ЛЕКЦІЯ № 8

ТЕМА: Прийняття рішень в умовах багатьох критеріїв якості

ПИТАННЯ:

1. Загальні відомості про багатокритеріальний аналіз**.**
2. Підходи щодо рішення багагокритеріальних задач.
3. Способи прийняття оптимальних рішень в умовах багатьох критеріїв якості
4. Методологія визначення оптимальних рішень при багатьох критеріях якості
5. Приклад використання багатокритеріального аналізу для прийняття рішень

Лектор: професор кафедри ком'ютерної інженерії та кібербезпеки доктор технічних наук, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки КОВБАСЮК Сергій Валентинович

Область можливих рішень складається з:

- області згоди;
- області компромісів.

Класи задач багатокритерійної оптимізації

Клас 1 — множина якостей.

При виборі рішення повинні братися до уваги декілька характеристик якості системи. Зазвичай у задачах цього класу часткові критерії мають різну розмірність і фізичну природу.

Приклад

Необхідно спроектувати оптимальну стрілецьку зброю. В критерії оптимальності повинні входити: маса, габарити, дальність стрільби і т.ін.

Клас 2 — множина об'єктів.

Дана система складається з ряду об'єктів, якість функціонування кожного описується своїм критерієм, а ефективність системи визначається сукупністю часткових критеріїв. Фізична природа і розмірність окремих часткових критеріїв у задачах цього класу зазвичай однакова.

Приклад

Необхідно оптимально розподілити порядок управляючих сигналів літаками в багатоканальному радіолокаторі в умовах зльоту та посадки об'єктів на злітно-посадочну смугу.

Xi (i=1..п) → $X = f(X_i)$

<u>СПОСОБИ ЗВЕДЕННЯ ЧАСТКОВИХ КРИТЕРІЇВ В ОДИН ФУНКЦІОНАЛ</u>:

- Адитивний критерій (часткові критерії подані у вигляді суми);
- Мультиплікативний критерій (узагальнений функціонал об'єднує часткові критерії у вигляді добутку);
- Скалярна згортка А. М. Вороніна (часткові критерії зібрані в один функціонал за допомогою операції згортки).

Адитивний критерій оптимальності реалізує принцип абсолютної поступки, тобто оптимальне рішення є компроміс, при якому абсолютне зниження одного критерію якості не перевищує абсолютне (в тих же одиницях) підвищення іншого.

$$opt\ X = \max \sum_{i=1}^{n} X_i$$

де: *optX*- оптимальне значення визначального (оптимізованого) параметра системи;

Xi - нормовані часткові критерії якості роботи системи;

i=1..n - параметр, що характеризує кількість часткових критерійних функцій.

Недоліками адитивного критерію є:

- можлива часткова або повна взаємна компенсація часткових критеріїв якості.
- слабка теоретична обґрунтованість критерію, що є формальним математичним прийомом, який додає задачі зручний для вирішення вигляд.

Переваги критерію

Можливо визначення аналітичного рішення із загального функціонала завдяки його простоті.

Мультиплікативний критерій оптимальності реалізує принцип справедливої відносної поступки і полягає в наступному: справедливим слід вважати такий компроміс, коли відносне зниження одного критерію не перевищує відносного (не прив'язаного до величини першого критерію) перевищення іншого критерію.

$$opt\,X = \prod_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \begin{smallmatrix} max \\ min \end{smallmatrix}$$

Недоліками підходу є:

- компенсація бракуючої величини одного часткового критерію надмірною величиною іншого, тобто ненавмисне домінування одного критерію над іншим;

- спостерігається тенденція згладжування рівня часткових критеріїв, що загрублює аналізовану інформацію і результат оптимізації.

Перевага підходу:

відхід від нормування часткових критеріїв.

Критерій оптимальності на основі згортки професора Вороніна А.М.

Скалярна згортка проф. Вороніна А.Н. реалізує концепцію нелінійної схеми компромісів. У цьому випадку схема компромісів полягає у відповіді на питання: скількома одиницями виграшу по одному критерію якості можна компенсувати неминучий програш одиниць по іншому критерію.

