МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з навчальної дисципліни
«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

для студентів освітнього рівня "бакалавр"
факультету інформаційно-комп'ютерних технологій

Укладач
Головня Руслан Миколайович

Рекомендовано на засіданні
кафедри інженерії програмного
забезпечення 28 серпня 2024 р.,
протокол № 7

Житомир — 2024

Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для студентів освітнього рівня «бакалавр» факультету інформаційно-комп'ютерних технологій – Житомир : Державний університет «Житомирська політехніка», 2024. – 124 с.

Укладач: ГОЛОВНЯ Руслан

Рецензенти:
к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних технологій у медицині та телекомунікаціях Нікітчук Т.М.;
к.ф.-м.н., доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Прилипко О.І.

Розглянуто і рекомендовано на засіданні кафедри інженерії програмного забезпечення. Протокол від 28 серпня 2024 р., № 7

У виданні викладено теоретичний матеріал навчальної дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» у вигляді конспекту лекцій за 3 розділами: лінійна алгебра, векторна алгебра та аналітична геометрія. Посібник містить 8 лекцій і відповідає змісту та робочим програмам навчальної дисципліни. Кожна лекція має чітку структуру, наведено достатню кількість прикладів і ілюстрацій. До кожної лекції запропоновані запитання для самоконтролю.

Конспект лекцій призначений для здобувачів ступеня бакалавра факультету інформаційно-комп'ютерних технологій за спеціальностями 121 «Інженерія програмного забезпечення», 122 «Комп'ютерні науки» 123 «Комп'ютерна інженерія», 125 «Кібербезпека та захист інформації», 126 «Інформаційні системи та технології». Буде також корисним для студентів технічних спеціальностей, які вивчають відповідні розділи вищої математики.

Зміст

Вступ

Цей посібник є складовою навчально-методичного комплексу, який містить конспект лекцій, практикум, збірник завдань самостійних робіт, збірник тестових завдань для підсумкового контролю.

Запропонований конспект лекцій є результатом багаторічного досвіду автора викладання вищої математики студентам факультету інформаційно-комп'ютерних технологій. Конспект лекцій охоплює матеріал за темами: матриці та визначники, системи лінійних алгебричних рівнянь, векторна алгебра, комплексні числа, геометрія прямої і площини, криві 2-го порядку і відповідає робочим навчальним програмам дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», розробленим для здобувачів ступеня бакалавр за спеціальностями 121 «Інженерія програмного забезпечення», 122 «Комп'ютерні науки» 123 «Комп'ютерна інженерія», 125 «Кібербезпека та захист інформації», 126 «Інформаційні системи та технології».

Теоретичний матеріал поділено на 3 розділи, відповідно до змісту навчальної дисципліни. Кожна лекція має чітку структуру, супроводжується достатньою кількістю прикладів і рисунків. До кожної лекції пропонуються запитання для самоперевірки.

Робота з конспектом лекцій має допомогти студентам в організації самостійної роботи при вивченні нового матеріалу, а також спонукати їх до поглиблення своїх знань опрацьовуючи матеріал підручників та інших джерел зі списку використаної та рекомендованої літератури.

Курс лекцій апробовано серед здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» факультету інформаційно-комп'ютерних технологій. Він буде корисним для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання.

Частина I

Елементи лінійної алгебри

1 Матриці та визначники

1.1 Поняття матриці

Означення 1.1. *Матрицею* розміру $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел, що містить m рядків та n стовпців:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці позначають великими латинськими літерами, а їх елементи – відповідними малими літерами з двома нижніми індексами, перший з яких означає номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких міститься даний елемент. Скорочено записують: $A_{m\times n} = (a_{ij})$ – матриця A розміру $m \times n$ з елементами a_{ij}, індекси яких пробігають значення $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Приклад 1.1. Розглянемо матрицю $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, яка містить 2 рядки та 3 стовпці. Елемент $a_{12} = 2$ знаходиться у першому рядку та другому стовпці.

Означення 1.2. Матриця називається *нульовою*, якщо кожен її елемент дорівнює нулю. Позначається $O_{m\times n}$.

Означення 1.3. Матриця, яка містить один рядок (стовпець), називається *матрицею-рядком* або *вектор-рядком* (*матрицею-стовпцем* або *вектор-стовпцем*).

Приклад 1.2. Матриця $A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ є матрицею-рядком.

Означення 1.4. *Квадратною* називається матриця, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m = n$. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають *матрицею порядку* n та позначають A_n:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} (які називають *діагональними елементами* матриці) утворюють *головну діагональ* квадратної матриці A_n, а числа a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, …, a_{n1} – її *побічну діагональ.*

Означення 1.5. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи окрім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю.

Приклад 1.3. Діагональна матриця третього порядку:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.6. Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи головної діагоналі цієї матриці дорівнюють одиниці. Одиничні матриці позначають літерами E або I.

Приклад 1.4. Одинична матриця 4-го порядку:

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.7. Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі її елементи нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Приклад 1.5. Розглянемо трикутну матрицю: $T_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Означення 1.8. Елемент рядка матриці називається *крайнім*, якщо він відмінний від нуля, а всі елементи цього рядка, які знаходяться зліва від нього, дорівнюють нулю.

Означення 1.9. Матриця називається *східчастою*, якщо крайній елемент кожного рядка знаходиться правіше від крайнього елемента попереднього рядка.

Приклад 1.6. Східчаста матриця розміру 3×4:

$$A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11} = 1$, $a_{23} = 7$, та $a_{34} = 3$, є крайніми елементами відповідних рядків.

Означення 1.10. Матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називаються *рівними*, якщо вони одного розміру і всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

1.2 Дії над матрицями

I. **Додавання (віднімання) матриць**

Означення 1.11. *Сумою* (*різницею*) матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$ однакового розміру називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць A та B, тобто $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Позначення: $C = A + B$, $(C = A - B)$.

Приклад 1.7. Нехай задано матриці:

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тоді $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ та $A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

II. **Множення матриці на число**

Означення 1.12. *Добутком матриці* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* $\lambda \in R$, називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число λ, тобто $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Приклад 1.8. Нехай задано матрицю $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Тоді

$$3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 15 \\ 6 & 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

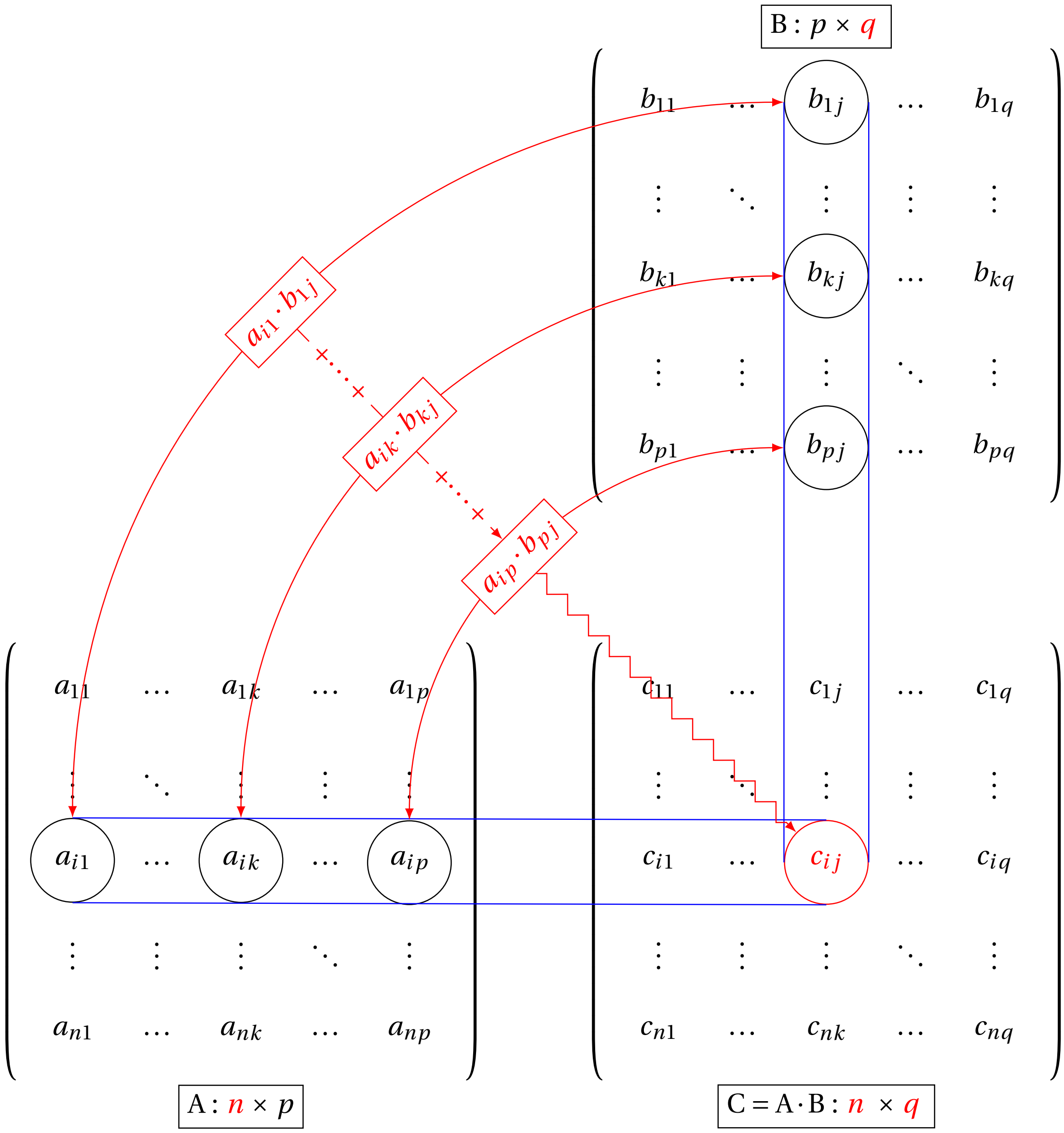
Означення 1.13. Матриця $-A = (-1)A$ називається *протилежною* до матриці A.

З введених вище означень операцій над матрицями та властивостей операцій додавання дійсних чисел випливають **основні властивості операцій додавання матриць та множення матриці на число** $(\alpha, \beta \in R)$:
1) $A + B = B + A$ (комутативність додавання матриць);
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (асоціативність додавання матриць);
3) $A + O = O + A = A$;
4) $A + (-A) = (-A) + A = O$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (дистрибутивність множення на число щодо додавання матриць);
7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел);
8) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (асоціативність множення матриці на число).

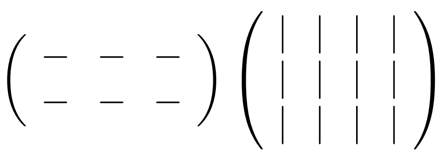
III. **Множення матриць**

Означення 1.14. *Добутком матриць* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{n\times l} = (b_{jk})$, число стовпців першої з яких дорівнює числу рядків другої, називається така матриця $C_{m\times l} = (c_{ik})$, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A та відповідних елементів k-го стовпця матриці B, тобто $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$.

Схематично правило множення можна уявляти так:



Або у вигляді дуже компактної схеми (“рядки на стовпці“):



Приклад 1.9. Знайдемо добуток матриць
$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ та $B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 2\cdot 3 & 0\cdot 3 + 2\cdot(-2) & 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 4 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -4 & -8 \\ 11 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

З означення операції множення матриць та властивостей операцій додавання і множення дійсних чисел випливають **основні властивості операції добутку матриць** ($\alpha \in R$):
1) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ (асоціативність добутку матриць);
2) $A(B+C) = AB + AC$ (дистрибутивність множення матриць щодо додавання);
3) $A\cdot E = E\cdot A = A$ (множення на одиничну матрицю);
4) $A\cdot O = O\cdot A = O$ (множення на нульову матрицю);
5) $\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$ (асоціативність множення матриць щодо множення на число).

Зауваження 1.1. В загальному випадку $AB \neq BA$ (Матриці A та B називаються *переставними*, якщо $AB = BA$).

Приклад 1.10. Нехай задано матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що $AB \neq BA$.

IV. **Піднесення до степеня**

Означення 1.15. *Натуральним степенем* k квадратної матриці A_n називається матриця A^k, яка визначається співвідношенням

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{k}.$$

Для $k = 0$ приймаємо за означенням $A^0 := E_n$.

Означення 1.16. Нехай є многочлен $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ та квадратна матриця A. Многочленом P від матриці A називається матриця $P(A)$, яка задається співвідношенням

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E,$$

де E — одинична матриця того ж порядку, що і матриця A.

Приклад 1.11. Знайти значення многочлена $f(A)$ для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, якщо $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Обчислимо

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V. **Транспонування**

Означення 1.17. *Транспонуванням* матриці A називають заміну її рядків відповідними стовпцями. Результат транспонування матриці A позначають A^T і називають матрицею *транспонованою* до матриці A.

Приклад 1.12. До матриці $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ транспонованою буде матриця $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1.3 Елементарні перетворення матриць

Означення 1.18. *Елементарними перетвореннями матриці* називають:

1. переставляння місцями двох рядків (стовпців);
2. множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;
3. додавання до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Означення 1.19. Матриці $A_{m\times n}$ та $B_{m\times n}$ називаються *еквівалентними*, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначення: $A \sim B$.

Твердження. За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до східчастого вигляду.

1.4 Визначники 2-го та 3-го порядків

Означення 1.20. Кожній квадратній матриці $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ за певним правилом можна поставити у відповідність число, що називається її *визначником* або *детермінантом* та позначається $\det A$, Δ_A або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 1.21. Визначником 1-го порядку матриці $A_1 = (a_{11})$ називається число $\det A = a_{11}$.

Означення 1.22. Визначником 2-го порядку матриці $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Введену нами формулу обчислення визначника 2-го порядку називають *правилом "хрестика"*.

Приклад 1.13. Обчислимо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$

Означення 1.23. Визначником 3-го порядку матриці $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Правило (1.1) обчислення визначника 3-го порядку називають *правилом "розкладу"*.

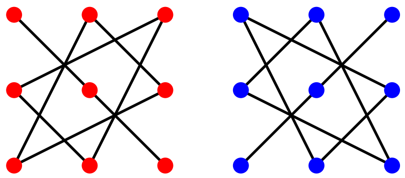
Розкриємо кожен з визначників другого порядку в рівності (1.1). В результаті отримаємо такий вираз для визначника третього порядку

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \tag{1.2}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Виконуючи аналіз останньої формули помічаємо, що права частина рівності (1.2) містить три добутки чисел, які беруться зі знаком плюс і три добутки чисел, взяті зі знаком мінус. Цю закономірність називають *правилом "трикутників"* ("зірочки", Саррюса): зі знаком "+" у формулі (1.2) беруться добуток елементів головної діагоналі та два добутки елементів, які знаходяться у вершинах трикутників з основами, паралельними головній діагоналі; зі знаком "-" у формулі (1.2) беруться добуток елементів побічної діагоналі та два добутки елементів, які знаходяться у вершинах трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі. Зручно запам'ятовувати це правило у вигляді схеми, яка наведена на рисунку.



$(+)$ $(-)$

Отже маємо два методи обчислення визначників 3-го порядку:

1. Правило "розкладу" (1.1);
2. Правило "трикутників" ("зірочки") (1.2).

Приклад 1.14. Обчислимо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ двома методами:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 0.$$

Означення 1.24. Квадратна матриця A називається *невиродженою* (*неособливою*), якщо $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, то матриця A називається *виродженою* (*особливою*).

1.5 Мінори та алгебраїчні доповнення. Поняття визначника n-го порядку

Перед введенням поняття визначника n-го порядку дамо кілька означень.

Означення 1.25. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, який отримується з даного визначника шляхом викреслювання рядка та стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Означення 1.26. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} до елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається мінор цього елемента M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{(i+j)}$. Таким чином, $A_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}$.

Приклад 1.15. Знайдемо мінор та алгебраїчне доповнення до елемента a_{12} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$:

$$a_{12} = 2, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{(1+2)} M_{12} = 6.$$

Означення 1.27. Визначником n-го порядку матриці

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається число

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \tag{1.3}$$

Зрозуміло, що формула (1.1) є частинним випадком формули (1.3). Отже, метод розкладу застосовується для визначника довільного порядку.

1.6 Властивості визначників

1. Визначник не змінюється при транспонуванні, тобто $\det(A^T) = \det A$ (отже, зі стовпцями можна робити те саме, що і з рядками).

2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

3. При перестановці двох рядків (стовпців) місцями визначник змінює знак. *Наслідок.* Якщо визначник має 2 однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

4. Спільний множник деякого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.
   Наслідок. Визначник, який містить 2 пропорційних рядки (стовпці), дорівнює нулю.

5. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна розкласти на суму двох визначників, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & b_{23}+c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

   Наслідок. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

6. Визначник добутку квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників, тобто $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

7. (теорема Лапласа) Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.
   Наслідок. Якщо всі елементи деякого рядка визначника крім одного дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює добутку цього відмінного від нуля елемента на власне алгебраїчне доповнення.

8. (теорема анулювання) Сума добутків елементів рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Приклад 1.16. Обчислимо за властивостями визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

В заданому визначнику зручно зупинитись на другому стовпці, оскільки в ньому вже є один нуль і, крім того, його елементи невеликі. Перетворимо визначник так, щоб всі елементи другого стовпця, крім елемента $a_{12} = -1$, стали рівними нулю. Для цього від третього рядка віднімемо перший, а від четвертого – подвоєний перший.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1)\cdot(-2) \\ \qquad | \qquad\quad | \\ \leftarrow + \qquad\quad | \\ \longleftarrow - - \;\; + \end{array}$$

В результаті отримуємо визначник, що дорівнює початковому:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши його за елементами другого стовпця, знаходимо

$$\Delta = (-1)(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку можна обчислити безпосередньо. Але простіше розкласти його за елементами першого стовпця, понизивши його порядок до другого:

$$\Delta = (-1)(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1-0) = 1.$$

Запитання для самоперевірки до лекції 1

1. Що називають матрицею?
2. Яку матрицю називають квадратною?
3. Яку матрицю називають діагональною?
4. Яку матрицю називають одиничною?
5. Яку матрицю називають нульовою?
6. Які матриці називають рівними?
7. Які матриці називають еквівалентними?
8. Яку матрицю називають транспонованою до заданої матриці?
9. Яку матрицю називають матрицею-рядком, матрицею-стовпцем?
10. Які існують лінійні операції над матрицями?
11. Що є добутком матриць і які властивості операції множення матриць?
12. Які елементарні перетворення ви знаєте?
13. Що називають визначником другого порядку?
14. Що називають визначником третього порядку?
15. Які правила обчислення визначника третього порядку ви знаєте?
16. Які основні властивості мають визначники?
17. Що називають мінором елемента визначника n-го порядку?
18. Що називають алгебраїчним доповненням до елемента визначника n-го порядку?
19. Як розкласти визначник за елементами рядка або стовпця?

2 Обернена матриця. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

2.1 Обернена матриця

Означення 2.1. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A, якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Теорема 2.1. (про існування та єдиність оберненої матриці) Якщо матриця A невироджена, то до неї існує єдина обернена матриця:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Доведення. Існування. Нехай матриця A є невиродженою, тобто $\det A \neq 0$. Покажемо, що матриця A^{-1}, визначена співвідношенням (2.1), є оберненою до матриці A. Дійсно,

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = E.$$

Остання рівність випливає з властивостей визначника: теореми Лапласа про розклад визначника за рядком або стовпцем (властивість 7) та теореми анулювання (властивість 8). Аналогічно перевіряється, що $A^{-1} \cdot A = E$, що й доводить існування оберненої матриці.

Єдиність доведемо від супротивного. Нехай до матриці A існують дві обернені матриці A_1^{-1} та A_2^{-1}, причому $A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$. Тоді

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1} \cdot (A \cdot A_2^{-1}) = (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_2^{-1} = E \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Отримане протиріччя доводить єдиність оберненої матриці. Теорему доведено.

