qquad (18)$$

де $\varphi = \left(\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{n}_0\right)$ – кут між віссю Ox і вектором $\vec{n}_0$. Порівнюючи (17) і (18), отримуємо

$$\cos\varphi = -\frac{C}{|C|}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{C}{|C|}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (19)$$

Якщо тепер обидві частини загального рівняння (1)

$$Ax + By + C = 0$$

прямої помножити на нормувальний множник (15)

$$\lambda_0 = -\frac{C}{|C|}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

і скористатись формулами (19), (10), то отримаємо рівняння

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - d_0 = 0. \qquad (20)$$

Означення 4. Рівняння (20) називається нормальним рівнянням прямої у координатній формі.

Цінність рівняння (20) полягає у чіткій геометричній інтерпретації його коефіцієнтів.

Зауваження 1. Якщо пряма (2) проходить через початок координат, тобто $C=0$, то одиничний вектор нормалі $\vec{n}_0$ визначається з точністю до знака:

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}.$$

Нормальне рівняння прямої у цьому випадку приймає вигляд

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = 0.$$

Зауваження 2. Якщо пряму l у декартовій прямокутній системі координат задано нормальним рівнянням (16) або (20), то відстань від точки $M_1\left(x_1; y_1\right)$ до прямої l дорівнює модулю лівої частини рівняння прямої (16) або (20), куди замість змінного радіуса-вектора $\vec{r}$ або змінних координат $\left(x; y\right)$ потрібно підставити радіус-вектор $\vec{r}_1$ або координати $\left(x_1; y_1\right)$ точки M_1. Дійсно, за формулами (7) або (8) отримуємо відповідно

$$d = \frac{\left|\vec{r}_1\cdot\vec{n}_0 - d_0\right|}{\left|\vec{n}_0\right|} = \left|\vec{r}_1\cdot\vec{n}_0 - d_0\right|$$

або

$$d = \frac{\left|x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - d_0\right|}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \left|x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - d_0\right|.$$

Приклад 2. Написати нормальне рівняння прямої, заданої у декартовій прямокутній системі координат рівнянням

$$3x + 4y - 5 = 0. \qquad (21)$$

Розв'язання. За формулою (15) знаходимо нормувальний множник λ_0 прямої:

$$\lambda_0 = -\frac{C}{\left|C\right|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{\left(-5\right)}{5\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}.$$

Нормальне рівняння прямої отримуємо, помноживши рівняння (21) на нормувальний множник $\lambda_0 = \frac{1}{5}$:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

При цьому $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$.

Додаток 4*. Дослідження загального рівняння площини

У загальному рівнянні площини α деякі з коефіцієнтів можуть дорівнювати нулю. Вияснимо, як це впливає на розміщення площини α у просторі.

Розглянемо наступні випадки:

1°. Нехай $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D = 0$. Тоді загальне рівняння площини α приймає вигляд

$$Ax + By + Cz = 0. \qquad (1)$$

Координати точки $O(0;0;0)$ задовольняють рівнянню (1), тому площина α проходить через початок координат (рис. 1)

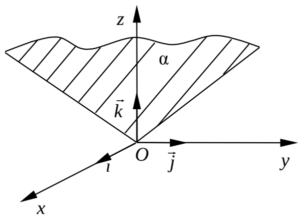

Рис. 1

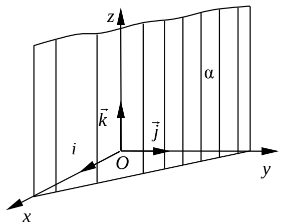

Рис. 2

2°. Нехай $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$, $C = 0$. Тоді загальне рівняння площини прийме вигляд

$$Ax + By + D = 0. \qquad (2)$$

Нормальним вектором площини (2) є вектор $\vec{N}(A; B; 0)$. У цьому випадку вектор $\vec{k}(0; 0; 1)$ буде паралельним до площини (2), оскільки умова (6) §1 виконується. Дійсно,

$$\vec{N}\cdot\vec{k}=A\cdot 0+B\cdot 0+0\cdot 1=0\,.$$

Отже, площина (2) і вектор $\vec{k}$ паралельні. Але оскільки ця площина не проходить через початок координат $(D\neq 0)$, то вона паралельна до осі Oz (рис. 2).