Переваги згортки проф. Вороніна є:

- оптимізаційна задача розв'язується за наявності обмежень, що у будь-якому випадку забезпечує отримання рішення;

- згортка забезпечує використання мінімаксного підходу, тобто дозволяє концентруватись на мінімізації домінуючого часткового критерію якості;

- критерій гарантує унімодальність результуючого функціонала і забезпечує низьку обчислювальну складність для отримання рішення;

- згортка забезпечує можливість адаптації до конкретної ситуації, завдяки введенню коефіцієнта важливості часткових критеріїв.

$$\chi^* = \arg\min_{\chi \epsilon G} \sum_{k=1}^{d} \gamma_k [1 - \varphi_{0k}(\chi)]^{-1}$$

де: χ - оптимізований параметр;

G - область визначення функцій часткових критеріїв оптимальності;

γ_k- коефіцієнт важливості (вага) *к -ї* критерійної функції;

$\varphi_{0k}(\chi)$ — нормована функція *к.-го* часткового критерію оптимальності;

K= 1...d - коефіцієнт підсумовуваній по кількості часткових критеріїв якості;

χ^* - мінімально можливе (для встановлених обмежень часткових критеріїв) значення оптимізованого параметра.

<u>Аналіз критеріїв якості дозволяє зробити висновок</u>:

Отриманий результат оптимізації не може бути спростований або підтверджений жодним із розглянутих критеріїв, оскільки кожний з них дасть свій оптимальний результат.

Всі критерії оптимальності мають право існувати і використовуватися.

Вибір якого-небудь з них для використовування повинен здійснюватися відповідно до таких міркувань:

- початкові передумови (контекст задачі, апріорна інформація) дозволяють віддати перевагу конкретному критерію;

- досвід використовування критерію оптимізації в подібних задачах давав задовільні результати.

Методика вироблення оптимального рішення багатокритерійної задачі згідно зі згорткою проф. Вороніна А. Н.:

1) Вибір критеріїв ефективності роботи системи.

2) Отримання експериментальних даних що характеризують якість функціонування системи згідно з вибраними критеріями.

3) аналітичної залежності для критеріїв оптимальності згідно з отриманими експериментальними даними.

4) Рішення задачі багатокритерійної оптимізації згідно з вибраним критерієм якості (згортка проф. Вороніна А.М.).

Отримання експериментальних даних спрямовано на отримання дискретних значень показників якості системи при зміні параметра, що оптимізується. Значення показників ефективності можуть бути отримані:

- шляхом створення і дослідження моделей систем ;
- шляхом випробувань серійних або експериментальних зразків систем;
- шляхом опитування експертів.

Пошук аналітичної залежності для критеріїв оптимальності має на меті отримання аналітичної залежності, що зв'язує показники якості системи і оптимізований параметр. Даний етап полягає в апроксимації початкових експериментальних даних вибраним методом, наприклад МНК.

Рішення задачі багатокритерійної оптимізації включає етапи:

- *Встановлення області обмежень вирішуваної задачі;*
- *Нормування часткових критеріїв якостіі;*
- *Визначення оптимального рішення* включає етапи:

1) підстановка нормованих критерійних функцій у згортку;

2) визначення мінімуму розширеної згоргки шляхом прирівнювання до нуля часткових похідних згортки по параметрах, що оптимізуються;

3) рішення в чисельному або аналітичному вигляді отриманого рівняння або системи рівнянь;

4) аналіз отриманих даних.

Постановка задачі

Керівнику підприємства необхідно прийняти рішення: скільки необхідно закупити маршрутних таксі, щоб найкращим чином забезпечити перевезення пасажирів за обраним маршрутом.

Розв’язок задачі

1. Вибір критеріїв ефективності (оптимальності)

$$\begin{cases} D(n) \Rightarrow max, \\ S(n) \Rightarrow min, \\ n \rightarrow var. \end{cases}$$

2. Отримання експериментальних даних критерійних функцій

Таблиця 1						
n	1	2	3	4	5	6
Ефективність D(n)	10	15	18	20	23	25
Вартість S(n)	3000	6000	9000	12000	15000	18000

3. Пошук аналітичної залежності для критеріальних функцій

За відсутності випадкових помилок можуть використовуватися :
- кусково-безперервна апроксимація;
- Бі-Сплайн апроксимація;
- МНК апроксимація.

