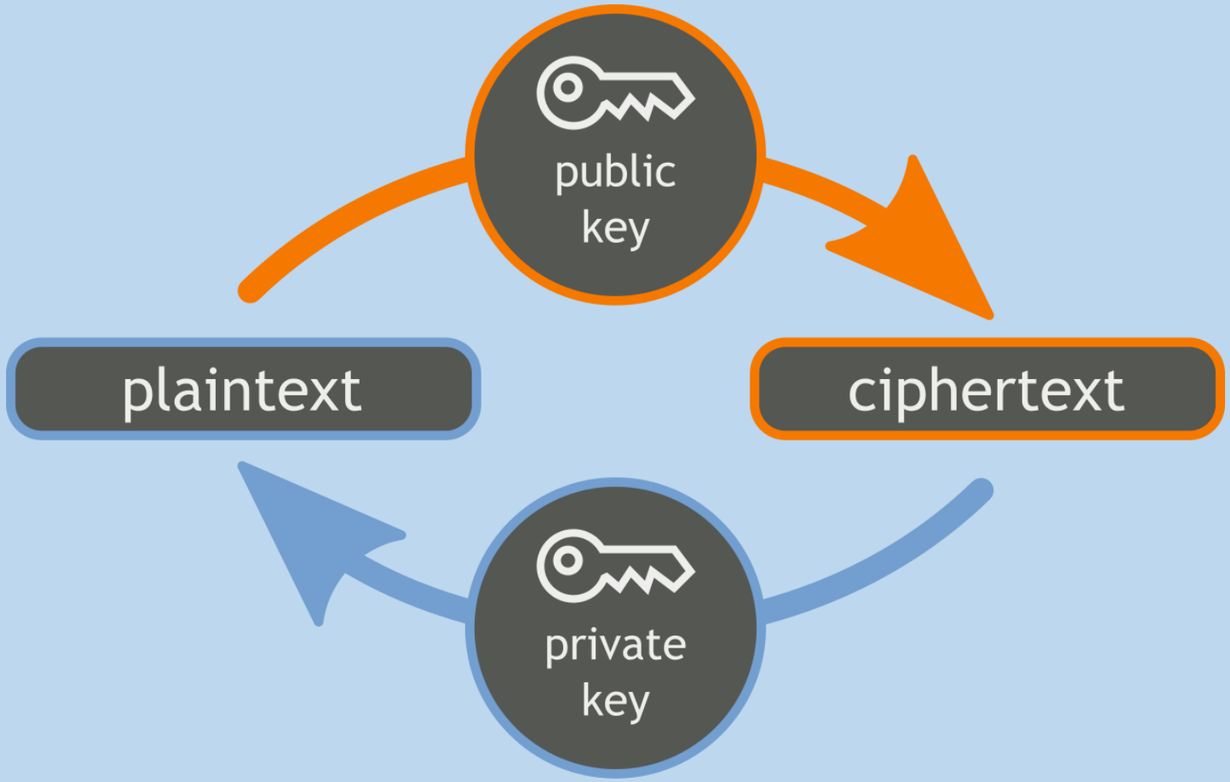
ЛЕКЦІЯ 10

ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Асиметричні криптосистеми



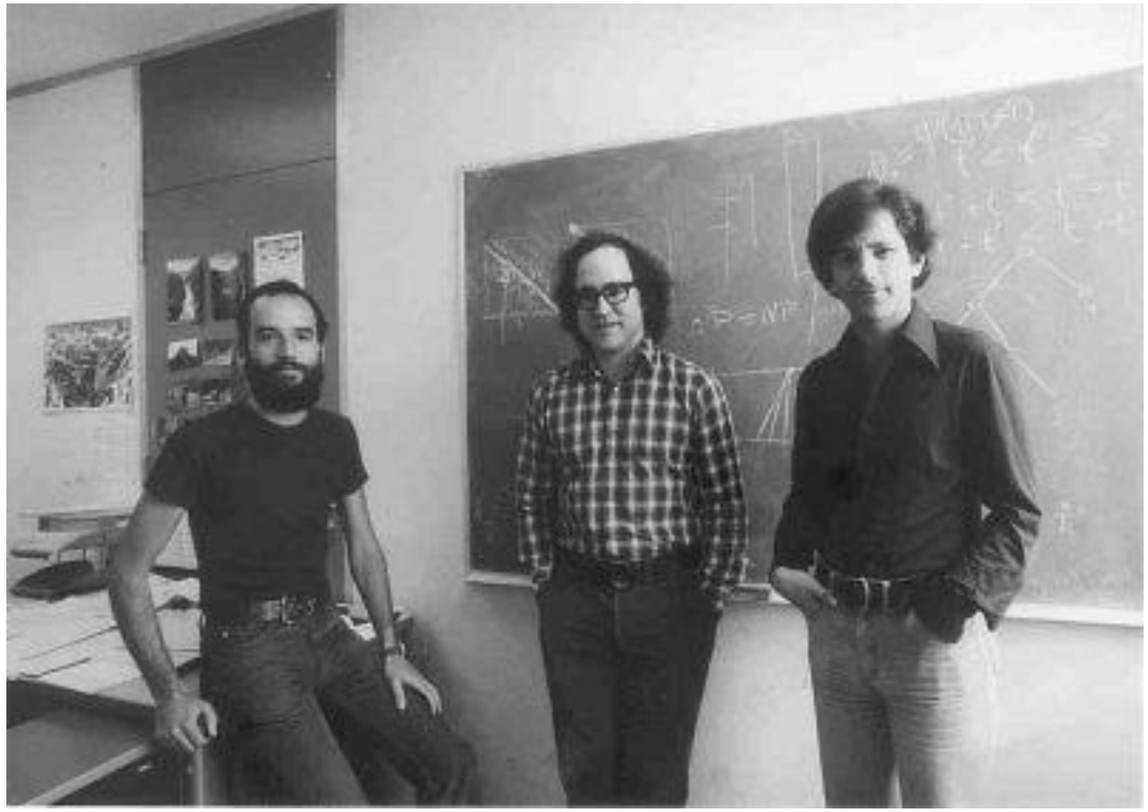
План

1. Алгоритм RSA
2. Алгоритм Ель-Гамаля
3. Алгоритм обміну ключами Діффі-Хелмана

1. Алгоритм RSA

Автори криптоалгоритму RSA (Rivest-Shamir-Adleman) – Рон Рівест, Аді Шамір і Леонард Едлман (1977 рік)

Безпека RSA заснована на складності розкладання на множники великих чисел



Аді Шамір | Рон Рівест | Леонард Едлман

1. Алгоритм RSA

Математична база

Ця система базується на таких двох фактах із теорії чисел:

- ✓ задача перевірки числа на простоту є порівняно легкою;
- ✓ задача розкладання на множники чисел вигляду $n = p \cdot q$ є складною, якщо ми знаємо тільки n, а p і q – великі прості числа (задача факторизації).

1. Алгоритм RSA

Генерація ключів

1. Вибираються два великих випадкових простих числа p і q
2. Обчислюється модуль системи – добуток: $n = p \cdot q$
3. Обчислюється функція Ейлера: $\varphi(n) = \varphi(pq) = (p-1)(q-1)$
4. Випадковим чином вибирається число e (ключ шифрування), таке що $1 < e < \varphi(n)$ та взаємно просте з $\varphi(n)$
5. За допомогою розширеного алгоритму Евкліда знаходиться число d (ключ дешифрування), таке що $ed \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \varphi(n))$