3º. Нехай $A\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$, $B=0$. Тоді загальне рівняння площини набуває вигляду

$$Ax+Cz+D=0\,. \qquad (3)$$

Ця площина паралельна вектору $\vec{j}\,(0;1;0)$, оскільки

$$\vec{N}\cdot\vec{j}=A\cdot 0+0\cdot 1+C\cdot 0=0\,.$$

Крім цього, $D\neq 0$. Тому площина (3) паралельна осі Oy (рис. 3).

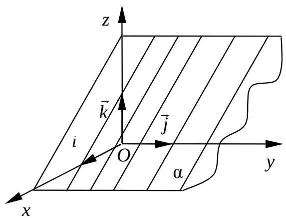

Рис. 3

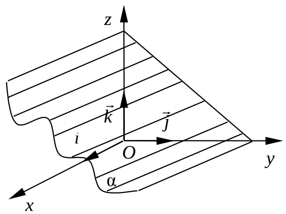

Рис. 4

4º. Нехай $B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0,\ A=0$. Тоді площина визначається рівнянням

$$By+Cz+D=0 \qquad (4)$$

і паралельна осі Ox (рис. 4).

5º. Якщо у випадках 2º, 3º, 4º умову $D\neq 0$ замінити на умову $D=0$, то отримаємо рівняння площини α відповідно

$$Ax + By = 0\,, \tag{5}$$

$$Ax + Cz = 0\,, \tag{6}$$

$$By + Cz = 0\,. \tag{7}$$

Оскільки $D = 0$, то площина (5) проходить через вісь Oz (рис. 5),

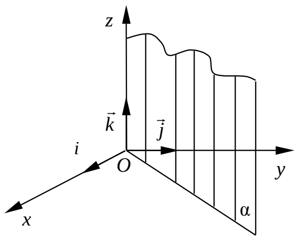

Рис. 5

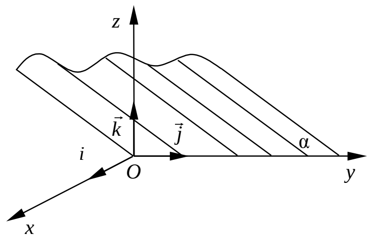

Рис. 6

площина (6) – через вісь Oy (рис. 6), а площина (7) – через вісь Ox (рис. 7).

6°. Нехай $A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D \neq 0$. Тоді рівняння площини α має вигляд

$$Ax + D = 0\,. \tag{8}$$

У цьому випадку вектори $\vec{j}$ і $\vec{k}$ паралельні до площини α. Оскільки ця площина не проходить через початок координат $(D \neq 0)$, то вона паралельна координатній площині yOz (рис. 8).

7°. Якщо $A = 0,\ B \neq 0,\ C = 0,\ D \neq 0$, то площина

$$By + D = 0 \tag{9}$$

не проходить через початок координат і паралельна координатній площині xOz (рис. 9).

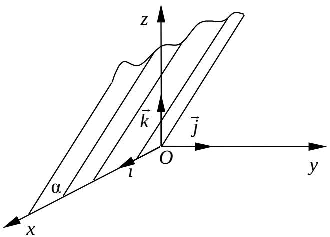

Рис. 7

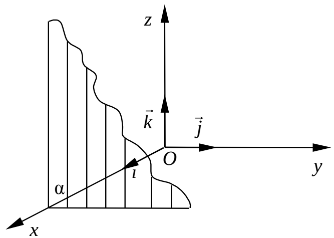

Рис. 8

8º. У випадку $A=0,\ B=0,\ C\neq 0,\ D\neq 0$ отримуємо площину α

$$Cz+D=0, \tag{10}$$

паралельну координатній площині xOy (рис. 10).