Теорема 2.2. (необхідна умова існування оберненої матриці) Якщо матриця A має обернену, то вона невироджена.

Доведення. Нехай матриця А має обернену. Тоді $A \cdot A^{-1} = E$. Звідси $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Звідси випливає, що $\det A \neq 0$ (так само і $\det A^{-1} \neq 0$). Таким чином, матриця A є невиродженою.

Приклад 2.1. Знайдемо матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Таким чином, A^{-1} існує. Обчислюємо окремо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{-3}, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{1}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{-1},$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Підставляємо отримані значення у формулу (2.1):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & 4 & -2 \\ \mathbf{1} & 0 & -2 \\ \mathbf{-1} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.2 Ранг матриці

Розглянемо матрицю

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення 2.2. *Мінором порядку k матриці $A_{m\times n}$* називається будь-який визначник k-го порядку, що складається з елементів матриці, які стоять на перетині виділених k рядків та k стовпців ($k \le min\{m, n\}$).

Приклад 2.2. У матриці $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ є 12 мінорів 1-го порядку – це її елементи. Серед 18 мінорів 2-го порядку цієї матриці є, наприклад, такі мінори:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Мінорів 3-го порядку у матриці всього чотири:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

Означення 2.3. *Рангом матриці $A_{m\times n}$* називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Позначається: $r(A)$ або $rang(A)$.

Означення 2.4. Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним.*

Зауважимо, що матриця може мати кілька базисних мінорів.

Приклад 2.3. Знайдемо ранг матриці $A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

У матриці A існує мінор першого порядку відмінний від нуля, наприклад $|1|$. Звідси випливає, що $r(A) \geq 1$. У матриці є мінор 2-го порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Звідси випливає, що $r(A) \geq 2$. Але всі мінори 3-го порядку матриці A дорівнюють нулю. Таким чином, $r(A) = 2$.

Властивості рангу матриці:

1. $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.
2. $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці A дорівнюють нулю.
3. Для квадратної матриці порядку n, $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A є невиродженою.
4. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.
5. Якщо викреслити з матриці нульовий рядок (стовпець), її ранг не зміниться.
6. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.
7. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Методи обчислення рангу матриці.

I) **Метод обвідних мінорів** полягає у обчисленні мінорів матриці $A_{m\times n}$, які вибираються певним чином.

Означення 2.5. *Обвідним мінором* до мінора порядку k матриці A називається мінор $(k+1)$-го порядку цієї матриці, який цілком містить даний мінор порядку k.

1-й крок. Якщо матриця нульова, то $r(A) = 0$, в іншому випадку $r(A) \geq 1$, і переходимо до наступного кроку.

2-й крок. Знаходимо у матриці мінор 2-го порядку M_2, відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, і пошук припиняємо. В іншому випадку $r(A) \geq 2$, і переходимо до наступного кроку.

3-й крок. Обчислюємо всі мінори 3-го порядку, обвідні до M_2. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = 2$ і пошук припиняємо. В іншому випадку існує мінор M_3 не рівний нулю, тому $r(A) \geq 3$ і переходимо до наступного кроку.

Продовжуємо процедуру.

k-й крок ($k = \min(m, n)$). Нехай знайдено мінор $(k-1)$-го порядку M_{k-1}, відмінний від нуля, тобто $r(A) \geq k - 1$. Обчислимо всі мінори k-го порядку, обвідні до M_{k-1}. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = k - 1$. Якщо ж існує мінор M_k, відмінний від нуля, то $r(A) = k$, і процедуру пошуку завершено.

Приклад 2.4. Знайти ранг матриці $A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ методом обвідних мінорів.

Вочевидь, матриця має мінор 2-го порядку, відмінний від нуля: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. До цього мінора у матриці є 2 обвідних мінори 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки обидва мінори рівні нулю, то $r(A) = 2$.

II) **Метод елементарних перетворень** полягає у зведенні матриці до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень. Ранг вихідної матриці при цьому дорівнює кількості ненульових рядків отриманої східчастої матриці.

Приклад 2.5. Знайдемо ранг матриці $A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ методом елементарних перетворень.

Додамо до другого рядка перший, помножений на (-1), та до третього перший, помножений попередньо на (-2). Схематично це можна позначити:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & \cdot(-2) \\ \leftarrow + & | \\ & \longleftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -8 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Одержали еквівалентну до початкової матрицю. Тепер додамо до третього рядка другий, помножений попередньо на $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що $r(A) = 2$.

2.3 Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення 2.6. *Системою лінійних алгебраїчних рівнянь* (СЛАР), що містить m рівнянь та n невідомих, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

де числа a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, називаються *коефіцієнтами системи*, числа b_i, $i = \overline{1, m}$, – *вільними членами*.

Означення 2.7. Система (2.2) називається *квадратною*, якщо $m = n$. При цьму n називають *порядком* квадратної системи (2.2).

Означення 2.8. Система (2.2) називається *однорідною*, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю, тобто $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. У протилежному випадку (якщо принаймні один вільний коефіцієнт відмінний від нуля) система називається *неоднорідною*.

Систему (2.2) зручно записувати у матричній формі (у вигляді матричного рівняння):

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається *матрицею системи* або *основною матрицею системи*, B – *стовпцем вільних членів*, X – *стовпцем невідомих*.

Означення 2.9. *Розширеною матрицею* системи (2.2) називається основна матриця A системи, доповнена справа стовпцем вільних членів B. Позначення: $\bar{A}$ або $(A|B)$.

Означення 2.10. *Розв'язком системи* (2.2) називається впорядкований набір n чисел α_1, α_2, $\dots$, α_n, підстановка яких замість відповідних невідомих перетворює кожне рівняння системи у тотожність. Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді вектор-стовпця:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Означення 2.11. Система називається *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Означення 2.12. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку. В останньому випадку кожен її розв'язок ще називають *частинним* розв'язком, а сукупність частинних розв'язків – *загальним* розв'язком цієї системи.

Розв'язати систему – означає знайти її загальний розв'язок або довести її несумісність.

Означення 2.13. Дві системи називаються *еквівалентними* (або *рівносильними*), якщо множини їх розв'язків співпадають. Тобто, системи еквівалентні, якщо кожний розв'язок однієї з них є розв'язком іншої, і навпаки.

Необхідні і достатні умови сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь встановлює наступна теорема.

Теорема 2.3. (Кронекера-Капеллі). Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.2) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи, тобто $r(\bar{A}) = r(A)$. При цьому, якщо $r(\bar{A}) = r(A) = n$, то система (2.2) має єдиний розв'язок. Якщо $r(\bar{A}) = r(A) < n$, то система (2.2) має безліч розв'язків.

2.4 Правило Крамера

Розглянемо квадратну СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.3}$$

основна матриця якої невироджена, тобто $\det A \neq 0$.

Запишемо систему (2.3) матричній формі:

$$AX = B, \tag{2.3$'$}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta = \det A \neq 0$, то існує матриця A^{-1} – обернена до матриці системи A. Помноживши рівняння (2.3$'$) зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$ з означення оберненої матриці і $EX = X$ з властивостей дій над матрицями, то з останнього рівняння випливає, що

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) виражає *правило Крамера* у матричній формі, а її реалізацію називають *методом оберненої матриці* або *матричним методом* розв'язування СЛАР.

Деталізуємо рівність (2.4):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_1 \end{pmatrix}.$$

Можна переконатись, що $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ – розклад за елементами 1-го стовпця визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який отримується з визначника системи $\Delta = \det A$ шляхом заміни першого стовпця стовпцем вільних членів. Таким чином,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Так само, $A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n$ – розклад за елементами 2-го стовпця визначника Δ_2, який отримується з визначника системи Δ шляхом заміни другого стовпця стовпцем вільних членів. Таким чином,

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

І т.д.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.5}$$

де визначник Δ_i, $i = \overline{1,n}$, отримується з визначника системи Δ шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Формули (2.5) називаються *формулами Крамера.*

Отже, вище ми довели наступне

Твердження. Якщо $\Delta \neq 0$, то система (2.3) сумісна та визначена, тобто має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулою (2.4) або формулами (2.5).

Приклад 2.6. Розв'яжемо за формулами Крамера та методом оберненої матриці СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1, \\ x_1 + \qquad\quad 4x_3 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5. \end{cases}$$

Запишемо основну матрицю системи та стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. Формули Крамера. Обчислюємо визначник основної матриці системи розкладом за другим рядком:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0.$$

Обчислюємо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 34,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -17,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідки за формулами (2.5)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{34}{17} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-17}{17} = -1, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{17} = 0.$$

2. Метод оберненої матриці. Визначник основної матриці обчислено раніше $\Delta = 17 \neq 0$, тому існує обернена до основної матриці системи матриця A^{-1}. Знайдемо її за формулою (2.1), обчисливши попередньо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & -11 & 12 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Звідки за формулою (2.4) одержимо

$$X = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & -11 & 12 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 34 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запитання для самоперевірки до лекції 2

1. Яку матрицю називають оберненою до заданої?
2. До якої матриці існує обернена?
3. Як знайти обернену матрицю до заданої?
4. Що називають рангом матриці? Які методи обчислення рангу ви знаєте?
5. Які системи лінійних рівнянь називають однорідними, неоднорідними?
6. Які системи лінійних рівнянь називають сумісними, несумісними?
7. Які системи лінійних рівнянь називають визначеними, невизначеними?
8. Які системи лінійних рівнянь називають еквівалентними?
9. Яка умова сумісності системи лінійних рівнянь?
10. Як знайти розв'язок системи лінійних рівнянь за формулами Крамера і коли можна застосовувати ці формули?
11. Як записати систему лінійних рівнянь у матричній формі та у чому полягає метод оберненої матриці розв'язування таких систем?

3 Метод Гауса. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Власні числа та власні вектори матриці

3.1 Метод Гауса

Будучи найбільш універсальним методом розв'язування СЛАР, метод Гауса дозволяє одночасно дослідити довільну СЛАР на сумісність та визначеність і, у випадку сумісності системи, знайти її загальний розв'язок. Полягає метод Гауса у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи таким чином, щоб кожне наступне рівняння містило менше невідомих ніж попереднє.

Розглянемо загальну СЛАР (3.3), що містить m рівнянь та n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Елементарними перетвореннями цієї системи називають:

1. Переставляння двох рівнянь місцями.
2. Множення обох частин рівняння на відмінне від нуля число.
3. Додавання до одного рівняння іншого, помноженого попередньо на довільне число.

Виконується наступне

Твердження. Елементарні перетворення СЛАР не змінюють множини її розв'язків.

Розіб'ємо алгоритм Гауса на два етапи:

1. Прямий хід методу Гауса якраз і полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи, тобто у зведенні початкової системи до трикутного або східчастого вигляду шляхом виконання над нею елементарних перетворень.

Елементарні перетворення системи рівнянь еквівалентні відповідним перетворенням над рядками розширеної матриці системи, тому далі, для компактності записів, будемо працювати саме з розширеною матрицею СЛАР.

Випишемо розширену матрицю системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

На цьому етапі будемо зводити розширену матрицю системи до східчастого вигляду виконуючи елементарні перетворення над рядками матриці. Для чого спочатку, поставимо на перше місце рівняння, у якого коефіцієнт при невідомій x_1 не дорівнює нулю. Нехай, без втрати загальності, $a_{11} \neq 0$. (Для "ручної" реалізації алгоритма Гауса зручно записати на перше місце рівняння, у якого перший коефіцієнт одиниця.)

Далі застосуємо до рядків розширеної матриці наступний алгоритм. До елементів другого рядка додамо відповідні елементи першого рядка помножені на $(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$. До елементів третього рядка додамо відповідні елементи першого рядка помножені на $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$ і т.д. До елементів m-го рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на $(-\frac{a_{m1}}{a_{11}})$.

В результаті отримаємо матрицю, еквівалентну розширеній матриці початкової системи (тим самим, виключимо невідому x_1 з усіх рівнянь крім першого):

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array} \right).$$

де a'_{ij} та b'_i, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ – нові коефіцієнти системи. Далі записуємо перший рядок без змін і повторюємо алгоритм для решти $(m-1)$ рядків. Потім описаний алгоритм застосовуємо до останніх $(m-2)$ рядків і т.д., поки не зведемо матрицю $\bar{A}$ до східчастого вигляду.

Зауваження 3.1. Якщо в результаті елементарних перетворень у розширеної матриці утвориться принаймні один рядок вигляду $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & b''_k \end{array} \right)$, де $b''_k \neq 0$, то СЛАР є несумісною.

Зауваження 3.2. Якщо в результаті елементарних перетворень у розширеної матриці утвориться рядок вигляду $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$, то його закреслимо, оскільки йому відповідає рівняння $0 \equiv 0$.

Припустимо, що система сумісна, і ранг її основної матриці дорівнює r, тобто $r(\bar{A}) = r(A) = r \leq n$. Тоді в результаті елементарних перетворень отримаємо східчасту розширену матрицю системи $\bar{A}$, яка містить r рядків.

Оскільки $r(\bar{A}) = r(A) = r$, то r рядків та r стовпців цієї матриці утворюють базисний мінор. Без втрати загальності можна вважати, що перші r рядків та r стовпців розширеної матриці утворюють базисний мінор, тобто розширена матриця набуде вигляду:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rr} & \dots & a_{rn} & \tilde{b}_r \end{array}\right).$$

де $\tilde{a}_{ij}$ та $\tilde{b}_i$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, n}$ – нові коефіцієнти системи.

Рівно r невідомих, коефіцієнти яких входять до базисного мінора, називаються *головними* або *базисними*, а решта $(n - r)$ невідомих називаються *вільними*.

Запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots \tilde{a}_{1r}x_r + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \dots \tilde{a}_{2r}x_r + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{rr}x_r + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r. \end{cases}$$

2. Зворотній хід методу Гауса полягає у послідовному відшуканні всіх невідомих системи, підіймаючись від останнього рівняння системи до першого. А саме, залишаємо головні невідомі x_1, x_2, $\dots$, x_r, системи у лівих частинах рівнянь, а вільні невідомі $x_{(r+1)}$, $x_{(r+2)}$, $\dots$, x_n переносимо у праві частини рівнянь системи:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots \tilde{a}_{1r}x_r = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{1n}x_n, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \dots \tilde{a}_{2r}x_r = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2(r+1)}x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad \tilde{a}_{rr}x_r = \tilde{b}_r - \tilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{rn}x_n. \end{cases}$$

Далі, з останнього рівняння виражаємо значення x_r через вільні невідомі $x_{(r+1)}$, $x_{(r+2)}$, $\dots$, x_n. Підставляючи знайдене значення x_r у передостаннє рівняння, знаходимо з нього значення x_{r-1}, яке виражається через вільні невідомі. Продовжуючи цей алгоритм знаходимо всі невідомі системи x_r, x_{r-1}, $\ldots$, x_1. Надаючи вільним невідомим довільних значень, отримаємо нескінченну множину розв'язків системи.

Приклад 3.1. Розв'яжемо методом Гауса СЛАР:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 - 10x_2 - 6x_3 = 5. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до східчастого вигляду, для чого спочатку поміняємо місцями її перший та третій рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 1 & -10 & -6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot(-5) & \cdot(-3) \\ \leftarrow + & \quad | \\ \longleftarrow & -\,-+ \end{array} \sim$$

Далі ми виконали наступні дії над рядками нової матриці: 1) додали до 2-го рядка 1-й рядок, помножений на (-5); 2) додали до 3-го рядка 1-й рядок, помножений на (-3). Вказані дії зручно позначати схематично.

Додамо до третього рядка 2-й рядок, помножений попередньо на $(-\frac{1}{2})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 28 & 16 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & -6 & 5 \\ 0 & 56 & 32 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає знайденій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 - 6x_3 & = & 5, \\ \qquad 56x_2 + 32x_3 & = & -12, \\ \qquad\qquad 0 & = & -10. \end{cases}$$

Остання рівність в цій системі є хибною. Звідси випливає несумісність заданої системи. Таким чином, система не має розв'язків.

Приклад 3.2. Розв'яжемо методом Гауса СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого вигляду:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \\ 6 & -1 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \\ |\cdot 2 \\ \\ \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 4 & 8 \\ 18 & 8 & 2 & 14 & 4 \\ 6 & -1 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \cdot(-3)\cdot(-9)\cdot(-3) \\ \leftarrow + \quad | \qquad | \\ \longleftarrow - - + \qquad | \\ \longleftarrow - - - - - - + \end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -55 & -25 & 5 & -50 \\ 0 & -22 & -10 & 2 & -20 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \cdot(-5)\cdot(-2) \\ \leftarrow + \quad | \\ \longleftarrow - - + \end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

Звідси випливає, що $r(\bar{A}) = r(A) = 2 < 4$. Таким чином, дана СЛАР є сумісною та невизначеною. Випишемо перетворену систему

$$
\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ \quad -11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10. \end{cases}
$$

Оберемо у якості головних невідомих x_1, x_2. Тоді x_3 та x_4 – вільні невідомі. Надамо їм довільних значень: $x_4 = c_1$, $x_3 = c_2$, $c_1, c_2 \in R$. Тоді з другого рівняння

$$
x_2 = \frac{1}{11}(10 + c_1 - 5c_2).
$$

Підставляючи це значення в перше рівняння, отримаємо

$$
x_1 = \frac{1}{11}(-2 - 9c_1 + c_2).
$$

Таким чином, $x_1 = \dfrac{1}{11}(-2 - 9c_1 + c_2)$, $x_2 = \dfrac{1}{11}(10 + c_1 - 5c_2)$, $x_3 = c_2$, $x_4 = c_1$, $c_1, c_2 \in R$.

3.2 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо однорідну СЛАР (3.1) (у якої всі вільні члени дорівнюють нулю), тобто СЛАР вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Однорідна система (3.6) завжди є сумісною, оскільки у такої системи $r(\bar{A}) = r(A)$. Така система завжди має принаймні один розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, який називається *нульовим* або *тривіальним*.

З'ясуємо за яких умов однорідна система має також і ненульові розв'язки. Наступна теорема дає відповідь на це питання.

Теорема 3.1. Для того, щоб однорідна СЛАР мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці $r(A)$ був менший за число невідомих n.

Наслідок. Квадратна однорідна система має ненульові розвязки тоді і тільки тоді, коли основна матриця системи вироджена.

Розв'язати однорідну СЛАР означає знайти її загальний розв'язок, або переконатися, що вона визначена і має лише нульовий розв'язок.

Позначимо розв'язок $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_2 = \alpha_n$ однорідної системи (3.6) через

$$X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Твердження. Якщо X_1 та X_2 – розв'язки однорідної СЛАР, то для довільних c_1, $c_2 \in R$, вектор-стовпець $c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2$ також є розв'язком цієї СЛАР.

Таким чином, довільна лінійна комбінація розв'язків однорідної системи є її розв'язком.

Означення 3.1. Система розв'язків однорідної СЛАР X_1, X_2, …, X_s, називається лінійно незалежною, якщо матриця $(X_1|X_2|\ldots|X_s)$ має ранг s.

Означення 3.2. Система лінійно незалежних розв'язків X_1, X_2, …, X_s, однорідної СЛАР (3.6), називається *фундаментальною системою розвязків* (ФСР) цієї СЛАР, якщо будь-який її розв'язок X є лінійною комбінацією розв'язків X_1, X_2, …, X_s, тобто $X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_s \cdot X_s$, де c_1, c_2, …, c_s – довільні дійсні числа.

Теорема 3.2 (про загальний розв'язок однорідної СЛАР)**.** Якщо ранг $r = r(A)$ основної матриці однорідної СЛАР (3.6) є меншим за число невідомих n, то будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї СЛАР складається з $(n - r)$ розв'язків X_1, X_2, …, X_{n-r}, причому загальний розв'язок $\bar{X}$ цієї системи є лінійною комбінацією цих розв'язків:

$$\bar{X} = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_{n-r} \cdot X_{n-r},$$

c_1, c_2, …, c_{n-r} – довільні дійсні числа.

