Розділ 1. Елементи лінійної алгебри.

Тема 2. Матриці та визначники. (продовження)

4. Обернена матриця

Розглянемо множину квадратних матриць порядку n. Дві квадратні матриці одного і того ж порядку n можна перемножити, при цьому в добутку отримаємо квадратну матрицю того ж порядку n.

Визначимо степені квадратних матриць. Нехай A – довільна квадратна матриця n-го порядку. За означенням покладемо

$$A^0 = E,\; A^1 = A,\; A^2 = AA,\;\; A^3 = AAA,\; \dots .$$

Для кожного числа a, що не дорівнює нулю, існує обернене число $a^{-1} = 1/a$, тобто число, яке в добутку з a дає одиницю: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Виявляється, що аналогічна властивість справедлива і для матриць, причому роль умови $a \neq 0$ відіграє умова $\det A \neq 0$, тобто відмінність від нуля визначника матриці A.

<u>**Означення 1**</u>. Матриця, визначник якої відмінний від нуля, називається неособливою (невиродженою), а матриця, визначник якої дорівнює нулю – особливою (виродженою).

<u>**Означення 2**</u>. Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до квадратної матриці A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Очевидно, що властивість бути оберненою матрицею є взаємною, а саме, якщо A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A, то A є оберненою матрицею до матриці A^{-1}.

Виникає природне питання про те, за яких умов обернена матриця A^{-1} до матриці A існує. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 2. Для того щоб обернена матриця A^{-1} до матриці A існувала, необхідно і достатньо, щоб матриця A була неособливою.

<u>Доведення</u>. Необхідність. Нехай обернена матриця A^{-1} існує; доведемо, що матриця A є неособливою. Для цього скористаємось тим, що визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць. З умови $AA^{-1} = E$ одержуємо, що $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Звідси випливає, що $\det A \neq 0$, тобто матриця A є неособливою.

Достатність. Нехай матриця A є неособливою, тобто $\Delta = \det A \neq 0$. Побудуємо матрицю

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Тут A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A. Звернемо увагу на своєрідне розташування чисел A_{ij} в матриці B: число A_{ij} стоїть не в i-му рядку і j-му стовпці, а навпаки, в j-му рядку і i-му стовпці. Доведемо, що $B = A^{-1}$. Запишемо

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \{c_{ij}\}, \quad i = 1,2,\dots,n;\; j = 1,2,\dots,n.$$

За правилом множення матриць елемент матриці AB, розташований в i-му рядку і j-му стовпці, дорівнює $c_{ij} = \frac{1}{\Delta}\left(a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn}\right)$. При $i = j$ цей вираз дорівнює одиниці, оскільки в дужках стоїть розклад визначника за елементами i-го рядка. Якщо $i \neq j$, то вираз в дужках дорівнює нулю, тому що в цьому випадку маємо суму добутків елементів i-го рядка визначника Δ на алгебраїчні доповнення відповідних елементів j-го рядка. Отже, c_{ij} дорівнює одиниці, якщо $i = j$, і дорівнює нулю, якщо $i \neq j$. Це означає, що $AB = E$ і $A^{-1} = B$. Теорему доведено.

Отже нами доведено, що обернена до матриці A матриця знаходиться за формулою (1), яку можна переписати у зручнішому вигляді:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Приклад 1. Знайти обернену матрицю та переконатися, що $A^{-1}A = E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\big(3\cdot(-3)-4\cdot(-2)\big)-5\cdot\big(6\cdot(-3)-4\cdot 5\big)+7\cdot\big(6\cdot(-2)-3\cdot 5\big) = 2\cdot(-1)-5\cdot(-38)+7\cdot(-27) = -1.$$

Визначник не дорівнює нулю, тобто обернена матриця існує.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A. Нагадаємо, що алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} – це число, яке дорівнює добутку $(-1)^{i+j}$ на визначник матриці, що утворилась, коли у матриці A викреслили рядок з номером i та стовпець з номером j. Отже, якщо сума $i+j$ парна, то знак відповідного визначника не зміниться. Якщо ж сума $i+j$ непарна, то перед визначником слід поставити знак мінус.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

За формулою (2) знаходимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $A^{-1}\cdot A = E$:

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-1)\cdot 6+1\cdot 5 & 1\cdot 5+(-1)\cdot 3+1\cdot(-2) & 1\cdot 7+4\cdot(-1)+1\cdot(-3) \\ (-38)\cdot 2+6\cdot 41+(-34)\cdot 5 & (-38)\cdot 5+3\cdot 41+(-2)\cdot(-34) & (-38)\cdot 7+4\cdot 41+(-3)\cdot(-34) \\ 27\cdot 2+6\cdot(-29)+24\cdot 5 & 27\cdot 5+3\cdot(-29)+24\cdot(-2) & 27\cdot 7+4\cdot(-29)+24\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Ранг матриці (опрацювати самостійно!)