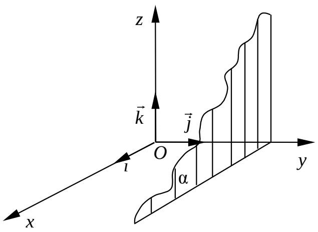

Рис. 9

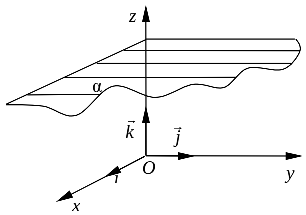

Рис. 10

9º. Якщо у випадках 6º, 7º, 8º покласти $D=0$, то рівняння площини α прийме вигляд відповідно

$$Ax=0 \Leftrightarrow x=0, \tag{11}$$

$$By=0 \Leftrightarrow y=0, \tag{12}$$

$$Cz=0 \Leftrightarrow z=0. \tag{13}$$

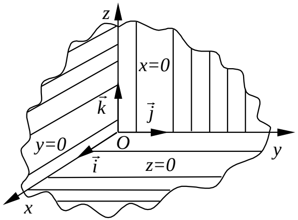

Рис. 11

Площина (11) є координатною площиною yOz, площина (12) – координатною площиною xOz, а площина (13) – координатною площиною xOy (рис. 11).

Додаток 5. Формула для обчислення відстані від точки до площини. Нормальне рівняння площини

1. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину α задано загальним рівнянням

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

або рівнянням у векторній формі

$$\vec{r}\cdot\vec{N}+D=0, \qquad (2)$$

де $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ – радіус-вектор змінної точки $M\left(x;\ y;\ z\right)$ площини α, а $\vec{N}\left(A;\ B;\ C\right)$ – нормальний вектор цієї площини. Знайдемо відстань від точки $M_1\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$ до площини α (рис. 1).

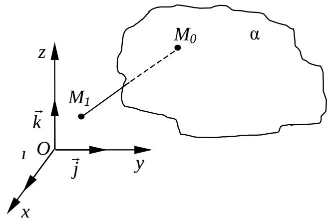

Рис. 1

Позначимо через M_0 основу перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на площину α. Шукана відстань d дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$. Якщо $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}$ – радіус-вектор точки M_1, то повторюючи дослівно міркування для прямої на площині, отримуємо векторну рівність

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{N}+D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N}, \qquad (3)$$

звідки випливає, що

$$d=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|=\frac{\left|\vec{r}_1\cdot\vec{N}+D\right|}{\left|\vec{N}\right|^2}\left|\vec{N}\right|=\frac{\left|\vec{r}_1\cdot\vec{N}+D\right|}{\left|\vec{N}\right|} \qquad (4)$$

або в координатній формі

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (5)$$

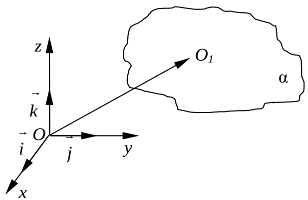

Рис. 2

Розглянемо частинний випадок, коли точка M_1 співпадає з початком координат O (рис. 2). Ортогональну проекцію точки O на площину α позначимо через O_1. Тоді з формули (3) отримуємо

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N} \qquad (6)$$

і для відстані d_0 від початку координат до площини α можна записати

$$d_0 = \left|\overrightarrow{O_1O}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|^2}\left|\vec{N}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (7)$$

що безпосередньо випливає і з формули (4) або (5).

2. Нехай площина (1) не проходить через початок координат, тобто $D \neq 0$.

<u>Означення 1</u>. Одиничний вектор $\vec{n}_0$, перпендикулярний до площини α і напрямлений від початку координат до цієї площини, називається одиничним вектором нормалі.