Однорідні СЛАР зазвичай розв'язують методом Гауса. Для квадратних однорідних СЛАР, обчислюючи визначник системи Δ, можна з'ясувати чи є однорідна СЛАР визначною (випадок $\Delta \neq 0$), чи вона є невизначеною (випадок $\Delta = 0$).

Приклад 3.3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \cdot (-1) \\ \leftarrow + \quad\quad | \\ \quad\quad | \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -15 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \ \cdot (-3) \\ \leftarrow + \quad\quad | \\ \longleftarrow - - + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, $r(A) = 2$. Запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 & = & 0, \\ \qquad -x_2 + 3x_3 - 5x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Виразимо головні невідомі $x_1,\ x_2$ через x_3 та x_4, надаючи їм довільних значень: $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $c_1, c_2 \in R$. Тоді з другого рівняння

$$x_2 = 3x_3 - 5x_4 = 3c_1 - 5c_2.$$

Підставляючи це значення в перше рівняння, отримаємо

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -7c_1 + 11c_2.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи:

$$X = \begin{pmatrix} -7c_1 + 11c_2 \\ 3c_1 - 5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2, \quad c_1, c_2 \in R.$$

Вектор-стовпці $X_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $X_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків даної СЛАР.

3.3 Власні числа і власні вектори матриці

Означення 3.3. Ненульовий стовпець

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

називають *власним вектором* квадратної матриці $A_{n\times n}$ якщо існує таке число λ, що

$$AX = \lambda X. \tag{3.7}$$

Число λ називають *власним числом* матриці A, що відповідає власному вектору X.

Матричне рівняння (3.7) еквівалентне однорідній системі лінійних алгебричних рівнянь

$$(A - \lambda E_n)X = O,$$

де E_n – одинична матриця, O – нульовий стовпець. Згідно наслідку теореми 3.1 ця система матиме ненульові розв'язки, якщо

$$|A - \lambda E_n| = 0.$$

Матрицю

$$A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

називають *характеристичною матрицею* матриці A.

Визначник характеристичної матриці

$$|A - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

називають *характеристичним многочленом* матриці A. Рівняння $|A-\lambda E_n| = O$ називають *характеристичним рівнянням* матриці A.

Твердження. Власні числа матриці A є коренями характеристичного рівняння

$$|A - \lambda E_n| = 0 \tag{3.8}$$

цієї матриці. Власні вектори є ненульовими розв'язками однорідної СЛАР

$$(A - \lambda E_n)X = O. \tag{3.9}$$

Кількість власних чисел матриці скінченна, натомість кількість власних векторів – нескінченна, оскільки нескінченною є множина розв'язків виродженої однорідної системи, розв'язками якої і є власні вектори.

Приклад 3.4. Знайдемо власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Запишемо характеристичне рівняння (3.8) для матриці A:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0,$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Розв'язуючи характеристичне рівняння, знаходимо власні числа матриці A:

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$$

Знайдемо власний вектор $X_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 4$. Для чого побудуємо відповідну розширену матрицю системи рівнянь (3.9):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 5-4 & 2 & 0 \\ 2 & 8-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Звідки маємо $\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$. Якщо $\alpha_2^{(1)} = c\,(c \in R)$, то $\alpha_1^{(1)} = -2\alpha_1^{(1)} = -2c$. Тому

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in R.$$

Аналогічно попередньому знайдемо власний вектор $X_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 9$.

Будуємо систему (3.9):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 5-9 & 2 & 0 \\ 2 & 8-9 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Звідки $2\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0$. Якщо $\alpha_1^{(2)} = c\,(c \in R)$, то $\alpha_2^{(2)} = 2\alpha_1^{(2)} = 2c$. Тому

$$X_2 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ c \in R.$$

Запитання для самоперевірки до лекції 3

1. Що таке розширена матриця системи?
2. В чому полягає ідея методу Гауса?
3. В чому полягає прямий хід методу Гауса?
4. В чому полягає зворотний хід методу Гауса?
5. Які невідомі називають основними, вільними?
6. Яка умова існування нетривіальних розв'язків однорідної системи?
7. Яка умова існування нетривіальних розв'язків однорідної, квадратної системи?
8. Що називають фундаментальною системою розв'язків однорідної СЛАР?
9. Що називають власним числом матриці?
10. Що називають власним вектором матриці?
11. Що називають характеристичним многочленом матриці?
12. Що називають характеристичним рівнянням матриці?
13. Як шукають власні числа та власні вектори матриці?

Частина II
Елементи векторної алгебри

4 Геометричні вектори та лінійні операції над ними. Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Базис

Величини, які повністю визначаються своїм чисельним значенням, називаються скалярними. Наприклад, площа, об'єм, температура, маса. Існують інші величини, наприклад, сила, швидкість, прискорення, які визначаються не тільки своїм чисельним значенням, але й напрямом. Такі величини в школі ми називали векторними. Векторна величина геометрично зображається за допомогою "стрілки".

4.1 Поняття вектора

Означення 4.1. *Вектор* – це напрямлений відрізок прямої, тобто впорядкована пара точок A та B. Точка A – початок вектора, а точка B – його кінець. Позначення: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$.

Означення 4.2. Вектор $\overrightarrow{BA}$ (з початком в точці B і кінцем в точці A) називається *протилежним* ветору $\overrightarrow{AB}$. Позначення: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Означення 4.3. *Довжиною* або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB і позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

Означення 4.4. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається *нульовим* ветором і позначається $\vec{0}$. Нульовий вектор напряму не має.

Означення 4.5. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним* вектором і позначається $\vec{e}$. Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, називається *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}_0$.

Означення 4.6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначення: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Колінеарні вектори можуть бути співнапрямленими $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ і протилежно-напрямленими $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Означення 4.7. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакові довжини. Позначення: $\vec{a} = \vec{b}$.

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора поміщати в будь-яку точку простору. В цьому і проявляється сутність так званих *геометричних* (*вільних*) векторів, про які ми тут говоримо.

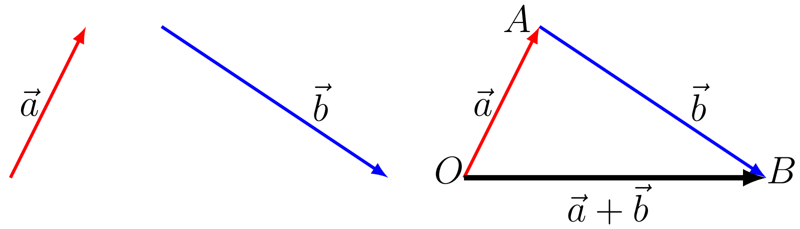
Означення 4.8. Вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_k$ в просторі називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або існує площина, до якої кожен з цих векторів паралельний.

Очевидно, два вектори завжди компланарні, тому поняття компланарності застосовують зазвичай до трьох векторів.

4.2 Лінійні операції над векторами

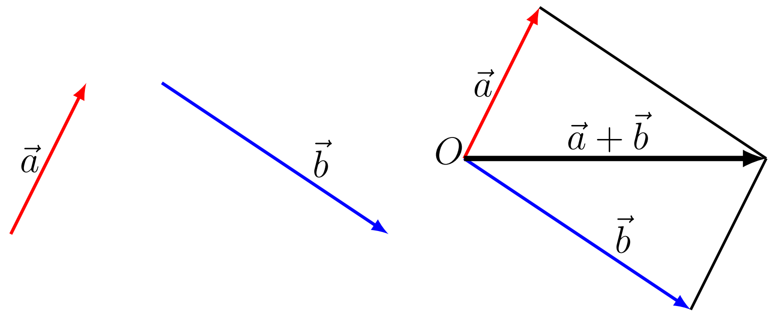
Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання, віднімання веторів та множення вектора на число.

Означення 4.9. Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – два довільних вектори. Візьмемо довільну точку O та побудуємо вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Відкладемо від точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ та кінець вектора $\vec{b}$, називається *сумою* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

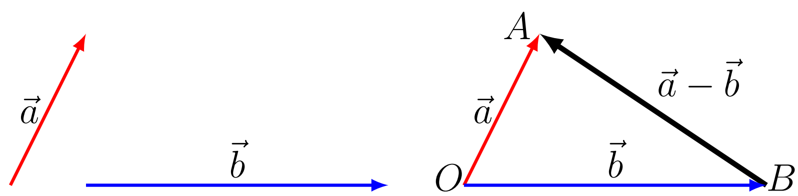


Це правило додавання векторів називається *правилом трикутника* (узагальнюється на довільне число доданків).

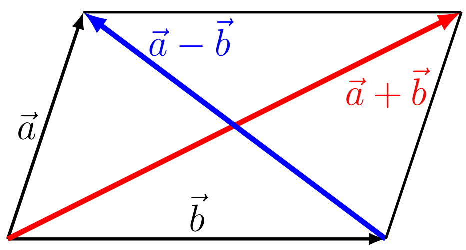
Суму двох неколінеарних векторів можна побудувати також за *правилом паралелограма*:



Означення 4.10. Під різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ розуміють вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



Зауважимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ одна направлена діагональ є сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а інша — їх різницею.

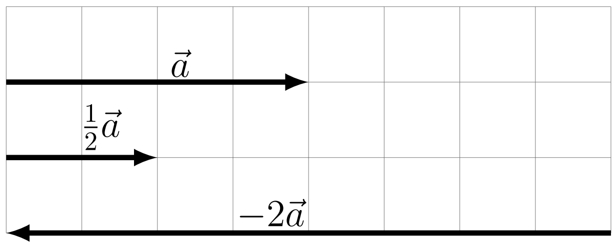


Означення 4.11. *Добутком вектора $\vec{a}$ на число (скаляр)* λ називається такий вектор $\vec{b}$ (позначається $\vec{b} = \lambda\vec{a}$), для якого виконуються умови:

1. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
2. $\vec{b} \parallel \vec{a}$;
3. $\vec{b} \upuparrows \vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Безпосередньо з означення випливає, що $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$; $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. Вектор $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$ називають *протилежним* до вектора $\vec{a}$.

Приклад 4.1. Для вектора $\vec{a}$ на рисунку зображено вектори $\frac{1}{2}\vec{a}$ та $-2\vec{a}$.



З означення 4.11 випливає наступний критерій колінеарності векторів.

Теорема 4.1. Для того щоб два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб існувало таке число λ, для якого виконується рівність $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Властивості лінійних операцій над векторами $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in R)$:
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3. $\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$;
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

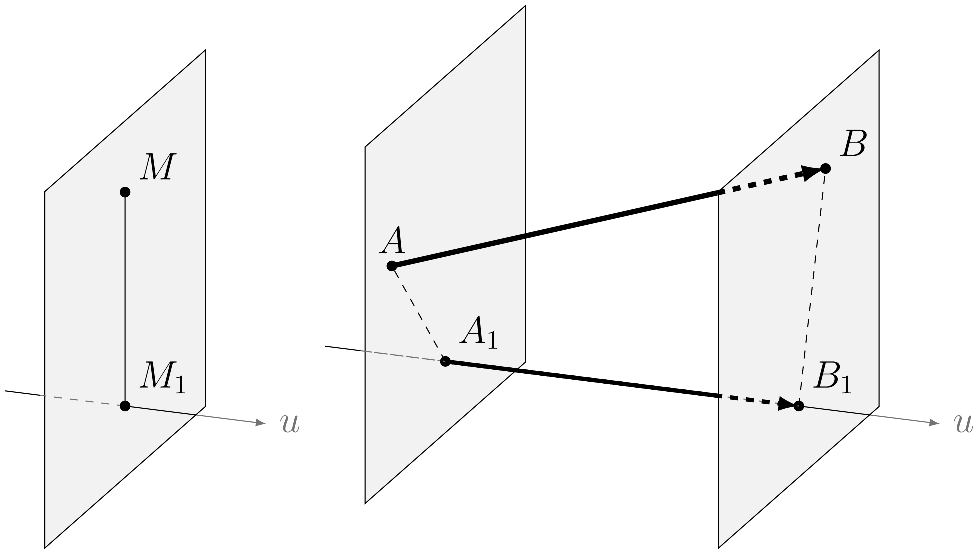
4.3 Проекція вектора на вісь

Нехай у просторі задана вісь u, тобто напрямлена пряма.

Означення 4.12. *Проекцією точки M на вісь u* називається основа M_1 перпендикуляра MM_1, опущеного з точки M на вісь u.

Точка M_1 є точкою перетину осі u з площиною, яка проходить через точку M перпендикулярно осі u. Якщо точка M лежить на осі u, то проекція точки M співпадає з M.

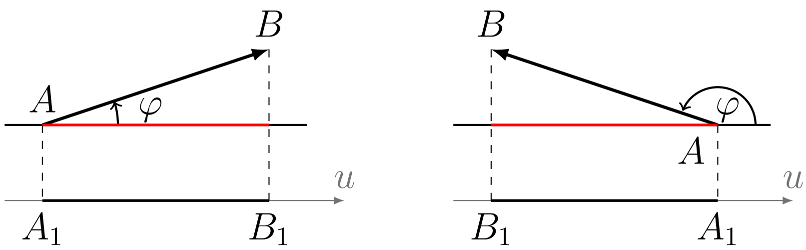
Нехай $\overrightarrow{AB}$ – довільний вектор ($\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь u відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$, і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.



Означення 4.13. *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* u називається додатнє число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь u співнапрямлені, і від'ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь u протилежно напрямлені. Якщо точки A_1 і B_1 співпадають ($\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0}$), то проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u дорівнює нулю.

Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u позначатимемо $np_u\overrightarrow{AB}$.

Якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ або $\overrightarrow{AB} \perp u$, то $np_u\overrightarrow{AB} = 0$. Кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ та віссю u будемо позначати φ. Очевидно, $0 \leq \varphi \leq \pi$.



Властивості проекції вектора на вісь

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь u дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором $\vec{a}$ та віссю u, тобто $np_u\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi$.

Наслідок 1. Проекція вектора на вісь додатня (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут прямий.

Наслідок 2. Проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь є рівними між собою.

2. Проекція суми векторів на одну і ту ж саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто $np_u(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = np_u\overrightarrow{a} + np_u\overrightarrow{b}$.

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція на вісь u також множиться на це число, тобто $np_u(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda np_u\overrightarrow{a}$.

Таким чином, лінійні операції над векторами породжують відповідні лінійні операції над їх проекціями.

4.4 Розклад вектора по ортах координатних осей. Модуль вектора. Напрямні косинуси

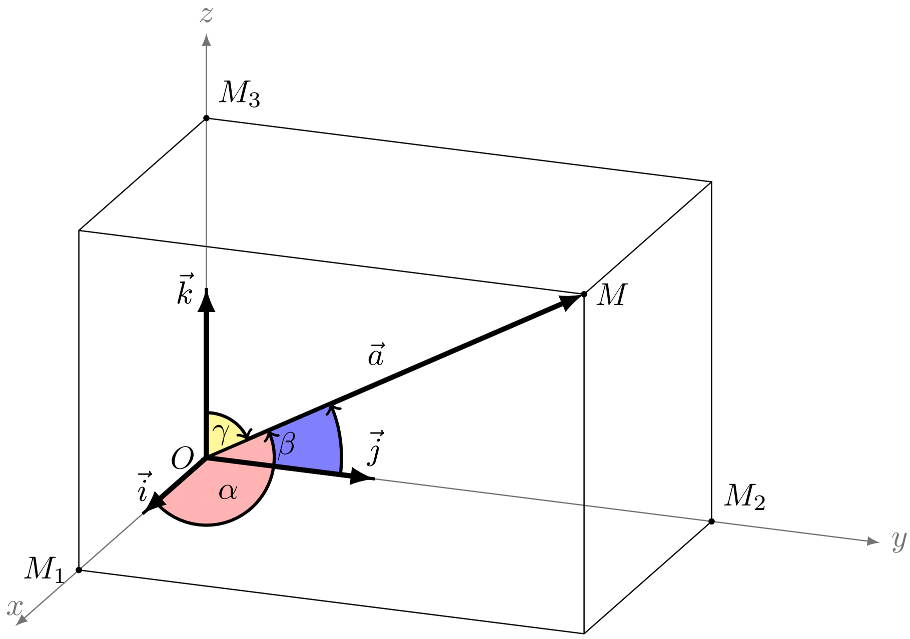
Розглянемо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Виділимо на осях Ox, Oy, Oz одиничні вектори (орти), які позначаються $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ відповідно. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ простору та перенесемо його початок у початок координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

Знайдемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Для цього проведемо через кінець M вектора $\overrightarrow{OM}$ площини, паралельні площинам координат. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_1, M_2 та M_3 відповідно. Отримаємо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overrightarrow{OM}$. Тоді $np_{Ox}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{OM_1}|$, $np_{Oy}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{OM_2}|$ та $np_{Oz}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{OM_3}|$. Крім того,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Але $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k}$. Позначимо $|\overrightarrow{OM_1}| = a_x$, $|\overrightarrow{OM_2}| = a_y$, $|\overrightarrow{OM_3}| = a_z$. Тоді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{4.1}$$



Рівність (4.1) називається розкладом вектора по ортах координатних осей, а числа a_x, a_y, a_z – *координатами вектора*. Таким чином, координати вектора є його проекціями на відповідні координатні осі. Рівність (4.1) часто записують у скороченій формі: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. За відомими координатами вектора легко знайти його модуль. Оскільки вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2}.$$

Нехай кути вектора $\vec{a}$ з осями Ox, Oy та Oz відповідно дорівнюють α, β та γ. З властивості 1 проекції вектора на вісь, маємо $a_x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha$, $a_x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha$, $a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$. Звідси випливає, що

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_x}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$. Напрямні косинуси вектора задавольняють співвідношення:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Зауважимо, що координатами орта $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$ є напрямні косинуси вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Згідно з введеним поняттям координат геометричного вектора, орти осей Ox, Oy, Oz відповідно мають координати: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

4.5 Дії над векторами, заданими проекціями

Нехай вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ задані своїми проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz або, що те ж саме,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх проекціями, тобто

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$;

2) $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Рівність векторів. Два вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні тоді і тільки тоді, коли

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z.$$

Умова колінеарності векторів.

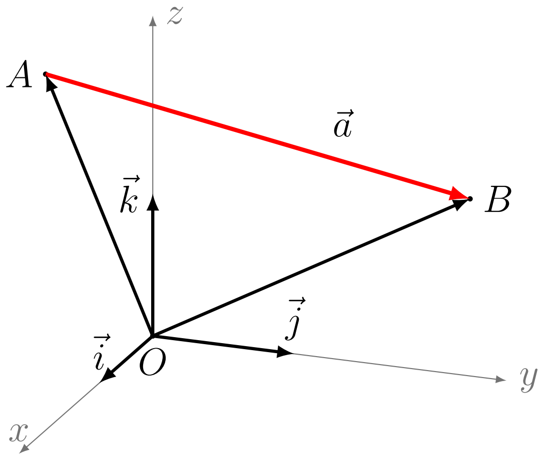
$$\vec{a}||\vec{b} \ \Leftrightarrow\ \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

4.6 Координати точки та вектора

Розглянемо у просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Нехай M – довільна точка простору. *Координатами точки* M називають координати вектора $\overrightarrow{OM}$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ при цьому називають *радіус-вектором точки* M та позначають $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(M)$. Таким чином, координати точки – це координати її радіус-вектора $\vec{r}(M) = (x, y, z)$.

Координати точки M записують у вигляді $M(x, y, z)$.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати його початку та кінця – точок $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Маємо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.



Таким чином, координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця та початку.

Для векторів, заданих на площині, всі поняття, викладені вище, вводяться повністю аналогічно.