За наявності випадкових помилок використовуються :
- згладжування $\alpha - \beta$ фільтром;
- згладжування МНК.

До експертної інформації застосовується :
- обробка відповідно до методів теорії нечітких множин;
- МНК обробка.

$$D(n) = 5,9 + 4,760n - 0,2679n^2$$

$$S(n) = 3000n.$$

4. Рішення задачі багатокритерійної оптимізації згідно зі згорткою проф. Вороніна А.М.

Встановлення області обмежень критерійних функцій

$D(1) \le D(n) \le D(6)$,
$S(1) \le S(n) \le S(6)$.

$10 \le D(n) \le 25$,
$3000 \le S(n) \le 18000$.

Нормування часткових критеріїв

Вимоги до етапу нормування такі:

Нормовані функції повинні бути безрозмірними і змінюватися в одних і тих же межах (0... 1).

Критерійні функції, що зводяться в згортку, повинні мінімізуватися.

Нормування часткових критеріїв якості здійснюється згідно з узагальненим виразом

$$\varphi_{oi} = \frac{\varphi_i}{A_i},$$

де φ_i - ненормований частковий критерій;
A_i - максимальне (для встановлених обмежень) значення критерійних функцій;
φ_{oi} - нормований критерій якості;
i=*1.. c* **-** параметр, що характеризує перебір критерійних функцій.

Нормування 1-го часткового критерію D(n) *Нормування 1-го часткового критерію D(n)*

Спробуємо замінити його критерієм програшу $Q(n)$, який необхідно мінімізувати. Заміну часткового критерію можливо здійснити згідно з виразом

$$Q(n) = \frac{1}{D(n)}, \qquad (1.33)$$

тоді нормування матиме вигляд (відповідно до (1.32), враховуючи (1.33))

$$\varphi_{01}(n) = \frac{Q_{(n)}}{\max Q(n)} = \frac{1/D(n)}{1/\min D(n)}, \qquad (1.34)$$

або як кінцевий запис

$$\varphi_{01}(n) = \frac{\min D(n)}{D(n)}, \qquad (1.35)$$

де $\max Q(n)$ максимальне значення програшу (зворотна величина ефективності);

$\min D(n)$ - мінімальне (на інтервалі (1.31)) значення критерію ефективності;

$\varphi_{01}(n)$ - нормований перший критерій якості.

Нормування 2-го часткового критерію S(n)

З урахуванням (1.32) нормування другого часткового критерію здійснюється згідно з виразом

$$\varphi_{02}(n) = \frac{S(n)}{\max S(n)}, \tag{1.36}$$

де $\max S(n)$ - максимальне на інтервалі (1.31) значення критерійної функції;

$\varphi_{02}(n)$ - нормований другий критерій якості.

Визначення оптимуму

$$\chi^* = \arg\min \sum_{k=1}^{d} \gamma_k \left[1 - \varphi_{ok}(\chi)\right]^{-1}.$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.$$

$$n_{opt} = \arg\min \sum_{k=1}^{2} \left[1 - \varphi_{ok}(n)\right]^{-1}.$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\sum_{k=1}^{2}\left[1-\varphi_{ok}(n)\right]^{-1}=0,$$

або ж після диференціювання

$$\sum_{k=11}^{2}\frac{\partial\varphi_{ok}(n)}{\partial n}\left[1-\varphi_{ok}(n)\right]^{-2}=0\,.$$

Розкриваючи, суму отримаємо

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi_{01}(n)}{\partial n}}{\left[1-\varphi_{01}(n)\right]^{2}}+\frac{\dfrac{\partial\varphi_{02}(n)}{\partial n}}{\left[1-\varphi_{02}(n)\right]^{2}}=0.$$

$$\frac{\min D(n)(d_1+2d_2n)}{(d_0+d_1n+d_2n^2)^2\left(1-\dfrac{\min D(n)}{d_0+d_1n+d_2n^2}\right)}+$$

$$+\frac{S}{\max S(n)\left(1-\dfrac{Sn}{\max S(n)}\right)}=0,$$

де d_0, d_1, d_2, S - коефіцієнти апроксимуючих поліномів критерійних функцій

$$n_{opt} = 2{,}8.$$

$$n_{opt} = 3.$$