З формул (6) і (7) випливає, що

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|} = -\frac{D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N} : \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{D}{|D|}\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}. \qquad (8)$$

Тоді

$$\vec{n}_0 = -\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, \text{ якщо } D \text{ – додатне число і}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, \text{ якщо } D \text{ – від'ємне число.}$$

Повторюючи хід міркувань для прямої на площині, приходимо до наступного висновку. Якщо обидві частини рівняння (1) або (2) помножити на нормувальний множник

$$\lambda_0 = -\frac{D}{|D|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{D}{|D|\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{9}$$

то будемо мати нормальне рівняння площини

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0 - d_0 = 0 \tag{10}$$

або в координатній формі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d_0 = 0, \tag{11}$$

де α, β, γ – кути, які утворює одиничний вектор нормалі з додатними напрямками осей координат.

Додаток 6. Знаходження кута між двома площинами

Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано дві площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

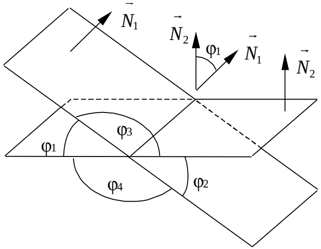

Рис. 1

Якщо ці площини перетинаються, то вони утворюють чотири двогранних кути. Позначимо величини цих кутів через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (рис. 1).

Оскільки $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_3 = \varphi_4$ і $\varphi_1 + \varphi_3 = 180^0$, то достатньо знайти один з цих кутів. Кут між двома площинами вимірюється, як відомо, лінійним кутом двогранного кута, одного з двох, утворених цими площинами. Його можна виміряти кутом між векторами, перпендикулярними до заданих площин, тобто кутом між нормальними векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ (рис. 1). Позначимо кут між площинами буквою φ. Тоді

$$\cos\varphi = \cos\left(\vec{N}_1 \hat{,} \vec{N}_2\right) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3)$$

Формула може давати знак плюс або знак мінус. У першому випадку ми отримаємо гострий кут між площинами (1) і (2), а у другому – кут, який доповнює перший до 180^0. Якщо ми хочемо знайти гострий кут між двома площинами, то для $\cos\varphi$ слід брати додатне число, тобто користуватись формулою

$$\cos\varphi = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|.$$

Якщо площини (1) і (2) перпендикулярні, то вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ також перпендикулярні. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (5)$$

Навпаки, якщо виконується умова (5), то площини (1) і (2) перпендикулярні.

Додаток 7. Зведення загальних рівнянь прямої до канонічних рівнянь

3.1. Нехай пряму l задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Позначимо площини, які визначаються рівняннями (1), через α_1 і α_2, а нормальні вектори цих площин – через

$$\vec{N}_1(A_1; B_1; C_1) \text{ і } \vec{N}_2(A_2; B_2; C_2).$$

Теорема 1. Вектор $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, тобто вектор з координатами

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right) \qquad (2)$$

є напрямним вектором прямої (1).

Доведення. Вектор $\vec{N}_1$ перпендикулярний до площини α_1, тому деякий вектор $\vec{a}$, перпендикулярний до вектора $\vec{N}_1$, буде паралельним до площини α_1 (рис. 1). Аналогічно, вектор, перпендикулярний до нормального вектора $\vec{N}_2$ площини α_2, буде паралельним до цієї площини. Отже, вектор, який одночасно перпендикулярний до нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, є паралельним як до площини α_1, так і до площини α_2, а тому і до лінії перетину цих площин, тобто прямої (1).

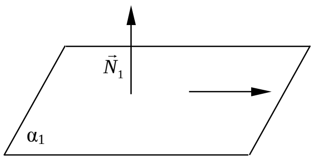

Рис. 1

Ми показали, що за напрямний вектор прямої (1) можна взяти будь-який вектор, який одночасно перпендикулярний до нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$. Зокрема, таким вектором є векторний добуток $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Координати цього векторного добутку визначаються згідно з (2) (див. §2 гл. VII).