4.7 Узагальнення поняття вектора. n-Вимірний алгебраїчний простір

Вище розглядалися геометричні вектори на площині і в просторі. Для таких векторів було встановлено, що вектор однозначно задається своїми координатами (проекціями на координатні осі) у введеній системі координат. При цьому операції додавання та множення на число для векторів, заданих координатами, можна безпосередньо вводити за правилами з підрозділу 4.5. Таким чином, з алгебраїчної точки зору, вектор – це впорядкований набір чисел. Наприклад, на площині – це впорядкований набір двох чисел, записаних у вигляді рядка: $\vec{a} = (a_x, a_y)$, у просторі – це впорядкований набір трьох чисел, записаних у вигляді: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Узагальнюючи поняття вектора, під вектором будемо розуміти впорядкований набір n чисел (координат), записаних у вигляді рядка: $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Означення 4.14. Розглянемо множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел, та введемо на ній операції додавання та множення на число $\lambda \in R$ за наступними правилами:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ з введеними операціями додавання та множення на число, називають *n-вимірним векторним (алгебраїчним) простором* та позначають R_n.

Можна переконатись, що для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ з простору R_n та будь-яких дійсних чисел λ, μ виконуються наступні властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3. у множині R_n існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що для будь-якого $\vec{a} \in R_n$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. для кожного вектора $\vec{a} \in R_n$ існує *протилежний* вектор $-\vec{a} \in R_n$, такий що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
6. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
7. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;
8. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

4.8 Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Базис

Нехай у деякому n-вимірному просторі із введеною системою координат задано вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_m$.

Означення 4.15. Якщо виконується рівність

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots \lambda_m\vec{a}_m,$$

де λ_1, λ_2, …, λ_m – деякі дійсні числа, то кажуть, що вектор розкладено за векторами $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_m$, а числа λ_1, λ_2, …, λ_m називають коефіцієнтами цього розкладу.

Означення 4.16. Система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ називається *лінійно залежною*, якщо знайдуться такі дійсні числа λ_1, λ_2, ..., λ_m, принаймні одне з яких відмінне від нуля, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots \lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}. \tag{4.2}$$

Якщо ж рівність (4.2) виконується тільки, коли всі $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ називається *лінійно незалежною.*

Властивості лінійної залежності і незалежності векторів:

1. Якщо серед векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ є нульовий вектор, то система векторів є лінійно залежною.

2. Якщо вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ $(k \le m)$, системи векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ є лінійно залежними, то і всі вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ цієї системи є лінійно залежними.

З властивості 2 випливає, що приєднання до системи лінійно залежних векторів, будь-яких інших векторів, не змінює лінійної залежності системи.

Теорема 4.2. Для того, щоб вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією інших векторів системи.

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ – лінійно залежні. Тоді за означенням існують такі числа λ_1, λ_2, ..., λ_m, серед яких принаймні одне відмінне від нуля, що $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_m \neq 0$. Тоді

$$\vec{a}_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\vec{a}_{m-1}.$$

тобто вектор $\vec{a}_m$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_{m-1}$.

Доведемо достатність. Нехай вектор $\vec{a}_m$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_{m-1}$, тобто

$$\vec{a}_m = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots \lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1},$$

для деяких дійсних чисел λ_1, λ_2, ..., λ_{m-1}. Але тоді

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots \lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1} + (-1)\cdot\vec{a}_m = \vec{0},$$

звідки випливає, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ – лінійно залежні.

Наслідок 1. Система, що складається з одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор нульовий.

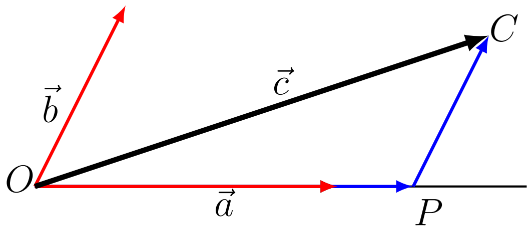
Наслідок 2. Система двох векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли ці вектори – колінеарні.

Наслідок 3. Система трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні. При цьому, третій вектор є лінійною комбінацією двох інших, тобто існують $\alpha, \beta \in R$ такі, що

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ – лінійно залежні. Тоді $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$, для деяких дійсних чисел λ_1, λ_2, λ_3. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_3 \neq 0$. Звідси випливає, що $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, де $\alpha = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$. Отже, вектор $\vec{c}$ розкладається за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні.

Доведемо достатність. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні. Якщо серед трьох векторів є принаймні два колінеарних, то з властивості 2 та наслідку 2 випливає, що всі три вектори є лінійно залежними. Тому припустимо, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ не є попарно колінеарними. Відкладемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ від спільного початку – точки O площини.



Проведемо через кінець C вектора $\vec{c}$ пряму, паралельну вектору $\vec{b}$, до перетину в точці P з прямою, на якій лежить вектор $\vec{a}$. Тоді $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$, причому вектори $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{PC}$ колінеарні відповідно векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Таким чином, існують числа $\alpha, \beta \in R$ такі, що $\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a}$ і $\overrightarrow{PC} = \beta\vec{b}$. Звідки $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ – лінійно залежні.

З наслідку 3 випливає, що будь-який вектор площини можна розкласти за двома неколінеарними векторами. Отже, будь-які три вектори, що лежать у одній площині, — лінійно залежні.

Наслідок 4. Будь-які чотири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ простору R_3 є лінійно залежними, тобто четвертий вектор є лінійною комбінацією трьох інших:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

для деяких $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Означення 4.17. Впорядкований набір n лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$ у деякому n-вимірному алгебраїчному просторі R_n, називається базисом у цьому просторі.

Теорема 4.3. Система n векторів

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \vec{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ &\ldots, \\ \vec{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}), \end{aligned}$$

утворює базис в n-вимірному алгебраїчному просторі R_n тоді і тільки тоді, коли визначник, рядками якого є координати векторів системи, не дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

З наслідків 1–4 випливає, що серед всіх векторів, заданих на прямій (у одновимірному просторі) базис складається з одного ненульового вектора. Серед всіх векторів, заданих на площині, базис складається з двох неколінеарних векторів. Серед всіх векторів, заданих у тривимірному просторі, базис складається з трьох некомпланарних векторів.

Означення 4.18. Коефіцієнти розкладу вектора $\vec{a}$ за базисом називають *координатами вектора* в цьому базисі.

Означення 4.19. Базис утворений одиничними попарно перпендикулярними векторами називають *ортонормованим.*

На площині – це система двох векторів $\vec{i} = (1, 0)$ і $\vec{j} = (0, 1)$. У просторі R_3 – це система трьох векторів

$$\vec{i} = (1, 0, 0),\ \vec{j} = (0, 1, 0),\ \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Приклад 4.2. Переконаємося, що система векторів

$$\vec{a} = (3, 2, 1),\ \vec{b} = (5, 3, 0),\ \vec{c} = (2, 1, 4)$$

утворює базис у множині всіх векторів простору і знайдемо розклад вектора $\vec{c} = (1, 1, -1)$ у цьому базисі.

Спочатку переконаємось, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ є лінійно незалежними тобто утворюють базис. Для цього складемо і обчислимо визначник з координат цих векторів:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Тому за теоремою 4.3 вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ є лінійно незалежними, тобто утворюють базис у множині всіх векторів простору.

Нехай α, β, γ – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, тобто

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Деталізуємо цю рівність

$$(1, 1, -1) = \alpha(2, 3, 1) + \beta(5, 3, 0) + \gamma(2, 1, 4),$$

звідки

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta + 2\gamma &= 1, \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 1, \\ \alpha \qquad\quad + 4\gamma &= -1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю СЛАР, отримаємо $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 1$, тобто розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має вигляд:

$$\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}.$$

Запитання для самоперевірки до лекції 4

1. Що називають вектором, його модулем?
2. Який вектор називають одиничним?
3. Який вектор називають нуль-вектором?
4. Що називають ортом вектора?
5. Які вектори називають колінеарними?
6. Які вектори називають компланарними?
7. Які вектори називають рівними?
8. Які дії над векторами називають лінійними і які вони мають властивості?
9. Що називають ортом вектора і як можна його знайти?
10. Які вектори утворюють базис на прямій, на площині, у просторі?
11. Що таке напрямні косинуси вектора і які їх властивості?
12. Яке правило знаходження координат вектора і його модуля?
13. Як виконати лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами?
14. Яка умова колінеарності векторів, заданих координатами?
15. Які вектори називають лінійно незалежними, лінійно залежними?

5 Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

5.1 Скалярний добуток векторів, його властивості та застосування

Означення 5.1. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів помноженому на косинус кута між ними (позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a}, \vec{b})$), тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

З означення проеції вектора на вісь випливає, що $|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{b}}\vec{a}$ і $|\vec{b}| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$, а отже

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b},$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на вісь співнаправлену з першим вектором.

Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативність).

Доведення. Дійсно, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (асоціативність скалярного добутку відносно числового множника).

Доведення. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивність скалярного добутку).

Доведення. Дійсно, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Доведення. Дійсно, $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2$. Зокрема, з властивості 4 випливає, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$. При цьому, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$. Крім того, з властивості 4 випливає, що $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

5. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Доведення. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$. Доведемо необхідність. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Доведемо достатність. Нехай $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Оскільки $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\cos\varphi = 0$. Звідси, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Зокрема, з властивості 5 випливає, що $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$.

Скалярний добуток векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами у просторі R_3, тобто

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$= a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k} =$$
$$= a_xb_x|\vec{i}|^2+a_xb_y\cdot 0+a_xb_z\cdot 0+a_yb_x\cdot 0+a_yb_y\cdot|\vec{j}|^2+a_yb_z\cdot 0+a_zb_x\cdot 0+a_zb_y\cdot 0+a_zb_z|\vec{k}|^2 =$$
$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Отже,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

тобто скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків їх координат.

Основні застосування скалярного добутку векторів

1. **Кут між векторами.** Нехай $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ – два ненульові вектори. Тоді

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Зокрема, звідси випливає критерій ортогональності векторів:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

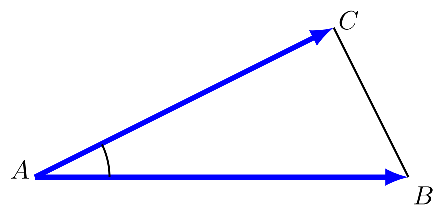
2. **Проекція вектора на вектор.** Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3. **Робота сталої сили.** Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з точки B в точку C під дією сталої сили $\vec{F}$, що утворює кут φ з напрямком $\overline{BC}$. З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні $\overline{BC}$ дорівнює

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \cos\varphi = \vec{F} \cdot \overline{BC}.$$

Приклад 5.1. Знайдемо косинус внутрішнього кута A в трикутнику ABC, якщо відомі координати вершин $A(0, -1, 2)$, $B(-1, -2, 7)$, $C(1, -2, 6)$.



Шуканий кут утворений векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, знайдемо їх координати:

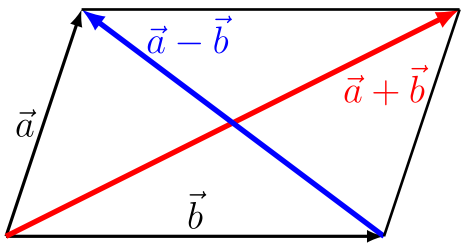
$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 0, -2 - (-1), 7 - 2) = (-1, -1, 5),$$
$$\overrightarrow{AC} = (1 - 0, -2 - (-1), 6 - 2) = (1, -1, 4).$$

Звідки маємо

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 5\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{20}{9\sqrt{6}}.$$

Приклад 5.2. Обчислимо довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ та $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

Діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, утворюють вектори $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$.



Знайдемо спочатку $|\vec{a} + \vec{b}|$. Використовуючи властивості скалярного добутку, отримаємо

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = (4\vec{p}-\vec{q})^2 = 16\vec{p}^2 - 8\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{q}^2 = 16|\vec{p}|^2 - 8|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\frac{\pi}{3} + |\vec{q}|^2 =$
$= 16\cdot 2^2 - 8\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 1^2 = 64 - 8 + 1 = 57,$

звідки $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{57}$.

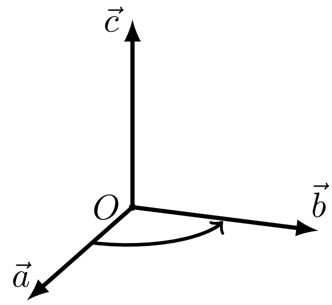
Аналогічно,

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = (2\vec{p}+3\vec{q})^2 = 4\vec{p}^2 + 12\vec{p}\cdot\vec{q} + 9\vec{q}^2 = 4|\vec{p}|^2 + 12|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 9|\vec{q}|^2 =$
$= 4\cdot 2^2 + 12\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 9\cdot 1^2 = 16 + 12 + 9 = 37,$

звідки $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37}$.

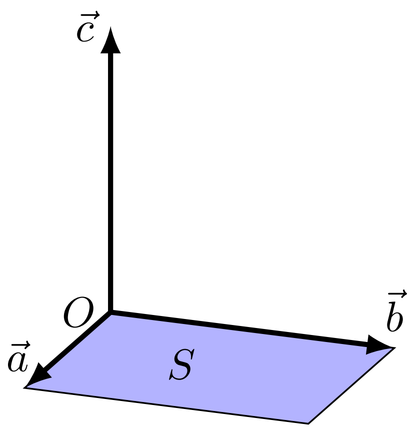
5.2 Векторний добуток векторів, його властивості та застосування

Означення 5.2. Кажуть, що три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ утворюють *праву трійку* векторів, якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший перехід від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки, і *ліву трійку*, якщо найкоротший перехід від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється за годинниковою стрілкою.



Означення 5.3. *Векторним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$) називається вектор $\vec{c}$ такий, що:
1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$, тобто $\vec{c}$ перепендикулярний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, тобто вектор $\vec{c}$ має довжину, що дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.



З означення векторного добутку безпосередньо випливають наступні співвідношення для ортів координатних осей: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Це випливає з того, що вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ одиничні, взаємноортогональні і утворюють праву трійку векторів.

Переконаємось у справедливості першої рівності перевіркою означення. Дійсно,

1) $\vec{k} \perp \vec{i}$ і $\vec{k} \perp \vec{j}$;

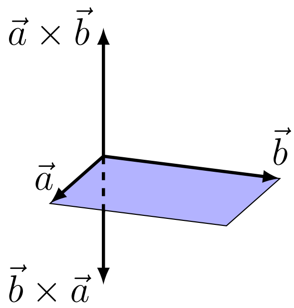
2) $|\vec{k}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) \;\Leftrightarrow\; 1 = 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; 1 = 1$;

3) вектори утворюють праву трійку векторів.

Властивості векторного добутку

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Доведення. Зрозуміло, що вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ колінеарні та мають однакову довжину. Але трійки векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ та $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}\}$ є протилежними. Одна з них є правою, а інша лівою. Таким чином, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.

Доведення. Доведемо, що $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$. Друга рівність доводиться аналогічно.

Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Вектор $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Вектор $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ також перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Звідси випливає, що вектори $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ та $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ колінеарні. Крім того, зрозуміло, що вони співнапрямлені, оскільки $\lambda > 0$. Нарешті, ці вектори мають однакові довжини, оскільки $|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda|\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ і $|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Отже, ми довели, що для $\lambda > 0$, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$. Для $\lambda < 0$ доведення аналогічне.

3. $\vec{a} || \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доведення. Доведемо необхідність. Якщо $\vec{a} || \vec{b}$, то кут φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ або дорівнює 0 або дорівнює π. Тоді $\sin\varphi = 0$. Таким чином, $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$, а отже $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доведемо достатність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ненульові. Якщо $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi = 0$. Тому з останнього співвідношення випливає, що $\sin\varphi = 0$, звідки $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$. Таким чином, $\vec{a}||\vec{b}$.

4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (приймемо без доведення).

Приклад 5.3. Спростити вираз:

$$(2\vec{i} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{j} + 3\vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{k}).$$

Скориставшись означенням та властивостями векторного добутку, отримаємо:

$$(2\vec{i} \times \vec{j} + \vec{k} \times \vec{j} + 3\vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{k}) = (2\vec{k} - \vec{i} + 3\vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{k}) = (5\vec{k} - \vec{i}) \times (\vec{i} - 2\vec{k}) =$$

$$= 5\vec{k} \times \vec{i} - 10\vec{k} \times \vec{k} - \vec{i} \times \vec{i} + 2\vec{i} \times \vec{k} = 5\vec{j} - 10 \cdot \vec{0} - \vec{0} + 2(-\vec{j}) = 3\vec{j}.$$

Векторний добуток векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами у просторі R_3, тобто

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Тоді

$$\begin{gathered}
\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\
= a_xb_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_xb_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_xb_z(\vec{i} \times \vec{k}) + \\
+ a_yb_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_yb_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_yb_z(\vec{j} \times \vec{k}) + \\
+ a_zb_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_zb_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_zb_z(\vec{k} \times \vec{k}) = \\
= \vec{0} + a_xb_y \cdot \vec{k} - a_xb_z \cdot \vec{j} - a_yb_x \cdot \vec{k} + \vec{0} + a_yb_z \cdot \vec{i} + a_zb_x \cdot \vec{j} - a_zb_y \cdot \vec{i} + \vec{0} = \\
= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.
\end{gathered}$$

Тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Цю рівність називають *правилом умовного визначника.* Для зручності її записують у наступній компактній формі, яка легко запам'ятовується:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 5.4. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ та $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Основні застосування векторного добутку векторів

1. **Встановлення колінеарності векторів.** З властивості 3 випливає, що $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

2. **Знаходження площ паралелограма та трикутника, побудованих на двох векторах.** Згідно з означенням векторного добутку для двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, модуль їх векторного добутку дорівнює $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, тобто

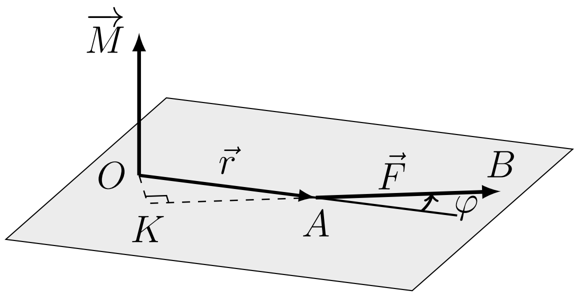
$$S_{\text{паралелограма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

   Зокрема, звідси випливає, що

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

3. **Визначення момента сили відносно точки.** Нехай у точці A прикладена деяка сила $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$, і нехай O – деяка точка простору. З фізики відомо, що моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$

(див. рисунок), який проходить через точку O і задовольняє умови:
1) перпендикулярний площині, у якій лежать точки O, A, B;
2) чисельно дорівнює добутку сили на плече, тобто $|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |OK| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\varphi = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{OA}})$;
3) утворює праву трійку з векторами $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{AB}$.



Таким чином, $\vec{F} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$.

5.3 Мішаний добуток векторів, його властивості та застосування

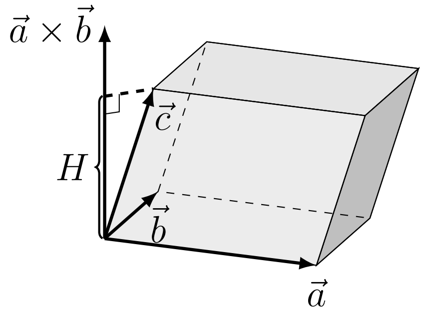
Нехай дано три довільних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Розглянемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$.

Означення 5.4. Скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ називається *векторно-скалярним* або *мішаним* добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Мішаний добуток позначається: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, або $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. З означення зрозуміло, що мішаний добуток трьох векторів — це число.

Геометричний зміст мішаного добутку

З'ясуємо геометричний зміст мішаного добутку. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є задані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Побудуємо також вектор $\vec{a} \times \vec{b}$. Тоді $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$, причому $|\vec{a} \times \vec{b}| = S$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Крім того, $np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c} = H$ для правої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, і $np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c} = -H$ для лівої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, де H – висота паралелепіпеда.