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Основні поняття

<u>**Означення 1**</u>. *Системою* m *лінійних алгебраїчних рівнянь з* n *невідомими* $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) можна також записати у *матричному* вигляді (у вигляді матричного рівняння)

$$AX = B, \qquad (2)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – *матриця системи*; $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – *стовпець вільних членів*;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – *стовпець невідомих*.

Означення 2. Система (1) називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени $b_1,\ b_2,\dots,b_m$ дорівнюють нулю. Якщо хоча б один з вільних членів $b_1,\ b_2,\dots,b_m$ не дорівнює нулю, то система (1) називається ***неоднорідною***.

Означення 3. Сукупність n чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n$ називається розв'язком системи (1), якщо при підстановці $x_1 = \alpha_1\ x_2 = \alpha_2,\dots,\ x_n = \alpha_n$ кожне з рівнянь системи (1) перетворюється в тотожність.

Означення 4. Система рівнянь (1) називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо жодного розв'язку цієї системи не існує.

Зауважимо, що однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна, оскільки має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Означення 5. Сумісна система (1) називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок і ***невизначеною***, якщо існує хоча б два різних розв'язки цієї системи.

2. Правило Крамера

Нехай маємо систему рівнянь (1), в якій $m = n$, тобто число рівнянь дорівнює числу невідомих. Запишемо систему у матричному вигляді (2)

$$AX = B. \qquad (2)$$

Тут матриця A квадратна.

Якщо $\det A \neq 0$, то існує матриця A^{-1}. Помножимо рівняння (2) зліва на матрицю A^{-1}. Маємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Звідки, з урахуванням властивостей $A^{-1}A = E$, $EX = X$ робимо висновок, що розв'язок системи рівнянь (2) можна знайти за формулою

$$X = A^{-1}B, \qquad (3)$$

яка виражає ***правило Крамера у матричній формі.***

Скориставшись зображенням оберненої матриці (2) з попередньої лекції, деталізуємо останню формулу

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det A}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n\right) \\ \frac{1}{\det A}\left(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n\right) \\ \dots \\ \frac{1}{\det A}\left(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n\right) \end{pmatrix}$$

і запишемо цей розв'язок у вигляді

$$x_j = \frac{1}{\det A}\left(A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ldots + A_{nj}b_n\right), \qquad j = 1,\dots,n.$$

Вираз у дужках дорівнює визначнику Δ_j, який отримується з визначника $\det A = \Delta_A$ заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів (довести самостійно). Тому формула (3) рівносильна формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_A},\quad j = 1,\ 2,\dots,n, \qquad (4)$$

які називають ***формулами Крамера***.

Формули (4) виражають правило Крамера у визначниковій формі.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} = 11 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -15. \end{cases}$

1. Матричний метод (метод оберненої матриці)

Для заданої системи

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-6) = 3, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -(-7) \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = -15,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = (-7) \cdot (-6) - 1 \cdot 6 = 36, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-6) = 6,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) - 0 \cdot 6 = -21, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-6) + 2 \cdot 6 = 54,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 2, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot 1 + 0 \cdot (-7) = -7,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 2 \cdot (-7) = 21.$$

За формулою (2) з п.4. попередньої теми знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши формулу (3), дістанемо

$$X = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -15 & -21 & -7 \\ 36 & 54 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 11 + 6 \cdot (-2) + 2 \cdot (-15) \\ (-15) \cdot 11 + (-21) \cdot (-2) + (-7) \cdot (-15) \\ 36 \cdot 11 + 54 \cdot (-2) + 21 \cdot (-15) \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ або $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

2. Формули Крамера.

Знаходимо визначники:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 0 = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 15 = -9 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -15 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix} = -9,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 6 & -15 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix} - 11 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 11 \\ -7 & 1 & -2 \\ 6 & -6 & -15 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 6 & -15 \end{vmatrix} + 11 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -27.$$

За формулами Крамера отримуємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_A} = \frac{-9}{-9} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_A} = \frac{-18}{-9} = 2, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_A} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

Додаток 1. Доведення еквівалентності записів (1) та (2).