Теорему доведено.

Щоб перейти від загальних рівнянь прямої (1) до канонічних рівнянь цієї прямої, потрібно знайти:

1) хоча б одну точку $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ прямої (1);

2) деякий напрямний вектор $\vec{a}$ прямої (1).

Покажемо, як знайти координати точки $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$, через яку проходить пряма (1). Оскільки вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ неколінеарні, то вектор $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ відмінний від нульового вектора. Тому хоча б одна з координат вектора $\vec{a}$ не дорівнює нулю. Нехай для визначеності

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \cdot$$

Систему (1) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -C_1 z - D_1 \\ A_2 x + B_2 y = -C_2 z - D_2. \end{cases} \qquad (3)$$

Поклавши z рівним якому-небудь числу, наприклад, нулю, знаходимо з системи (3) значення x і y:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \qquad (4)$$

$$y_0=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -D_1\\ A_2 & -D_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Знаючи точку $M_0\left(x_0;\, y_0;\, 0\right)$ і напрямний вектор (2) $\vec{a}$, запишемо канонічні рівняння прямої у вигляді

$$\frac{x-\dfrac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1}}{B_1C_2-B_2C_1}=\frac{y-\dfrac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1}}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{z}{A_1B_2-A_2B_1}. \qquad (5)$$

Приклад 1. Пряму задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} x-y+2z-3=0\\ 2x+y-z+6=0.\end{cases}$$

Записати канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M_0 прямої. Оскільки

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0,$$

то поклавши $z=0$, з системи (4) знаходимо $x_0=-1$, $y_0=-4$. Шуканою точкою є точка $M_0\left(-1;\,-4;\,0\right)$.

Координати напрямного вектора $\vec{a}$ обчислюємо згідно з (2):

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow \vec{a}\left(-1;\,5;\,3\right).$$

Отже, канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+4}{5}=\frac{z}{3}.$$

Додаток 8*. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Нехай дві прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\,, \qquad (1)$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}\,. \qquad (2)$$

Пряма l_1 проходить через точку $M_1\left(x_1;\, y_1;\, z_1\right)$ паралельно вектору $\vec{a}_1\left(m_1;\, n_1;\, p_1\right)$, а пряма l_2 – через точку $M_2\left(x_2;\, y_2;\, z_2\right)$ паралельно вектору $\vec{a}_2\left(m_2;\, n_2;\, p_2\right)$.

Можливі чотири різних випадки взаємного розміщення прямих l_1 і l_2 у просторі:

1°. Прямі мимобіжні, тобто такі, через які не можна провести площину.
2°. Прямі перетинаються.
3°. Прямі паралельні.
4°. Прямі співпадають.

Взаємне розміщення заданих прямих l_1 і l_2 можна визначити за векторами $\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1\right)$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Для цього з координат цих векторів складемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

і позначимо ранги матриць A і B відповідно r_1 і r_2.

Дослідимо всі можливі випадки взаємного розміщення прямих l_1 і l_2.

Теорема 1. Для того щоб прямі l_1 і l_2 були мимобіжними, необхідно і достатньо, щоб $r_2=3$, тобто $\det B\neq 0$.

Доведення. *Необхідність.* Покажемо, що для мимобіжних прямих l_1 і l_2 справедлива рівність $r_2 = 3$. Дійсно, за умови мимобіжності прямих вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – некомпланарні, тобто не паралельні одній площині. Умовою некомпланарності векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ є відмінність від нуля їх мішаного добутку:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2 \neq 0 .$$

Тому визначник, складений з координат цих векторів, не дорівнює нулю, тобто $\det B \neq 0$.

Достатність. Покажемо тепер, що за умови $r_2 = 3$, тобто $\det B \neq 0$ прямі l_1 і l_2 мимобіжні. Дійсно, якщо $\det B \neq 0$, то мішаний добуток векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ не дорівнює нулю. Це рівносильно тому, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не паралельні одній площині. Тому прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Теорему доведено.