Таким чином, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H) = \pm V$, де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Отже, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятого зі знаком "+", якщо вектори утворюють праву трійку, і зі знаком "−", якщо вектори утворюють ліву трійку. Зауважимо, що з трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можна скласти шість впорядкованих трійок, при цьому три трійки утворюють ліву трійку і три праву. А саме, трійки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ є однаково орієнтованими, тобто одночасно утворюють праву трійку або ліву. Інші трійки, а саме $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$; $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$; $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ також є однаково орієнтованими, тобто одночасно утворюють праву або ліву трійку. Виходячи з геометричної інтерпретації, зрозуміло, що мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можна еквівалентно означати як число, рівне об'єму орієнтованого (зі знаком) паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$, тобто мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці множників.

Доведення. Властивість 1 виконується, оскільки в кожному випадку не змінюється ні об'єм паралелепіпеда, ні його орієнтація в просторі (що визначає знак).

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, тобто мішаний добуток не змінюється при перестановці місцями знаків векторного і скалярного множення.

Доведення. Випливає з властивості 1 та з комутативності скалярного добутку.

3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$, тобто мішаний добуток змінює знак при перестановці місцями будь-яких двох векторів.

Доведення. Випливає з властивості 1 та властивості 1 векторного добутку.

4. Мішаний добуток трьох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$, тобто об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, дорівнює нулю.

Припустимо, що $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – не компланарні. Тоді можна побудувати паралелепіпед на цих векторах з об'ємом, не рівним нулю. А це суперечить умові.

Доведемо достатність. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні, тобто лежать в одній площині. Тоді вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{c}$, а отже $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

Мішаний добуток векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані своїми координатами у просторі R_3, тобто

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},\ \vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

Тоді

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Тобто мішаний добуток трьох векторів дорівнює значенню визначника, складеного з координат векторів зі збереженням порядку.

Основні застосування мішаного добутку векторів

1. **Визначення орієнтації векторів у просторі.** Якщо $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку. Якщо $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}<0$, то трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ліва.

2. **Встановлення компланарності векторів.** Три ненульових вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

3. **Знаходження об'ємів паралелепіпеда та трикутної піраміди.** Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

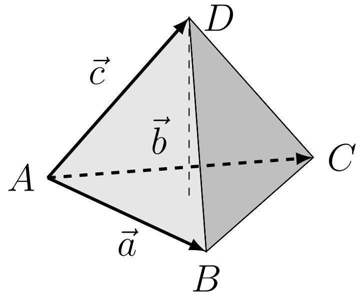
$$V_{\text{паралелепіпеда}} = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|.$$

Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|.$$

Приклад 5.5. Знайти площу основи ABC, о'бєм та довжину висоти трикутної піраміди, вершинами якої є точки $A(1,2,3)$, $B(9,6,4)$, $C(3,0,4)$, $D(5,2,6)$. Візьмемо три вектори, які мають спільний початок у вершині A. Їх координати:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(8,4,1),$$
$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(2,-2,1),$$
$$\vec{c}=\overrightarrow{AD}=(4,0,3).$$



Тоді з властивостей векторного добутку

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Знайдемо спочатку

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 24\vec{k}.$$

Тоді

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 24^2} = 9\sqrt{2}.$$

Об'єм піраміди:

$$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-48| = 8.$$

Знайдемо висоту піраміди, опущеної з вершини D:

$$DH = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 8}{9\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Запитання для самоперевірки до лекції 5

1. Що називають скалярним добутком двох векторів?
2. Які властивості має скалярний добуток?
3. Як знайти скалярний добуток за відомими координатами векторів?
4. Що таке проекція вектора на вісь і як її знайти за допомогою скалярного добутку?
5. Як знайти кут між векторами?
6. Який критерій ортогональності векторів?
7. Яку упорядковану трійку некомпланарних векторів називають правою?
8. Що називають векторним добутком двох векторів?
9. Які основні властивості векторного добутку?
10. Як знайти векторний добуток за відомими координатами векторів?
11. Який геометричний зміст модуля векторного добутку?
12. Що називають мішаним добутком трьох векторів?
13. Який геометричний зміст модуля мішаного добутку?
14. Як знайти мішаний добуток за заданими координатами векторів?
15. Які основні властивості мішаного добутку?
16. Який критерій компланарності векторів, заданих координатами?

6 Комплексні числа

6.1 Побудова множини комплексних чисел

Появу комплексних чисел пов'язують із задачею добування квадратного кореня з від'ємного числа, яка на множині дійсних чисел розв'язку не має. Необхідність у строгому обґрунтуванні теорії комплексних чисел зумовлюється тим, що ці числа є важливими у цілому ряді питань як самої математики, так і її застосувань у фізиці, механіці, радіотехніці, гідродинаміці тощо. Працювати з комплексними числами, зокрема, доводиться в криптографії (алгоритми шифрування), при роботі з аудіо та відео (графічні рушії, кодеки).

Означення 6.1. *Комплексним числом* z назвемо будь-яку упорядковану пару дійсних чисел x, y та позначатимемо $z = (x, y)$. Множину всіх комплексних чисел позначимо C.

Означення 6.2. Два комплексних числа $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ назвемо *рівними* і будемо писати $z_1 = z_2$, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Означення 6.3. Нехай $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ – два комплексних числа. Суму $z_1 + z_2$ визначимо рівністю

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{6.1}$$

а добуток $z_1 \cdot z_2$ – рівністю

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{6.2}$$

Операції додавання і множення комплексних чисел мають наступні властивості, які є наслідками відповідних властивостей дійсних чисел і означення 6.3:

I. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (комутативність додавання).

II. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (комутативність множення).

III. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (асоціативність додавання).

IV. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (асоціативність множення).

V. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (дистрибутивність множення відносно додавання).

Комплексне число $(x, 0)$ ототожнимо з дійсним числом x і будемо писати $(x, 0) = x$. Наприклад, $(3, 0) = 3$, $(-5, 0) = -5$, $(0, 0) = 0$.

Множина дійсних чисел стає при цьому підмножиною множини комплексних чисел. Отже, множина R дійсних чисел з її звичайною арифметикою є ніби "вкладеною" у множину комплексних чисел C. Ще кажуть, що множина комплексних чисел є розширенням множини дійсних чисел.

6.2 Алгебраїчна форма комплексного числа

Особливу роль серед комплексних чисел відіграє число $(0, 1)$. Позначимо це комплексне число буквою i, тобто $(0, 1) = i$. Розглянемо за правилом (6.2)

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Тобто,

$$i^2 = -1. \tag{6.3}$$

Рівність (6.3) означає, що на множині комплексних чисел рівняння $x^2 + 1 = 0$ має розв'язки, одним з яких є комплексне число $x = i$.

Кожне комплексне число $z = (x, y)$ можна подати у вигляді

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).$$

Враховуючи те, що $(x, 0) = x$, $(y, 0) = y$, $(0, 1) = i$, отримуємо

$$z = x + iy. \tag{6.4}$$

Означення 6.4. Запис комплексного числа z у вигляді (6.4) називають *алгебраїчною формою* комплексного числа. Дійсне число x називають *дійсною частиною* комплексного числа (6.4) і позначають $x = \operatorname{Re} z$. Дійсне число y називають *уявною частиною* комплексного числа (6.4) і позначають $y = \operatorname{Im} z$.

Скористаємось алгебраїчним записом комплексного числа z в операціях додавання і множення комплексних чисел. Формули (6.1), (6.2) набувають вигляду

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2), \tag{6.1$'$}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{6.2$'$}$$

Зауважимо, що формули (6.1$'$), (6.2$'$) зовсім не обов'язково запам'ятовувати, оскільки їх можна отримати автоматично, якщо формально виконати додавання і множення двочленів $x_1 + iy_1$ і $x_2 + iy_2$ за звичайними правилами дій над многочленами, замінюючи за потреби згідно (6.4) i^2 на -1.

Приклад 6.1. Виконаємо множення:

$$z_1z_2 = (2 - 3i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 9i - 12i^2 = 6 - i - 12(-1) = 18 - i.$$

Наслідком співвідношень (6.1$'$) та (6.2$'$) є правила виконання відповідних обернених операцій – віднімання та ділення:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2), \tag{6.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{6.6}$$

Означення 6.5. Нехай $z = x + iy$. Число $x - iy$, яке відрізняється від z лише знаком уявної частини, називається *спряженим* до числа z і позначається $\bar{z}$.

За означенням маємо

$$\bar{z} = x - iy. \tag{6.7}$$

Для будь-якого комплексного числа $z = x + iy$ маємо

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (x + iy) + (x - iy) = 2x, \\ z \cdot \bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Нехай потрібно виконати ділення двох комплексних чисел $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$). Використовувати для цього формулу (6.6) досить незручно, оскільки вона є громіздкою і важко запам'ятовується. Тому простіше помножити чисельник і знаменник дробу на комплексне число, спряжене зі знаменником (після чого слід скористатись співвідношенням (6.8)):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}. \tag{6.9}$$

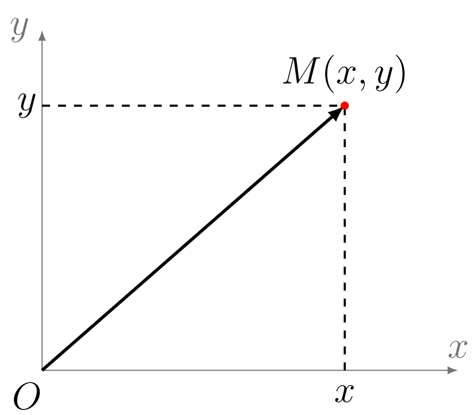
Приклад 6.2. Виконаємо ділення комплексних чисел за правилом (6.9):

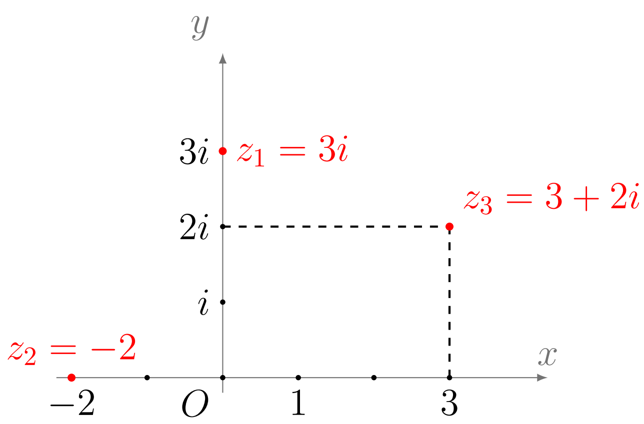
$$\frac{2+i}{3+2i} = \frac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i+3i-2i^2}{9-4i^2} = \frac{6-i+2}{9+4} = \frac{8-i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i.$$

6.3 Геометрична форма комплексного числа

Пригадаємо як ми в школі встановлювали взаємно однозначну відповідність між усіма дійсними числами та точками числової прямої, що дозволяло нам зображувати дійсні числа точками числової осі.

Комплексні числа визначені нами як впорядковані пари дійсних чисел. Тому кожному комплексному числу $(x, y) = x + iy$ можна поставити у відповідність точку $M(x, y)$ і навпаки, кожній точці $M(x, y)$ площини – комплексне число $(x, y) = x + iy$.





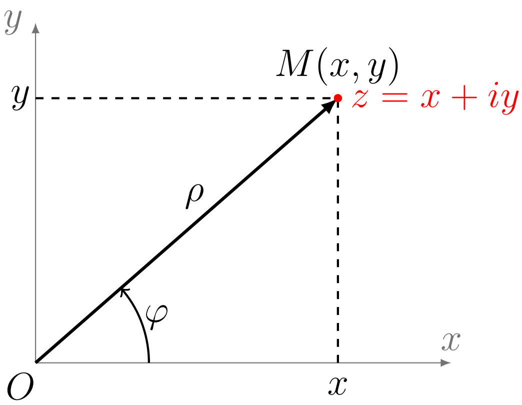
Встановлена у такий спосіб відповідність є взаємно однозначною і дозволяє розглядати комплексні числа як точки координатної площини, яку ще називають *комплексною площиною*. Вісь абсцис при цьому називають *дійсною віссю*. На ній розташовані точки, яким відповідають числа вигляду $(x, 0) = x$. Вісь ординат називають *уявною віссю*. На ній розташовані точки, яким відповідають уявні числа $(0, y) = iy$. Отже, комплексна площина – це площина C комплексних чисел, що розглядаються одночасно як числа і як точки координатної площини.

Приклад 6.3. Зобразимо точками комплексної площини числа $z_1 = 3i$, $z_2 = -2$, $z_3 = 3 + 2i$.

Числу $z_1 = 3i$ відповідає точка M_1 площини з координатами $(0, 3)$; числу $z_2 = -2$ – точка $M_2(-2, 0)$; числу $z_3 = 3 + 2i$ – точка $M_3(3, 2)$. Зобразивши відповідні точки в системі координат, моємо результат наведений на рисунку.

6.4 Тригонометрична форма комплексного числа

Нехай на площині задано прямокутну систему координат. У цій системі довільному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає точка M з координатами x, y, або радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ з тими ж координатами.



Означення 6.6. Довжину вектора $\overrightarrow{OM}$ називають *модулем комплексного числа* z і позначають $|z|$. *Аргументом комплексного числа* z $(z \neq 0)$ називають величину кута φ між додатним напрямком дійсної осі і вектором $\overrightarrow{OM}$, причому величину кута вважають додатною, якщо відлік цього кута проводиться проти руху стрілки годинника і від'ємною, якщо – за рухом стрілки годинника. Для числа $z = 0$ аргумент не визначається.

Аргумент комплексного числа визначається неоднозначно. Якщо при відкладанні кута φ_0 зробити декілька повних обертів у додатному чи від'ємному напрямку, то отримаємо значення аргументу $\varphi_0 + 2\pi k$, де k – довільне ціле число.

Тому всі значення аргументу визначаються формулою

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \tag{6.10}$$

де k – довільне ціле число. Отже, аргумент кожного комплексного числа, що не дорівнює нулю, має нескінченну множину значень, пов'язаних між собою умовою: будь-які два значення аргументу відрізняються на число кратне 2π.

Неоднозначності аргументу можна уникнути за допомогою додаткових умов, які виокремлюють одне значення з усіх можливих, наприклад $\varphi_0 \in [0; 2\pi)$.

Означення 6.7. Значення аргументу φ_0 комплексного числа z, взяте з проміжку $[0; 2\pi)$, назвемо *головним значенням аргументу* комплексного числа z і позначимо $\varphi_0 = \arg z$.

Для множини всіх значень аргументу комплексного числа z введемо позначення $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Тоді формулу (6.10) можна записати у вигляді

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in Z. \tag{6.11}$$

Нижче, говорячи про аргумент комплексного числа, будемо мати на увазі одне з його можливих значень.

Для модуля $|z|$ комплексного числа z будемо вживати позначення $|z| = \rho$. Тоді за теоремою Піфагора (див. рисунок) маємо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{6.12}$$

З наведеного вище рисунка, отримуємо формули, що виражають дійсну і уявну частини комплексного числа через його модуль і аргумент:

$$x = \rho \cos \varphi, \ \ y = \rho \sin \varphi, \tag{6.13}$$

використовуючи які комплексне число z можна подати у вигляді

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \tag{6.14}$$

Означення 6.8. Права частина рівності (6.14) називається *тригонометричною формою* запису комплексного числа.

Заданням модуля і аргументу комплексне число визначається однозначно. Зазначимо, що для числа $z = 0$ аргумент не визначається. У цьому і тільки у цьому випадку число задається лише своїм модулем (рівним нулю).

Для знаходження всіх значень аргументу комплексного числа z потрібно знайти всі числа φ, які задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{6.15}$$

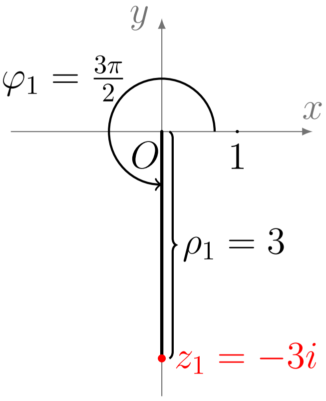
Приклад 6.4. Знайдемо аргумент комплексного числа $z = -1 + i$.

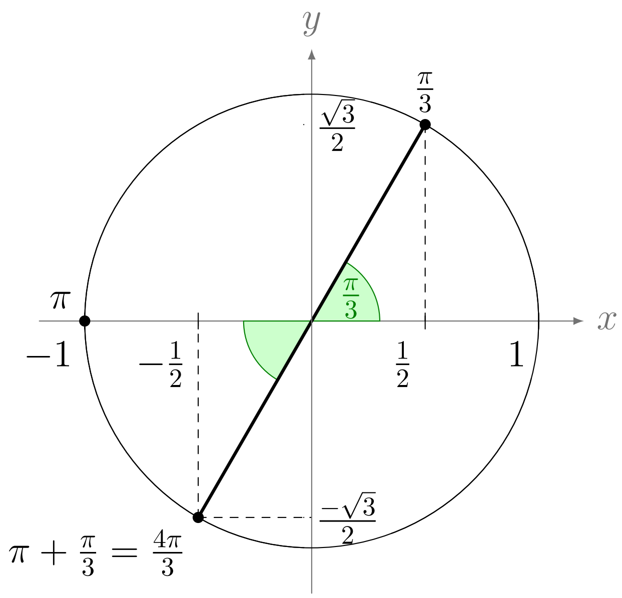
Оскільки

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

то число φ лежить у другій чверті. Одним із розв'язків цього рівняння, який лежить саме у другій чверті, є число $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Приклад 6.5. Запишемо числа $z_1 = -3i$ та $z_2 = -2-2\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі.





Зобразимо число z_1 точкою комплексної площини, звідки з геометричних міркувань одержимо $\rho_1 = 3$, $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$. Тому

$$z_1 = -3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Оскільки

$$\rho_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4,$$

$$\begin{cases} \cos\varphi_2 = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2}, \\ \sin\varphi_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

то один із аргументів числа z_2 дорівнює $\varphi_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Тому

$$z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Піднесення до степеня і добування кореня

Тригонометричною формою комплексного числа зручно користуватися при виконанні операцій множення і ділення комплексних чисел. Перед тим, як перейти до розгляду цих операцій, зауважимо, що два комплексних числа

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \ \text{ і } \ z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли модулі цих чисел рівні, а аргументи відрізняються на $2\pi k,\ k \in Z$, тобто коли

$$\rho_1 = \rho_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Розглянемо комплексні числа

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \ \text{ і } \ z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

З означень дій над комплексними числами отримуємо:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_1) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_1)); \tag{6.16}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_1)). \tag{6.17}$$

Доведемо формулу (6.16):

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right] =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_1) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_1)).$$

Нами доведено таку теорему.

Теорема 6.1. Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів цих чисел, а аргумент добутку – сумі аргументів співмножників.

Аналогічно попередній доводиться наступна теорема, яку виражає формула (6.17).

Теорема 6.2. Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів цих чисел, а аргумент частки – різниці аргументів діленого і дільника.

Теорема 6.3. (формула Муавра). При піднесенні комплексного числа до степеня з натуральним показником його модуль підноситься до степеня з тим же показником, а аргумент множиться на показник степеня, тобто

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{6.18}$$

Теорема 6.3 є наслідком теореми 6.1 і доводиться методом математичної індукції.

Приклад 6.6. Нехай задано комплексні числа

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ та } z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Знайдемо z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^4$.

За формулою (6.16) маємо

$$z_1z_2 = 2\cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

За формулою (6.17) одержимо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Скористаємось формулою Муавра (6.18) щоб одержати

$$(z_1)^4 = 2^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Перейдемо до операції добування кореня. Нехай задано два числа: комплексне z і натуральне n.