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=B.$$

Додаток 2. Обгрунтування форми Δ_j .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_2 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_n & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + ... + b_n A_{nj} = \Delta_j$$

Додаток 3. Ранг матриці

Розглянемо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Зафіксуємо деяке число k стовпців матриці A і таке ж число її рядків. Елементи, що стоять на перетині вказаних рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку k.

Означення 1. Визначник квадратної матриці порядку k, утвореної з елементів матриці (3) вказаним способом, ***називається мінором*** ***k-го порядку*** матриці A.

Теорема 1. Якщо в матриці A всі мінори k-го порядку рівні нулю, то рівні нулю і всі мінори, що мають порядок вищий за k (якщо такі існують).

Доведення. Візьмемо в матриці A довільний мінор $(k+1)$-го порядку. Він дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка на їх алгебраїчні доповнення. Але алгебраїчне доповнення довільного елемента нашого мінора з точністю до знака дорівнює деякому мінору k-го порядку матриці A. За умовою всі мінори k-го порядку матриці A рівні нулю, а тому рівні нулю і розглянуті алгебраїчні доповнення. Це означає, що дорівнює нулю і вибраний мінор $(k+1)$-го порядку.

Отже, всі мінори порядку $k+1$ матриці A рівні нулю. Аналогічно доводиться, що всі мінори порядку $k+2$ матриці A також рівні нулю і т.д.

Теорему доведено.

Якщо числа a_{ij} не дорівнюють одночасно нулю, то завжди можна вказати натуральне число r, яке має такі властивості:

1. У матриці A є мінор порядку r, відмінний від нуля.

2. Кожен мінор матриці A, який має порядок $r+1$ або вищий (якщо, взагалі, такі існують), дорівнює нулю.

Означення 2. Число r, яке має вказані властивості **1**, **2**, називається рангом матриці A і позначається символом $r(A)$.

З означення 2 випливає, що ранг матриці можна визначити як найвищий з порядків відмінних від нуля мінорів цієї матриці.

Задача визначення рангу матриці, якщо виходити лише з означення 2, вимагає обчислення великої кількості визначників. Дійсно, з m рядків ми можемо C_m^k різними способами вибрати k рядків. Нагадаємо, що $C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$, де позначено $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Аналогічно, з n стовпців можна вибрати C_n^k різними способами k стовпців. Отже, в матриці A розміру $m\times n$ є $C_m^k\cdot C_n^k$ мінорів k-го порядку, утворених різними способами. Зрозуміло, що при великих значеннях m та n розв'язати задачу практично дуже важко.

Тому досить важливо знати прості способи обчислення рангу. Одним з таких способів є метод елементарних перетворень матриці.

Для заданої матриці A будемо застосовувати такі елементарні перетворення над її рядками (стовпцями):

1. Перестановка двох довільних рядків (стовпців) матриці.

2. Множення елементів довільного рядка (стовпця) матриці на число c, відмінне від нуля.

3. Додавання до елементів довільного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця) тієї ж матриці, помножених на деяке число.

4. Відкидання нульового рядка (стовпця) матриці, тобто рядка (стовпця), всі елементи якого рівні нулю.

Теорема 2. При елементарних перетвореннях над рядками (стовпцями) ранг матриці не змінюється.

Означення 4. Прямокутну матрицю назвемо ***східчастою***, якщо:

1) будь-який її рядок містить хоча б один ненульовий елемент;

2) перший ненульовий елемент кожного рядка, починаючи з другого, розміщений правіше першого ненульового елемента попереднього рядка.

Зокрема, квадратна східчаста матриця називається ***трикутною***.

Наведемо приклади східчастих матриць:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_3=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Будь-яку ненульову матрицю (1) за допомогою елементарних перетворень можна звести до східчастого вигляду.

На теоремі 3 ґрунтується метод обчислення рангу довільної ненульової матриці.

Приклад 1. Обчислити ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Поміняємо місцями перший та другий рядки матриці A:

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}=A_1.$$

Помножимо перший рядок матриці A_1 послідовно на –2 і 1 та додамо відповідно до третього і четвертого рядка:

$$A_1\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=A_2.$$

Помножимо другий рядок матриці A_2 на –1 і додамо до четвертого:

$$A_2\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A_3.$$

Відкинемо нульовий рядок матриці A_3. В результаті отримуємо матрицю A_4 східчастого вигляду

$$A_3\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}=A_4.$$

Мінор, складений з перших трьох стовпців матриці A_4, дорівнює -1.

Тому $r(A_4)=3$. За теоремою 2 $r(A)=3$.

Відповідь: $r(A)=3$.