Теорема 2. Для того щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо прямі l_1 і l_2 перетинаються, то $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$. Дійсно, у випадку перетину прямих l_1 і l_2 вони лежать в одній площині. Тому вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – компланарні і, отже, $\det B = 0$. Це означає, що $r_2 < 3$. З перетину прямих l_1 і l_2 випливає також неколінеарність векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тому $r_1 = 2$. Оскільки матриця B отримується з матриці A добавлянням рядка, то і ранг матриці B дорівнює 2.

Достатність. Якщо $r_2 = 2$, то $\det B = 0$ і вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ – компланарні. Тому прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині.

Якщо, крім цього, $r_1 = 2$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не колінеарні. Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

Теорему доведено.

Теорема 3. Для того щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 1$ і $r_2 = 2$.

Доведення. *Необхідність.* Потрібно показати, що для паралельних прямих l_1 і l_2 справедливі рівності $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Дійсно, за умови паралельності прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині. Тому вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарні і $\det B = 0$. Звідси випливає, що $r_2 < 3$. З іншого боку, із умови паралельності прямих l_1 і l_2 випливає, що вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні і тому $r_1 = 1$. Ранг r_2 матриці B дорівнює 2, оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{a}_1$ не колінеарні.

Достатність. Нехай $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Тоді прямі l_1 і l_2 паралельні, оскільки вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні, і не співпадають, бо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не колінеарний вектору $\vec{a}_1$ або $\vec{a}_2$.

Теорему доведено.

Теорема 4. Для того щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 1$, $r_2 = 1$.

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3. У цьому випадку вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ колінеарні і рівняння (1) і (2) є рівняннями однієї прямої.

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення двох прямих

$$\frac{x}{10} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-6} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + 6y + z - 8 = 0 \\ 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо задані прямі відповідно l_1 і l_2. Пряма l_1 проходить через точку $M_1(0; -1; 3)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(10; -4; -6)$. Поклавши $x = 0$, $y = 0$, з рівнянь прямої l_2 знаходимо $z = 8$. Тому пряма l_2 проходить через точку $M_2(0; 0; 8)$. Знайдемо напрямний вектор $\vec{a}_2$ прямої l_2 згідно з (2) §3:

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}_2(-5; 2; 3).$$

Для заданих прямих вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати $\overrightarrow{M_1M_2}(0;1;5)$. Координати векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ пропорційні, тому вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні, тобто $r_1 = 1$. Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ не пропорційні координатам векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тому вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не колінеарний векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тобто $r_2 = 2$. Отже, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ і прямі l_1 і l_2 паралельні.

Додаток 9*. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Розглянемо у просторі площину α, задану загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

і пряму l, задану параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (2)$$

Пряма l проходить через точку $M_0\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}\left(m;\ n;\ p\right)$.

Можливі три різних випадки взаємного розміщення прямої l і площини α:

1°. Пряма і площина перетинаються в єдиній точці – це загальний тип розміщення прямої і площини у просторі.

2°. Пряма і площина не мають жодної спільної точки, тобто пряма l паралельна площині α, але не лежить у ній.

3°. Пряма і площина мають нескінченну множину спільних точок, тобто пряма l лежить у площині α.