Означення 6.9. Комплексне число w називається коренем степеня n з числа z (позначається $w = \sqrt[n]{z}$), якщо

$$w^n = z. \tag{6.19}$$

Підставляючи

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

у формулу (6.19), з урахуванням формули Муавра одержимо:

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексні числа дорівнюють одне одному тоді і тільки тоді, коли модулі їх рівні, а аргументи відрізняються на $2\pi k,\ k \in Z$. Тому

$$r = \sqrt[n]{\rho},\ \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \tag{6.20}$$

Надаючи числу k у (6.20) значень $0, 1, 2, ..., n-1$, одержимо n різних коренів з числа z:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}. \tag{6.21}$$

Приклад 6.7. Знайдемо всі значення $\sqrt[3]{-64}$.

Зобразимо спочатку число $z = -64$ точкою комплексної площини і використовуючи геометричні міркування одержимо

$$|z| = 64,\ \arg z = \pi.$$

Запишемо комплексне число z у тригонометричній формі: $z = 64(cos\pi + i\sin\pi)$. За формулою (6.21) маємо:

$$w_k = \sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right),\ k = 0, 1, 2.$$

Звідси

$$w_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$w_1 = 4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right),$$
$$w_2 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

6.5 Показникова форма комплексного числа

У фізиці, електротехніці та інших дисциплінах досить часто замість тригонометричної форми запису комплексного числа використовують показникову форму запису.

Формула Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

дозволяє перейти від тригонометричної форми (6.14) до *показникової форми* комплексного числа z:

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Наведемо формули для дій з комплексними числами $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, $z = \rho e^{i\varphi}$ в показниковій формі:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$
$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}, n \in N;$$
$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = \overline{0, n-1}.$$

З останніх формул робимо висновок, що функція $e^{i\varphi}$ має звичайні властивості показникової функції, так ніби число i є дійсним, що значно полегшує проведення дій множення, ділення та піднесення до натурального степеня.

Приклад 6.8. Запишемо у показниковій формі комплексне число $z = -1 - i\sqrt{3}$. Оскільки $|z| = 2$ і $\arg z = \frac{4\pi}{3}$, то $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Запитання для самоперевірки до лекції 6

1. Що називають комплексним числом?
2. Що називають алгебраїчною формою комплексного числа?
3. Що називають тригонометричною формою комплексного числа?
4. Що називають показниковою формою комплексного числа?
5. Що називають модулем комплексного числа?
6. Що називають аргументом комплексного числа?
7. Які комплексні числа називають рівними?
8. Яка умова рівності чисел в тригонометричній формі?
9. Що називають уявною одиницею?
10. Яке число називають комплексно спряженим до комплексного числа?
11. Яке правило множення чисел в алгебраїчній формі?
12. Яке правило ділення чисел в алгебраїчній формі?
13. Яке правило множення чисел в тригонометричній формі?
14. Яке правило ділення чисел в тригонометричній формі?
15. Яке правило піднесення до натурального степеня комплексного числа в тригонометричній формі?
16. Яке правило добування кореня з комплексного числа в тригонометричній формі?

Частина III

Аналітична геометрія на площині та в просторі

7 Пряма на площині. Криві другого порядку

7.1 Рівняння лінії (кривої) на площині

Лінією (*кривою*) на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які мають певну спільну властивість. Нехай на площині введена прямокутна система координат Oxy.

Означення 7.1. *Рівнянням кривої* γ на площині називається рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$, яке задовольняють всі точки $M(x, y)$ кривої γ, і не задовольняє жодна точка, що не належать цій кривій.

Якщо у заданій системі координат рівняння кривої відоме, то це дає можливість досліджувати геометричні властивості кривої та її форму. Для того, щоб з'ясувати, чи лежить точка $A(x_0, y_0)$ на кривій, достатньо підставити координати цієї точки у рівняння кривої $F(x, y) = 0$. Якщо при цьому рівняння перетвориться на тотожність, тобто $F(x_0, y_0) = 0$, то точка A належить кривій, інакше ($F(x_0, y_0) \neq 0$) точка A не належить кривій.

Криву на площині можна також задавати *параметрично* – за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in T. \end{cases} \tag{7.1}$$

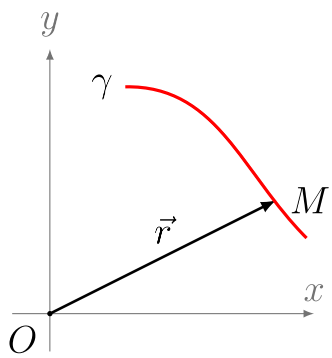
де x та y – координати довільної точки $M(x, y)$ кривої, а t – змінна, що називається параметром і пробігає множину значень T. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y)$ кривої на площині Oxy. Для того, щоб перейти від параметричного задання кривої до рівняння типу $F(x, y) = 0$, потрібно з якогось із двох рівнянь виключити змінну t. Проте, це можна зробити далеко не завжди.

Приклад 7.1. Нехай на площині Oxy задано криву параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t - 1. \end{cases}$$

Наприклад, значенню параметра $t = 1$ відповідає точка кривої $(1, 0)$. Перейдемо від параметричного задання кривої до рівняння $F(x, y) = 0$. Виразимо з другого рівняння $t = y+1$ і підставимо цей вираз замість t у перше рівняння: $x = (y + 1)^3$. Таким чином, рівняння лінії набуде вигляду $x - (y + 1)^2 = 0$.

Лінію γ на площині можна задати також *векторним рівнянням* $\vec{r} = r(\vec{t})$, де t – скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\vec{r}_0 = r(\vec{t_0})$. При зміні значення параметра t, кінець радіус-вектора буде описувати на площині криву.



Векторному рівнянню лінії $\vec{r} = r(\vec{t})$ у системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння (7.1), тобто рівняння проекцій на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне рівняння кривої та її параметричні рівняння мають механічний зміст. Якщо точка рухається по площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху, а крива – траєкторією точки. При цьому параметр t – це час.

Отже, кожній кривій на площині відповідає рівняння $F(x, y) = 0$, і навпаки, кожному рівнянню $F(x, y) = 0$ відповідає якась крива на площині, властивості якої визначаються її рівнянням. В аналітичній геометрії на площині виникають дві основні задачі:

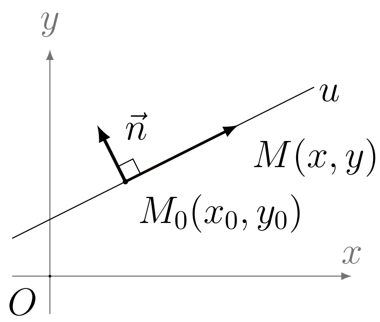
1) знаючи геометричні властивості кривої, знайти її рівняння;

2) за відомим рівнянням кривої $F(x, y) = 0$ вивчити її властивості та форму.

7.2 Пряма на площині. Різні види її рівняння

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x і y. Розглянемо різні види її рівняння.

Загальне рівняння прямої. Знайдемо рівняння прямої u, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\vec{n} = (A, B)$. Для цього розглянемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.



Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{n}$ перепендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\vec{n} = (A, B)$. Покладаючи у цьому рівнянні $C = -Ax_0 - By_0$, отримаємо рівняння

$$Ax + By + C = 0, \tag{7.2}$$

яке називається *загальним рівнянням прямої*. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ називається *нормальним вектором* прямої.

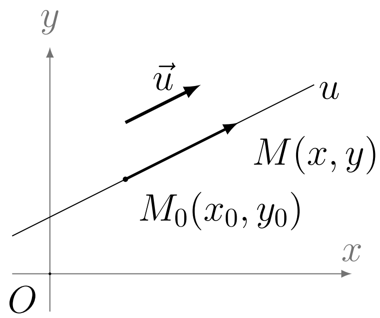
Від загального рівняння легко перейти до відомого зі школи *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b.$$

Дійсно, якщо $B \neq 0$, то рівняння (7.2) можна переписати наступним чином: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. А це рівняння є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{A}{B}$. Якщо ж $B = 0$, то рівняння (7.2) набуває вигляду: $Ax + C = 0$, причому $A \neq 0$, звідки $x = -\frac{C}{A}$. Останнє рівняння є рівнянням прямої, що паралельна осі Oy і проходить через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

Зокрема, якщо $A = 0$, то $y = -\frac{C}{B}$, тобто пряма паралельна осі Ox. Якщо $C = 0$, то $Ax + By = 0$, тобто пряма проходить через початок координат $O(0, 0)$.

Канонічне рівняння прямої. Нехай відомо, що пряма u проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{u} = (l, m)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.



Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{u}$. Звідси впливає, що координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{u}$ пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{7.3}$$

Ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{u}$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*, а вектор $\vec{u} = (l, m)$ називається *напрямним* вектором прямої.

Розглянемо два частинних випадки. Нехай $l = 0$. Тоді вектор $\vec{u}$ паралельний осі Oy, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $x = x_0$. Нехай тепер $m = 0$. Тоді вектор $\vec{u}$ паралельний осі Ox, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $y = y_0$.

Параметричне рівняння прямої. З канонічного рівняння (7.3) випливає, що

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x та y, отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \end{cases} \tag{7.4}$$

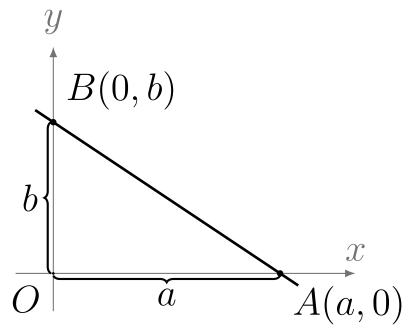
яке називається *параметричним рівнянням прямої.*

Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Нехай пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, який є напрямним вектором прямої. Тому з рівняння (7.3) одержимо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{7.5}$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Рівняння прямої "у відрізках". Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $A(a, 0)$, а вісь Oy – у точці $B(0, b)$.



Тоді рівняння (7.5) набуде вигляду:

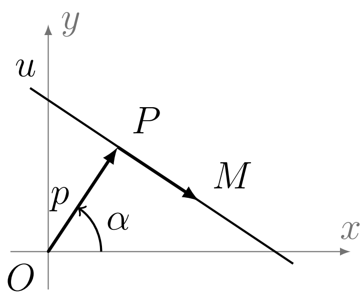
$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0},$$

тобто

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{7.6}$$

Рівняння (7.6) називається *рівнянням прямої "у відрізках"*, оскільки числа a та b вказують орієнтовані довжини відрізків, які пряма відтинає від координатних осей.

Нормальне рівняння прямої. Розглянемо деяку пряму u на площині. Нехай кут, який утворює перпендикуляр, опущений з початку координат $O(0,0)$ на цю пряму, дорівнює α, а довжина цього перпендукуляра p $(p \geq 0)$, тобто задано відстань від початку координат до прямої. Ці два параметри однозначно визначають розташування прямої на площині. Знайдемо її рівняння.



Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки $O(0,0)$ на пряму. Тоді $\overrightarrow{OP} = (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$ і точка P має координати $P(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$. Розглянемо довільну точку $M(x,y)$ на прямій і знайдемо координати вектора $\overrightarrow{PM} = (x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha)$. Вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OP}$, звідки випливає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OP} = (x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\sin\alpha)\sin\alpha = 0$. Таким чином, отримали рівняння

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{7.7}$$

яке називається *нормальним рівнянням прямої.*

Від загального рівняння прямої (7.2) можна перейти до її нормального рівняння (7.7) множенням рівняння $Ax + By + C = 0$ на, так званий, нормуючий множник λ: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C < 0$, або ж $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C > 0$. Тоді рівняння нашої прямої набуває вигляду:

$$\pm\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Приклад 7.2. Зведемо загальне рівняння прямої $4x - 3y + 15 = 0$ до нормального рівняння.

Оскільки $C = 15 > 0$, то нормуючим множником буде число

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Помножимо загальне рівняння $4x - 3y + 15 = 0$ на нормуючий множник та отримаємо шукане рівняння: $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0$. Звыдки, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, а відстань від початку координат до прямої $p = 3$.

7.3 Основні задачі для прямої на площині

Кут між прямими. Нехай прямі u_1 та u_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ відповідно. Знайдемо кут φ між прямими u_1 та u_2. Кутом між прямими u_1 та u_2 називають кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ (визначається з точністю до суміжного). Тому

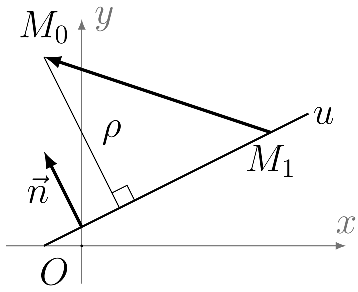
$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Оскільки косинуси суміжних кутів відрізняються лише знаком, для отримання гострого кута між прямими слід взяти модуль скалярного добутку нормальних векторів в чисельнику цієї формули.

Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Розглянемо умови паралельності та перпендикулярності прямих u_1 та u_2, заданих загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ відповідно. Якщо прямі u_1 та u_2 паралельні, то їх нормальні вектори $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ колінеарні, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Якщо прямі u_1 та u_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ також перпендикулярні. Звідси випливає, що їх скалярний добуток обертається в нуль, тобто $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Відстань від точки до прямої. Нехай пряма u задана своїм загальним рівнянням $Ax+By+C = 0$ і задана деяка точка площини $M_0(x_0, y_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої u.



Відстань ρ від точки M_0 до прямої u дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1)$ – довільна точка прямої u, на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$ прямої u. Таким чином,

$$\rho = |np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 + By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

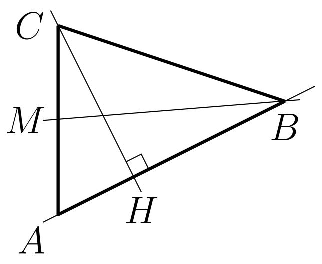
Але оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій u, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$ або $-Ax_1 - By_1 = C$. Тому

$$\rho = \rho(M_0, u) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Остання формула є формулою відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої u $Ax + By + C = 0$.

Приклад 7.3. Задано координати вершин трикутника $A(3; 2)$, $B(2; -2)$, $C(1; 4)$. Запишемо рівняння сторони (AB), рівняння висоти (CH), рівняння медіани (BM). Знайдемо довжину висоти CH (через відстань від точки до прямої).

Складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона трикутника AB, як рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно вектору $\overrightarrow{AB} = (2 - 3, -2 - 2) = (-1, -4)$.



Використовуючи канонічне рівняння прямої, одержимо $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{-4}$, звідки $(-4)(x-3) = (-1)(y-2)$ або $4x - y - 10 = 0$.

(AB): $4x - y - 10 = 0$.

Тепер складемо рівняння прямої, яка проходить через висоту CH, як такої, що проходить через точку C перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB} = (-1, -4)$. Тому шукане рівняння висоти $(-1)(x-1) + (-4)(y-4)$ або $x + 4y - 17 = 0$.

$(CH) : x + 4y - 17 = 0$.

Обчислимо довжину висоти CH за формулою відстані від точки до прямої. Для чого спочатку внормуємо рівняння сторони (AB): $\dfrac{4x - y - 10}{\sqrt{17}} = 0$. Звідки

$$|CH| = \rho(C, (AB)) = \frac{|4 \cdot 1 - 4 - 10|}{\sqrt{17}} = \frac{|-10|}{\sqrt{17}} = \frac{10\sqrt{17}}{17}.$$

Для того, щоб скласти рівняння прямої, на якій лежить медіана BM трикутника, знайдемо координати точки M за формулами середини відрізка AC:

$$x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \; y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Тому рівняння медіани (як рівняння прямої, що проходить через дві точки C та M):

$\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-(-2)}{2-(-2)}$, звідки $4(x-2) = 1(y+4)$ або $4x - y - 12 = 0$.

(BM): $4x - y - 12 = 0$.

7.4 Загальне рівняння кривої другого порядку

Означення 7.2. *Кривою другого порядку* на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які в деякій декартовій системі координат Oxy задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{7.8}$$

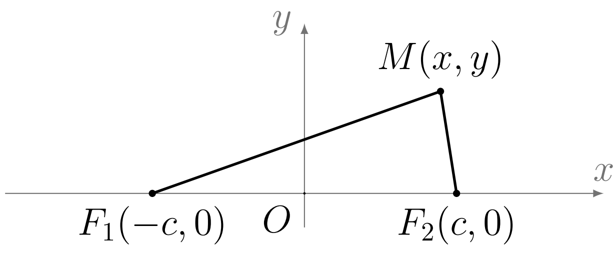
де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому принаймні одне з чисел A, B, C відмінне від нуля.

Рівняння (7.8) залежно від значень коефіцієнтів визначає дві паралельні прямі, дві прямі, які перетинаються, одну пряму, точку, порожню множину або задає на площині коло, еліпс, гіперболу чи параболу.

7.5 Еліпс, його канонічне рівняння

Означення 7.3. *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок площини, що називаються *фокусами*, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса. Зафіксуємо дві точки площини — фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c – відоме додатне дійсне число. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса, та сума відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів дорівнює $2a$, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами* точки M.



Оскільки $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, то рівняння кривої набуває вигляду

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

звідки після спрощень

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

З означенням еліпса відомо, що $a > c$. Тому, покладаючи $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо рівняння

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

звідки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.9}$$

Рівняння (7.9) називається *канонічним рівнянням еліпса.* Зауважимо, що у випадку, коли $a = b$, рівняння (7.9) описує на площині коло з центром у початку координат та радіуса $R = a$. Отже, довільна точка, що належить еліпсу, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (7.9).

У деяких задачах від канонічного рівняння еліпса зручно переходити до його параметричного рівняння:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \tag{7.10}$$

Форма та характеристики еліпса. Дослідимо за рівнянням (7.9) форму та розташування еліпса.

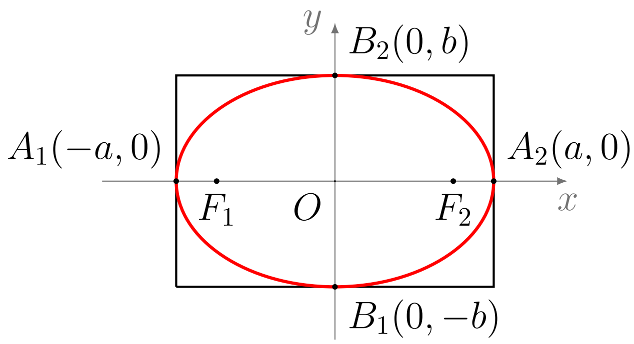
1. Змінні x та y входять у рівняння (7.9) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то і точки з координатами $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ також належать еліпсу. Отже, фігура симетрична відносно відповідно осей Ox та Oy, а також точки $O(0, 0)$, яку називають *центром еліпса.*

2. Знайдемо точки перетину еліпса з осями координат. Підставивши у рівняння (7.9) $y = 0$, отримаємо, що вісь Ox еліпс перетинає у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо дві точки $B_1(0, b)$, $B_1(0, -b)$, в яких еліпс перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називають *вершинами* еліпса.

Відрізки A_1A_2 та B_1B_2, а також їх довжини $2a$ і $2b$ називають відповідно *великою* та *малою осями* еліпса. Числа a і b називають відповідно *великою* та *малою півосями* еліпса.

3. З рівняння (7.9) також випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, звідки $-a \le x \le a$ і $-b \le y \le b$. Тобто всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, утвореного прямими $x = \pm a$ і $y = \pm b$.

4. Візьмемо на еліпсі точку (x, y) у першій чверті. В цій чверті $x \ge 0$, $y \ge 0$, а тому $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le x \le a$. Оскільки перша та друга похідні функції y від'ємні при $0 < x < a$, то функція спадає і її графік опуклий вгору при $0 < x < a$. За встановленими характеристиками побудуємо частину еліпса, яка міститься у першій чверті, як графік функції y і скористаємося симетрією. Таким чином, еліпс є замкненою кривою:



5. Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі називається *ексцентриситетом* еліпса і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

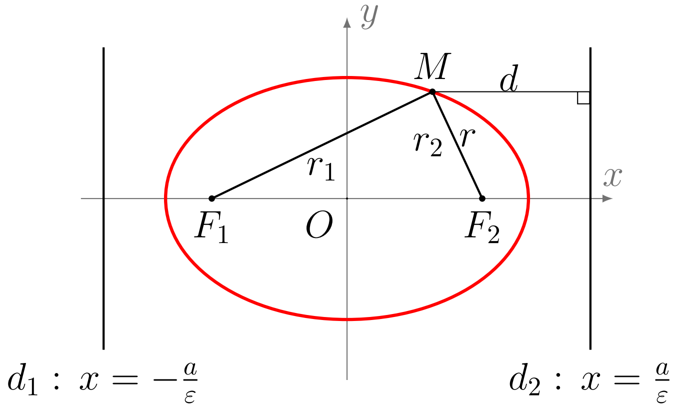
Ексцентриситет є мірою сплюснутості еліпса. Справді, перепишемо формулу, якою визначається ексцентриситет, наступним чином:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Отже, коли b близьке до a, ексцентриситет мало відрізняється від нуля (еліпс мало відрізняється від кола), а коли b близьке до нуля при фіксованому a, ексцентриситет наближається до 1 (еліпс сильно сплюснутий). Тобто для еліпса $0 < \varepsilon < 1$.

6. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка еліпса. Розглянемо фокальні радіуси $MF_1 = r_1$ та $MF_2 = r_2$. Тоді, згідно означення, $r_1 + r_2 = 2a$ і справедливі рівності:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$



Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпса. Виконується наступна властивість:

Якщо r – відстань від довільної точки еліпса до одного з двох фокусів, а d – відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету.

7. Якщо центр еліпса знаходиться у точці $O_1(x_0, y_0)$, то його канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

При цьому фокуси знаходяться у точках $F_1(x_0 - c, y_0)$ і $F_2(x_0 + c, y_0)$, а директриси задаються рівняннями: $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

8. Оптична властивість еліпса: всі промені, що виходять із одного з фокусів еліпса, після відбиття від еліпса пройдуть через інший його фокус.

9. Якщо $a = b = R$, то рівняння

$$\frac{(x - x_0)^2}{R^2} + \frac{(y - y_0)^2}{R^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

задає на площині коло радіуса R з центром в точці $O_1(x_0, y_0)$.

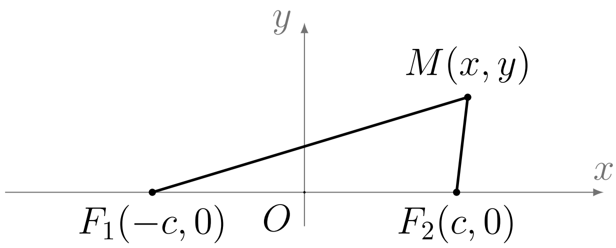
Зі шкільного курсу геометрії відомо, що рівняння кола безпосередньо отримується з означення кола як геометричного місця точок площини, віддалених від фіксованої точки площини, яка називається центром кола, на однакову відстань R.

7.6 Гіпербола, її канонічне рівняння

Означення 7.4. *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок площини, що називаються *фокусами*, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи. Зафіксуємо дві точки площини – фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c – відоме додатне дійсне число.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Модуль різниці відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів позначимо $2a$. Тоді $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$. Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами* точки M.



Таким чином, $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$. Враховуючи що $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, рівняння кривої набуває вигляду

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Спростивши це рівняння, отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (7.11)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Рівняння (7.11) називається *канонічним рівнянням гіперболи.* Отже, координати довільної точки, що належить гіперболі, у деякій декартовій системі координат задовольняють рівняння (7.11).

Форма та характеристики гіперболи. Дослідимо форму та розташування гіперболи за її канонічним рівнянням (7.11).

1. Змінні x та y входять у рівняння (7.11) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить гіперболі, то і точки $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ також належать гіперболі. Отже, фігура симетрична відповідно відносно осей Ox та Oy, а також точки $O(0, 0)$, яку називають *центром гіперболи.*

2. Знайдемо точки перетину гіперболи з осями координат. Підставляючи у рівняння (7.11) $y = 0$, отримаємо, що гіпербола перетинає вісь Ox у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо рівняння $y^2 = -b^2$, яке не має розв'язків. Отже, гіпербола не перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2 називаються *вершинами* гіперболи. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *дійсною віссю* гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ – *уявною віссю* гіперболи. Числа a і b називаються відповідно *дійсною* та *уявною півосями* гіперболи. Прямокутник, утворений прямими $x = \pm a$ і $y = \pm b$ називається *головним (координатним) прямокутником* гіперболи.

3. З рівняння (7.11) випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, тобто $|x| \geq a$. Це означає, що всі точки гіперболи розташовані справа від прямої $x = a$ (права гілка гіперболи) і зліва від прямої $x = -a$ (ліва гілка гіперболи).

4. Візьмемо на гіперболі точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Оскільки $y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}} > 0$ при $x > a$, то функція монотонно зростає при $x > a$. Аналогічно, оскільки $y'' = -\frac{ab}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} < 0$ при $x > a$, то графік функції опуклий вгору при $x > a$.

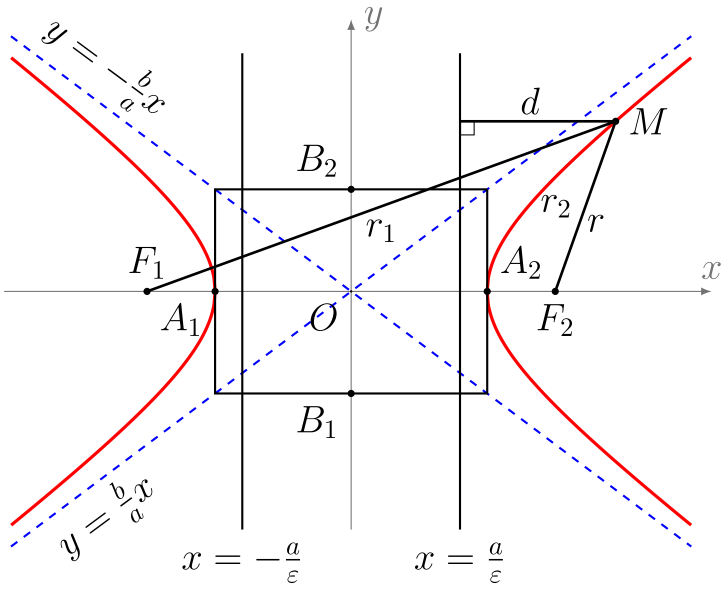
5. Асимптоти гіперболи. Гіпербола має дві асимптоти. Знайдемо асимптоту до гілки гіперболи, що знаходиться у першій чверті. Розглянемо точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$. В цьому випадку $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Тоді, як відомо з математичного аналізу, рівняння похилої асимптоти матиме вигляд $y = Kx + B$, де

$$K = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a},$$

$$B = \lim_{x\to\infty} (y - Kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) = 0.$$

Отже, пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою функції $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Тому, з міркувань симетрії, асимптотами гіперболи є прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$. Зрозуміло, що асимптоти гіперболи містять діагоналі головного прямокутника гіперболи.

За знайденими характеристиками побудуємо гілку гіперболи, що знаходиться у першій чверті, та скористаємося симетрією:



6. Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі c називається *ексцентриситетом* гіперболи і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$ і характеризує її форму. Дійсно, оскільки

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

то чим меншим є відношення півосей гіперболи $\frac{b}{a}$, тим меншим є ексцентриситет гіперболи, і тим більше розтягнутий її головний прямокутник.

При $b = a$ гіпербола називається *рівнобічною* і описується рівнянням $x^2 - y^2 = a^2$. Головним прямокутником рівнобічної гіперболи є квадрат, а її ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

7. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Розглянемо її фокальні радіуси $MF_1 = r_1$ та $MF_2 = r_2$. Для точок правої гілки гіперболи вони мають вигляд:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x.$$

Для точок лівої гілки гіперболи фокальні радіуси задаються формулами

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то її директриси розташовані між початком координат та вершинами A_1 і A_2. Виконується наступна властивість:

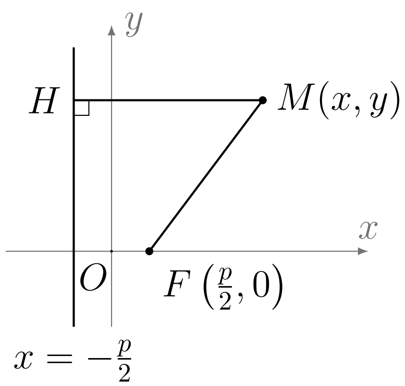
Якщо r – відстань від довільної точки гіперболи до одного з двох фокусів, а d – відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету гіперболи.

8. Оптична властивість гіперболи: будь-який промінь, що виходить із одного з фокусів, після відбиття від гіперболи начебто виходить із іншого фокуса.

7.7 Парабола, її канонічне рівняння

Означення 7.5. *Параболою* називається геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від фіксованої точки площини, що називається *фокусом*, та фіксованої прямої, яка називається *директрисою*.

Відстань від фокуса до директриси параболи називається *параметром параболи* і позначається p ($p > 0$).



Зафіксуємо на площині фокус F та пряму d – директрису параболи. Виберемо на площині декаротову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно до директриси d у напрямку від директриси до фокуса. Початок координат помістимо у середині перпендикуляра, опущеного з фокуса на директрису. У вибраній системі координат $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса d: $x = -\frac{p}{2}$.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи. Знайдемо відстань $|FM|$:

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Відрізок $|FM|$ називається *фокальним радіусом* точки M. Позначимо через H основу перпендикуляра проведеного з точки M до директриси. Тоді

$$|MH| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Оскільки за означенням $|MF| = |MH|$, то

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Звідки після спрощень отримаємо *канонічне рівняння* параболи:

$$y^2 = 2px.$$

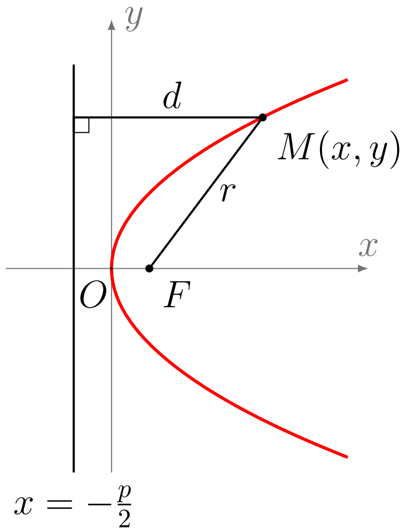
Форма та характеристики параболи. Дослідимо за канонічним рівнянням форму та розташування параболи.

1. У рівняння $y^2 = 2px$ змінна у входить у парному степені, звідки випливає, що парабола симетрична відносно осі Ox. Вісь Ox є віссю симетрії параболи.

2. Оскільки $p > 0$, то $x > 0$, звідки випливає, що парабола розташована справа від осі Oy.

3. При $x = 0$ маємо $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Точка $O(0, 0)$ називається *вершиною* параболи.

4. При збільшенні значень змінної x модуль y також зростає. Зобразимо параболу на рисунку:



5. Оптична властивість параболи: будь-який промінь, який виходить із фокуса, відбиваючись від параболи спрямовується паралельно до її осі.

6. З означення параболи випливає наступна властивість:

Якщо r – відстань від довільної точки M параболи до фокуса, а d – відстань від цієї ж точки до директриси, то відношення $\frac{r}{d} = 1$, тобто є величиною сталою, рівною ексцентриситету параболи, який за означенням покладається рівним 1.

Запитання для самоперевірки до лекції 7

1. Який вигляд має загальне рівняння прямої? Яким є зміст коефіцієнтів цього рівняння?
2. Що таке нормальний вектор прямої?
3. Який вигляд має канонічне і параметричне рівняння прямої? Яким є зміст коефіцієнтів цього рівняння?
4. Що таке напрямний вектор прямої?
5. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
6. Який вигляд має рівняння прямої «у відрізках»? Який геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?
7. Яке рівняння прямої називають рівнянням із кутовим коефіцієнтом? Який геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?
8. Як знайти кут між прямими?
9. Як записати умови паралельності й перпендикулярності двох прямих?
10. Що називають еліпсом?
11. Яке канонічне рівняння еліпса та основні його характеристики?
12. Що називають гіперболою? Яке канонічне рівняння гіперболи та основні характеристики?
13. Що називають параболою?
14. Яке канонічне рівняння параболи та основні характеристики?

8 Рівняння поверхні і лінії у просторі. Площина в просторі. Пряма в просторі

8.1 Рівняння поверхні і лінії у просторі

Рівняння поверхні у просторі

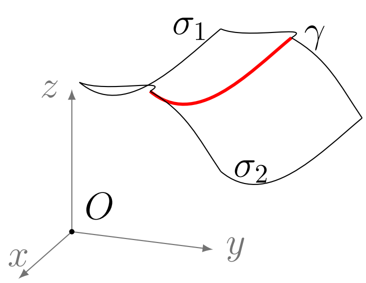
Зазвичай поверхні у просторі, розглядають як геометричне місце точок, що задовольняють деякій умові. Наприклад, сфера радіуса R з цетром в точці O_1 є геометричним місцем всіх точок простору, які знаходяться від точки O_1 на відстані R.

Прямокутна система координат $Oxyz$ дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і трійками чисел x, y, z – їх координатами. Властивість, спільну для всіх точок поверхні, можна записати у вигляді рівняння, яке зв'язує координати всіх точок поверхні.

Означення 8.1. *Рівнянням поверхні* σ в прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома невідомими x, y, z, якому задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні σ, і не задовольняють координати точок, що не лежать на цій поверхні.

Рівняння поверхні дозволяє вивчення геометричних властивостей поверхонь замінити дослідженням її рівняння. Наприклад, точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежить на даній поверхні тоді і тільки тоді, коли координати точки M_1 задовольняють рівняння цієї поверхні.

Рівняння лінії (кривої) у просторі. Лінію у просторі можна розглядати, як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, спільних для двох поверхонь.

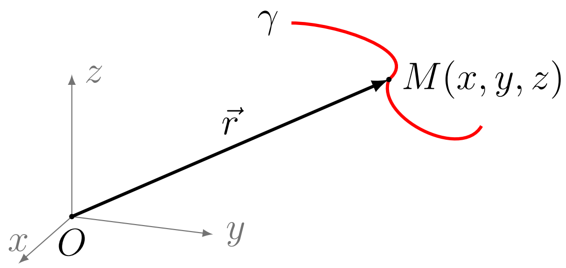


Якщо $F_1(x,y,z)=0$ і $F_2(x,y,z)=0$ – рівняння двох поверхонь σ_1 та σ_2 відповідно, які визначають лінію γ, то координати точок цієї лінії задовольняють системі двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Ці рівняння називають *рівнянням лінії* у просторі. Наприклад, $\begin{cases} y=0, \\ z=0 \end{cases}$ – рівняння осі Ox.

Лінію у просторі можна задавати також векторним рівнянням $\vec{r}=r(\vec{t})$, де t – скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\vec{r}_0=r(\vec{t}_0)$. При зміні значення параметра t, кінець радіус-вектора описує криву γ у просторі.



Криву у просторі можна задавати також за допомогою трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t),\ t\in T. \end{cases} \tag{8.1}$$

де x, y та z – координати довільної точки $M(x,y,z)$ кривої, а t – змінна, що називається параметром і пробігає множину значень T. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x,y,z)$ кривої у просторі $Oxyz$. Таке задання кривої у просторі називається *параметричним.*

Отже, поверхню у просторі можна задати аналітично (рівнянням) або геометрично (властивістю, якій задовольняють всі точки поверхні). Таким чином, виникають дві основні задачі аналітичної геометрії у просторі:

1) Знайти рівняння поверхні, заданої як ГМТ.

2) Дослідити форму та геометричні властивості поверхні, заданої своїм рівняння $F(x,y,z)=0$.

8.2 Площина в просторі, види її рівняння

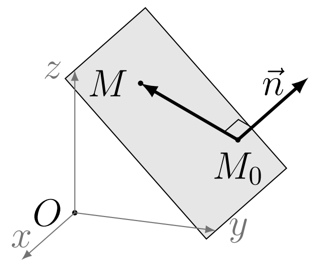
Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x, y та z. Розглянемо основні способи задання площини.

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Нехай у просторі з введеною прямокутною системою координат $Oxyz$ задано площину π. Нехай відомо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку проходить площина, та вектор, перпендикулярний до площини $n(A, \vec{B}, C)$.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ належить площині π тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Звідси отримуємо шукане рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{8.2}$$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ називається *нормальним вектором* площини.



Загальне рівняння площини. Подамо рівняння (8.2) у вигляді: $Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$. Покладаючи $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$, отримаємо рівняння першого порядку відносно змінних x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{8.3}$$

яке називається загальним рівнянням площини.

Проведемо дослідження рівняння (8.3):

1) Якщо $D = 0$, то рівняння (8.3) матиме вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Це рівняння задовольняє точка $O(0, 0, 0)$. Отже, площина проходить через початок координат.

2) Якщо $C = 0$, то рівняння (8.3) матиме вигляд $Ax + By + D = 0$. Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ є нормальним вектором цієї площини. Він перпендикулярний осі Oz. Таким чином, площина паралельна осі Oz. Аналогічно, якщо $A = 0$, то площина паралельна осі Ox, а якщо $B = 0$, то площина паралельна осі Oy.

3) Якщо $C = D = 0$, то площина $Ax + By = 0$ проходить через початок координат і паралельна осі Oz, тобто площина проходить через вісь Oz. Аналогічно, площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy, а площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox.

4) Якщо $A = B = 0$, то рівняння (8.3) матиме вигляд $Cz + D = 0$. В цьому випадку площина паралельна координатній площині $Oxyz$. Якщо при цьому $D = 0$, тобто $z = 0$, то площина співпадає з координатною площиною $Oxyz$. Аналогічно, площина $Ax + D = 0$ паралельна координатній площині $Oxyz$, а якщо і $D = 0$, тобто $x = 0$, то задана площина співпадає з координатною площиною $Oxyz$. Аналогічно, площина $By + D = 0$ паралельна координатній площині $Oxyz$, а якщо $D = 0$, тобто $y = 0$, то задана площина співпадає з координатною площиною $Oxyz$.

Рівняння площини, що проходить через три точки. Три точки, що не належать одній прямій визначають площину. Знайдемо рівняння площини π, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не належать одній прямій.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Розглянемо три вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),\ \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

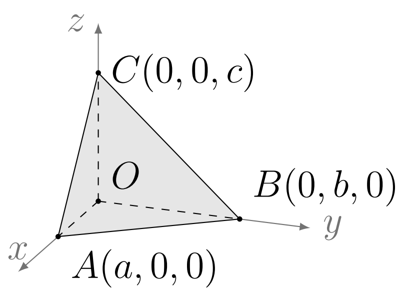
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Точка $M(x, y, z)$ належить площині π тоді і тільки тоді, коли вектори компланарні (лежать в одній площині), отже їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3}$. Звідки маємо

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.4}$$

Рівняння (8.4) є рівнянням площини, що проходить через три точки.

Рівняння площини "у відрізках". Нехай площина π не проходить через початок координат і відтинає від координатних осей відрізки орієнтованої довжини a, b, c відповідно, тобто проходить через точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.



Підставляючи координати цих точок у рівняння (8.4), отримаємо

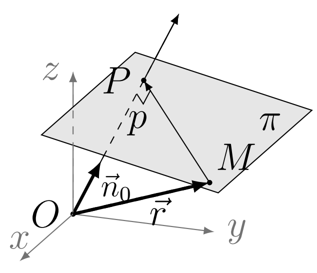
$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Після обчислення визначника, одержимо рівняння площини *"у відрізках"*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{8.5}$$

Нормальне рівняння площини. Визначимо площину π у просторі одиничним вектором $\vec{n_0}$ напрямленим вдовж перпендикуляра OP, який опущено з початку координат на площину π, та довжиною p цього перпендикуляра.

Нехай $OP = p$ і $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, де α, β, γ – кути, утворені одиничним вектором $\vec{n_0}$ з осями координат. Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка площини. Розглянемо вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x,y,z)$. Для довільної точки M площини π проекція радіус-вектора $\vec{r}$ на вектор $\vec{n}_0$ завжди дорівнює p, тобто $np_{\vec{n}_0}\vec{r} = p$, звідки $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} = p$.