Дослідимо всі можливі випадки взаємного розміщення прямої l і площини α. Ця задача з алгебраїчної точки зору зводиться до дослідження системи, що складається з рівнянь (1) і (2). Для знаходження спільних точок прямої l і площини α підставимо в рівняння (1) значення $x,\ y,\ z$ з рівнянь (2). Після перетворень отримаємо рівняння відносно параметра t:

$$A\left(x_0 + mt\right) + B\left(y_0 + nt\right) + C\left(z_0 + pt\right) + D = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t\left(Am + Bn + Cp\right) + \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right) = 0. \qquad (3)$$

З рівняння (3) випливає, що:

а) якщо

$$Am + Bn + Cp \neq 0, \qquad (4)$$

то воно має єдиний розв’язок

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Підставивши цей розв'язок у формули (2), отримаємо єдину точку

$$M_1\left(x_0 + mt_0;\ y_0 + nt_0;\ z_0 + pt_0\right)$$

перетину прямої l і площини α. Тому умова (4) є достатньою умовою перетину площини α і прямої l в єдиній точці M_1.

б) Якщо

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \qquad (5)$$

то рівняння (3) набуває вигляду

$$0 \cdot t + \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right) = 0,$$

тобто не має розв'язків. Геометрично це означає, що пряма l і площина α паралельні. Отже, умова (5) є достатньою умовою паралельності прямої l і площини α.

в) Якщо

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad (6)$$

то рівняння (3) приймає вигляд

$$0 \cdot t + 0 = 0$$

і тому виконується для довільного t. Це означає, що пряма l лежить у площині α. Умова (6) є достатньою умовою того, що пряма l лежить у площині α.

Доведені нами достатні умови того чи іншого взаємного розміщення прямої l і площини α є одночасно і необхідними умовами. Це доводиться відразу ж методом від супротивного.

Твердження 1. Якщо пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці, то виконується умова (4).

Твердження 2. Для того щоб пряма l і площина α перетинались у єдиній точці, необхідно і достатньо виконання умови

$$Am + Bn + Cp \neq 0.$$

Твердження 3. Для того щоб пряма l і площина α були паралельними, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались умови

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

Твердження 4. Для того щоб пряма l лежала у площині α, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення прямої l

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

і площини α

$$x + 2y + z - 2 = 0.$$

Розв'язання. Пряма l проходить через $M_0(-1;\,2;\,-3)$ паралельно вектору $\vec{a}(1;-1;2)$. Тому параметричними рівняннями прямої l будуть рівняння

$$x = -1 + t,\ y = 2 - t,\ z = -3 + 2t.$$

Підставляємо ці значення змінних у рівняння площини α:

$$(-1+t) + 2(2-t) + (-3+2t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Оскільки знайдене значення параметра $t = 2$ є єдиним, робимо висновок, що пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці:

$$M_1(-1+2;\,2-2;\,-3+4) \Leftrightarrow M_1(1;\,0;\,1).$$

Додаток 10. Обчислення відстані від точки до прямої у просторі

Нехай у просторі задано точку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і пряму l

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (1)$$

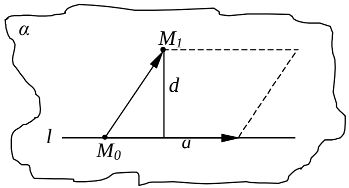

Рис. 1

Пряма l проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$. Відстань d від точки M_1 до прямої l дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з цієї точки на цю пряму (рис. 1). З іншого боку, відстань d – це висота паралелограма, сторонами якого є вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ і напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l, відкладений від точки M_0 цієї прямої.

Якщо S – площа цього паралелограма, то

$$d=\frac{S}{|\vec{a}|}. \qquad (2)$$

Площу S можна обчислити як модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{a}$:

$$S=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}\right|.$$

Приклад 1. Знайти відстань від точки $M_1(1;\, 1;\, 3)$ до прямої l

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

Розв'язання. Пряма l проходить через точку $M_0(-1;-1;0)$ паралельно вектору $\vec{a}(1;2;-1)$. Знайдемо модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1}(2;2;3)$ і $\vec{a}(1;2;-1)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}$ має координати

$$\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & -1\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 2\\1 & 2\end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow(-8;5;2),$$

то

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}\right| = \sqrt{64+25+4} = \sqrt{93}.$$

Отже, $d = \dfrac{\sqrt{93}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{2}}$ (лін. од.).