Останнє рівняння в координатах векторів $\vec{r}$ та $\vec{n}_0$ набуде вигляду:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (8.6)$$

Рівняння (8.6) називається *нормальним рівнянням площини.*

Для зведення загального рівняння площини (8.3) до нормального загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ слід помножити на *нормуючий множник*

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

знак якого вибираємо протилежним до знаку вільного коефіцієнта D. В цьому випадку нормальне рівняння площини матиме вигляд:

$$-\frac{D}{|D|} \cdot \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \qquad (8.6')$$

Множник $-\frac{D}{|D|}$ в $(8.6')$ формалізує вибір знаку нормуючого множника λ.

Приклад 8.1. Відомо, що площина відтинає від осей координат відрізки орієнтованої довжини 16, -4 та 2 відповідно. Запишемо загальне та нормальне рівняння цієї площини.

Скористаємось рівнянням площини "у відрізках" (8.5):

$$\frac{x}{16} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1.$$

Звідки, після множення обох частин на 16, одержимо загальне рівняння площини:

$$x - 4y + 8z - 16 = 0.$$

Для того, щоб перейти до нормального рівняння, помножимо обидві частини загального рівняння площини на нормуючий множник $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-4)^2+8^2}} = \frac{1}{9}$:

$$\frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{8}{9}z - \frac{16}{9} = 0.$$

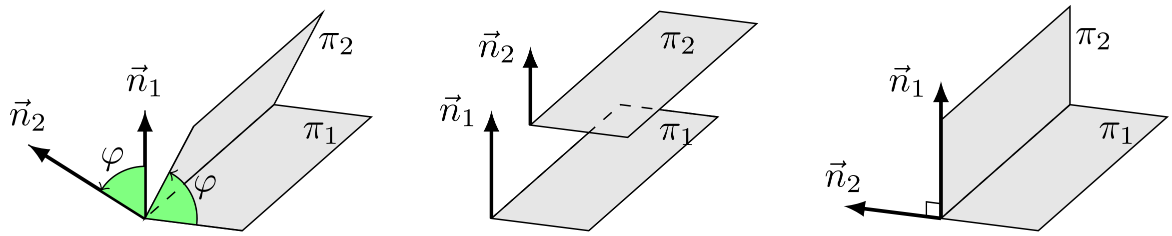
8.3 Основні задачі на площину у просторі

Кут між площинами. Розглянемо дві площини π_1 та π_2, задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ відповідно.

Кутом між двома площинами π_1 та π_2 називається один з двогранних кутів, утворених цими площинами, який знаходять як кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ площин π_1 та π_2:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Для того, щоб знайти величину гострого кута, необхідно взяти модуль скалярного добутку нормальних векторів в цій формулі.



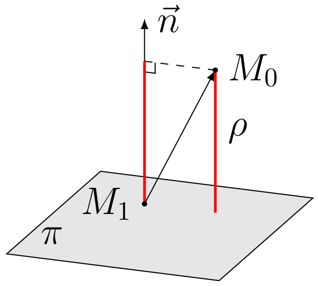
Умови паралельності та перпендикулярності площин. Розглянемо дві площини π_1 та π_2, задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ відповідно. Площини π_1 та π_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

З'ясуємо умову перпендикулярності площин π_1 та π_2. Очевидно, площини π_1 та π_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, тобто тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток нормальних векторів цих площин $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ дорівнює нулю:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Відстань від точки до площини. Нехай у просторі задана площина π загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$ і точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до площини π.



Відстань ρ від точки M_0 до площини π дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – довільна точка площини π, на нормальний вектор $\vec{n} = (A, B, C)$.

Тому

$$\rho = |np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Оскільки $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ і $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n} = (x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D - 0 = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$. (Ми скористались тим, що точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині π, а тому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.) Звідки маємо

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Фактично, відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини π знаходимо підстановкою координат точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у ліву частину нормального рівняння площини π, беручи модуль результату.

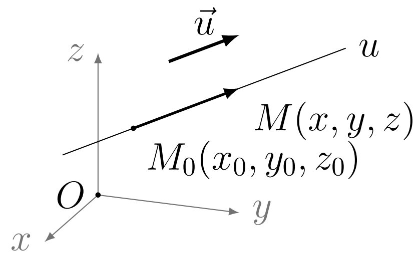
8.4 Пряма в просторі, різні види її рівняння

Пряма є найпростішою лінією у просторі. Розглянемо її рівняння.

Канонічне рівняння прямої. Складемо рівняння прямої u, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{u} = (l, m, n)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої. Складемо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

.



Точка $M(x, y, z)$ належить прямій u тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{u}$ колінеарні, а значить їх координати пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{8.7}$$

– рівняння прямої, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\vec{u}$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням* прямої, а вектор $\vec{u} = (l, m, n)$ називається *напрямним вектором* прямої.

Параметричне рівняння прямої. З канонічного рівняння випливає, що

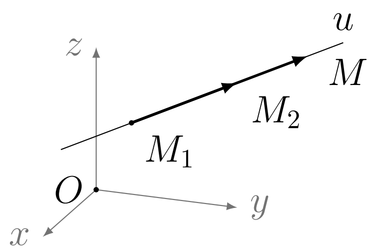
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x, y та z, отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0, \end{cases}$$

яке називається параметричним рівнянням прямої.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Нехай пряма u проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої.



Складемо вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ та $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ці вектори колінеарні, а отже їх координати пропорційні. Тому рівняння прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

яке називається *рівнянням прямої через дві точки.*

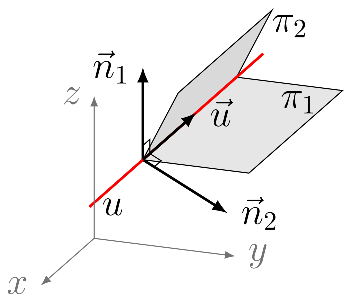
Загальне рівняння прямої. Пряму u у просторі можна задавати як лінію перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{8.8}$$

Кожне рівняння системи (8.8) є загальним рівнянням площини. Якщо площини не паралельні, тобто координати нормальних векторів $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ не пропорційні, то система (8.8) визначає пряму як геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють кожному з рівнянь системи. Рівняння (8.8) називають *загальним рівнянням прямої.*

Розглянемо перехід від загального рівняння прямої до її канонічних рівнянь. Виберемо довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка задовольняє обом рівнянням системи. Для цього, наприклад, можна покласти $z_0 = 0$, після чого координати x_0 і y_0 знайти з системи

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0. \end{cases}$$



Оскільки пряма u перпендикулярна до кожного з векторів $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то її напрямний вектор $\vec{u}$ колінеарний їх векторному добутку. Таким чином, за напрямний вектор прямої u можна взяти вектор

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Далі, підставляючи знайдені координати точки M_0 та обчислені координати вектора $\vec{u}$ у рівняння (8.7), отримаємо канонічні рівняння прямої.

Приклад 8.2. Запишемо канонічні рівнянння прямої, заданої загальним рівнянням

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Спочатку знайдемо координати довільної точки M_0 прямої. Покладемо $z_0 = 0$. Тоді

$$\begin{cases} 3x_0 - y_0 - 7 = 0, \\ x_0 + y_0 - 1 = 0, \end{cases}$$

звідки $M_0(2, -1, 0)$. Далі знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Отже, канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{4}.$$

8.5 Основні задачі на пряму у просторі

Кут між прямими. Нехай у просторі прямі u_1 і u_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

відповідно. Кутом φ між прямими u_1 і u_2 називають кут між їх напрямними векторами $\vec{u}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ та $\vec{u}_2 = (l_2, m_2, n_2)$.

Тому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Таким чином, кут між прямими визначається з точністю до суміжного. Для знаходження гострого кута між прямими у правій частині останньої рівності чисельник необхідно взяти по модулю.

Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Нехай прямі u_1 і u_2, задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\ \ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

відповідно.

Прямі u_1 і u_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх напрямні вектори $\vec{u}_1=(l_1,m_1,n_1)$ та $\vec{u}_2=(l_2,m_2,n_2)$. Таким чином, умова паралельності двох прямих у просторі:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Прямі u_1 і u_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх напрямні вектори, тобто $u_1\cdot u_2=0$, що рівносильно умові

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

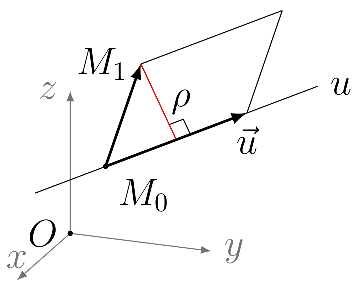
.

Відстань від точки до прямої. Нехай у просторі задано точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і пряму u

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Пряма проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ паралельно вектору $\vec{u}=(l,m,n)$. Відстань від точки M_1 до прямої u дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з цієї точки на цю пряму. З іншого боку, відстань ρ – це висота паралелограма, сторонами якого є вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$ і напрямний вектор $\vec{u}$ прямої u, відкладений від точки M_0 цієї прямої. Якщо S – площа цього паралелограма, то

$$\rho=\rho(M_1,u)=\frac{S}{|\vec{u}|}.$$



Площу S знайдемо як модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{u}$:

$$S = \left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{u}\right|.$$

Тому

$$\rho = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}. \tag{8.9}$$

У координатній формі це співвідношення виглядає надто громіздко:

$$\rho = \frac{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

тому на практиці краще користуватись безпосередньо формулою (8.9).

Приклад 8.3. Знайдемо відстань від точки $M_1(-2, 3, 1)$ до прямої u

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Пряма u проходить через точку $M_0(-1, 2, 3)$ паралельно вектору $\vec{u} = (3, 4, 2)$, довжина якого $|\vec{u}| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$. Знайдемо модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, 1, -2)$ і $\vec{u}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{u}$ має координати

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{u} = (10, -4, -7),$$

то

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{u}\right| = \sqrt{100 + 16 + 28} = 12.$$

Звідки за формулою (8.9)

$$\rho(M_1, u) = \frac{12}{\sqrt{29}}.$$

8.6 Основні задачі на пряму і площину у просторі

Кут між прямою і площиною. Нехай у просторі задано площину π загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

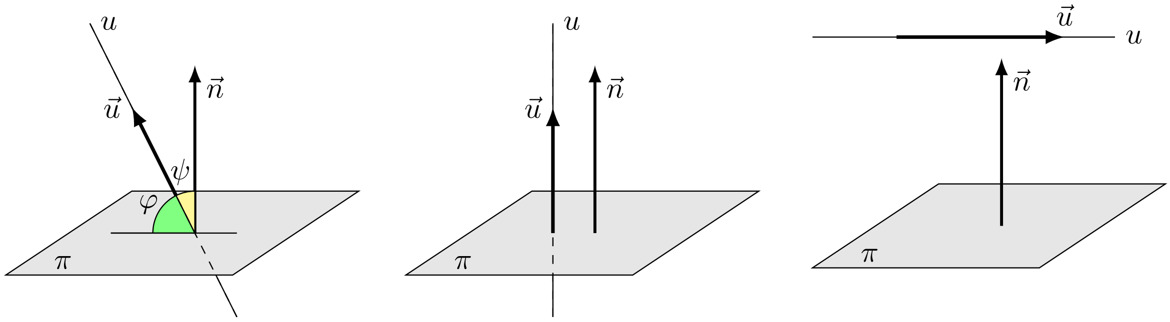
і пряму u канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Означення 8.2. *Кутом між прямою і площиною* називається кут між прямою та проекцією цієї прямої на площину.

Нехай φ – кут між прямою u і площиною π, а ψ – кут між напрямним вектором прямої $\vec{u} = (l, m, n)$ і нормальним вектором площини $\vec{n} = (A, B, C)$. Тоді

$$\cos\psi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$



Очевидно, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, тому за формулою зведення маємо $\sin\varphi = \cos\psi$, і оскільки $\sin\varphi \geq 0$, то

$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|lA + mB + nC|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад 8.4. Знайдемо кут між прямою u: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$ та площиною π: $3x - y + 2z - 7 = 0$.

Напрямний вектор прямої $\vec{u} = (3,4,2)$, а нормаль площини $\vec{n} = (3,-1,2)$. Звідси синус кута між прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|3\cdot 3 + 4\cdot(-1) + 2\cdot 2|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{406}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Пряма u паралельна площині π тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u} = (l,m,n)$ і $\vec{n} = (A,B,C)$ перпендикулярні, тобто $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$. Таким чином, умова паралельності прямої і площини:

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Пряма u перпендикулярна площині π тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u} = (l,m,n)$ і $\vec{n} = (A,B,C)$ колінеарні, тобто умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Перетин прямої і площини. Для знаходження точки перетину прямої

$$u:\ \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

з площиною

$$\pi:\ Ax + By + Cz + D = 0$$

потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Для чого перейдемо до параметричного задання прямої

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0, \end{cases}$$

і підставимо в друге рівняння системи значення x, y, z:

$$A(x_0 + nt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0. \tag{8.10}$$

Звідки, розв'язуючи це рівняння відносно параметра t, формально одержимо

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{An + Bm + Cn}. \tag{8.11}$$

Якщо $An + Bm + Cn \neq 0$, формула (8.11) визначає єдиний розвязок t рівняння (8.10), підставляючи який у координати $x = lt + x_0$, $y = mt + y_0$, $z = nt + z_0$, отримаємо точку перетину $M(x, y, z)$ прямої u з площиною π.

Якщо ж $An + Bm + Cn = 0$ і при цьому $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння (8.10) не має розв'язків. В цьому випадку пряма u і площина π не мають спільних точок, тобто пряма u паралельна площині π. Таким чином, умова паралельності прямої u і площини π:

$$\begin{cases} An + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$$

Якщо ж $An+Bm+Cn = 0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0$, то рівняння (8.10) має безліч розв'язків, що означає пряма і площина мають безліч спільних точок, тобто пряма u лежить у площині π. Отже, умова

$$\begin{cases} An + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

є умовою, за якої пряма u лежить у площині π.

Приклад 8.5. Знайдемо точку, симетричну точці $M(5, 3, 4)$ відносно площини π: $2x - y + z + 1 = 0$.

Спочатку складемо рівняння прямої u, що проходить через точку $M(5, 3, 4)$ перпендикулярно до площини π. Оскільки нормальний вектор площини $\vec{n} = (2, -1, 1)$ є паралельним шуканій прямій, то вектор $\vec{u} = (2, -1, 1)$ можна взяти за напрямний вектор прямої u. Підставляючи координати точки M та координати вектора $\vec{u}$ у канонічні рівняння прямої (8.7), отримаємо рівняння прямої u :

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{1} = t.$$

Знайдемо точку P перетину прямої u з площиною π. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 3, \\ z = t + 4, \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи змінні x, y, z у останнє рівняння системи, матимемо

$$2(2t + 5) - (-t + 3) + t + 4 + 1 = 0.$$

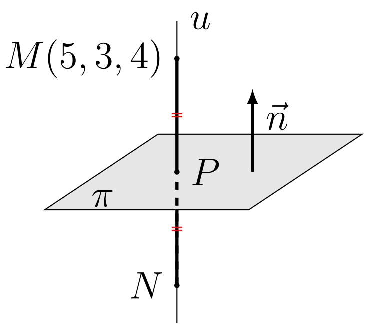
Звідси $t = -2$, а отже, $x = -4 + 5 = 1$, $y = 2 + 3 = 5$, $z = -2 + 4 = 2$. Таким чином, $P(1, 5, 2)$ – точка перетину прямої u з площиною π. Нарешті, знайдемо координати точки $N(x_N, y_N, z_N)$, симетричної точці M відносно площини π. Оскільки точка P є серединою відрізка MN , то

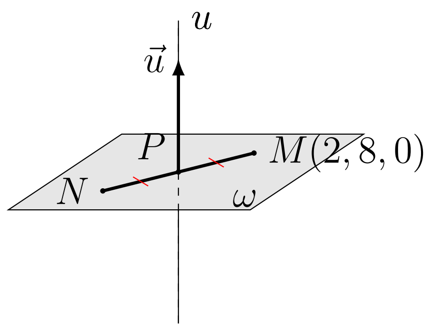
$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2}, \;\; y_P = \frac{y_M + y_N}{2}, \;\; z_P = \frac{z_M + z_N}{2}.$$

Звідки одержимо

$$x_N = 2x_P - x_M = -3,\; y_N = 2y_P - y_M = 7,\; z_N = 2z_P - z_M = 0.$$

Отже, $N(-3, 7, 0)$ – точка, симетрична точці М відносно площини π.





Приклад 8.6. Знайдемо точку, симетричну точці $M(2, 8, 0)$ відносно прямої u:

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y + 3}{1} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Запишемо рівняння площини ω , що проходить через точку $M(2,8,0)$ перпендикулярно до прямої u. Зрозуміло, що напрямний вектор $\vec{u}=(3,1,1)$ прямої u є нормальним вектором шуканої площини ω . Тому запишемо загальне рівняння площини ω:

$$-3(x-2)+1(y-8)-1(z-0)=0 \Leftrightarrow 3x-y+z+2=0.$$

Знайдемо точку P перетину прямої u з площиною ω . Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=1-3t, \\ y=-3+t, \\ z=3-t, \\ 3x-y+z+2=0. \end{cases}$$

Підставляючи змінні x, y, z у останнє рівняння системи, матимемо

$$3(1-3t)-(-3+t)+(3-t)+2=0 \Leftrightarrow 11t=11 \Leftrightarrow t=1.$$

Звідси $x=1-3=-2, y=-3+1=-2, z=3-1=2$. Таким чином, $P(-2,-2,2)$ – точка перетину прямої u з площиною ω. Ця точка є проекцією точки $M(2,8,0)$ на пряму u.

Після чого, знайдемо координати точки $N(x_N, y_N, z_N)$, симетричної точці M відносно прямої u. Оскільки точка P є серединою відрізка MN, то аналогічно попередньому прикладу маємо

$$x_N=2x_P-x_M=-6,\ y_N=2y_P-y_M=-12,\ z_N=2z_P-z_M=4.$$

Остаточно, $N(-6,-12,4)$ – точка, симетрична точці M відносно прямої u.

Запитання для самоперевірки до лекції 8

1. Який вигляд має загальне рівняння площини? Яким є зміст коефіцієнтів цього рівняння?

2. Який вигляд має рівняння площини «у відрізках»? Яким є геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?

3. Як записати рівняння площини, що проходить через три точки?

4. Як знайти кут між двома площинами?

5. Як записати умову паралельності та умову перпендикулярності двох площин?

6. Як знайти відстань від точки до площини?

7. Який вигляд загального рівняння прямої у просторі? Яка геометрична інтерпретація цього рівняння?

8. Який вигляд канонічних рівнянь прямої у просторі?

9. Який вигляд параметричних рівнянь прямої просторі?

10. Який вигляд рівнянь прямої, що проходить через дві задані точки у просторі?

11. Як знайти кут між двома прямими у просторі?

12. Як записати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, що задані канонічними рівняннями?

13. Як знайти відстань від точки до прямої у просторі?

14. Як знайти кут між прямою і площиною у просторі?

15. Які умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини?

Рекомендована та використана література

1. Булдигін В.В., Алєксєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Коновалова Н.Р., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Навчальний посібник. — К.: ТВіМС, 2011. — 224 с.

2. Михайленко В.В., Добряков Л.Д. Вища математика. Книга 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Підручник. – Житомир: ЖДТУ, 2004 р. – 554 с.

3. Ординська З.П., Орловський І.В., Руновська М.К. Конспект лекцій з аналітичної геметрії та лінійної алгебри – К.: Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", 2014.

4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібн. – Київ: А.С.К.; 2006. – 648 с.

5. Беспальчук В. І., Головня Р. М., Івахненкова В. В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч.– Ч. 1.– Житомир: ЖДТУ, 2001. – 162 с