6. (e, n) публікується у якості відкритого ключа
7. (d, n) виконує роль закритого ключа і тримається таємниці

1. Алгоритм RSA

Шифрування:

повідомлення m розбивається на цифрові блоки, менші n;

кожен блок повідомлення m_i зашифровують за формулою:

$$c_i = m_i^e \bmod n$$

Дешифрування:

для кожного зашифрованого блоку c_i обчислюють:

$$m_i = c_i^d \bmod n$$

1. Алгоритм RSA

Приклад 1.1 (генерація ключів):

Дано: повідомлення КНИГА, що складається із символів українського алфавіту та представляється як послідовність цілих чисел
M = 14 17 10 3 0

1. Оберемо p = 3 і q = 11, тоді $n = p \cdot q = 3 \cdot 11 = 33$.
2. Обчислимо $\varphi(33) = 2 \cdot 10 = 20$.
3. Виберемо (випадково) $e = 3$ та перевіримо виконання умов:
   $1 < 3 < \varphi(n)$, НСД(3, 20) = 1.
4. Визначимо d – ключ дешифрування з рівняння $3d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 20)$.
   Для розв’язання рівняння використаємо розширений алгоритм Евкліда (див. вказівки до Лаб6) та зайдемо $d = 7$.

1. Алгоритм RSA

.

Приклад 1.2 (шифрування):

Отже відкритий ключ $e = 3$, закритий ключ $d = 7$.

Зашифруємо повідомлення M= 14 17 10 3 0, що складається із п’яти блоків m_i та отримаємо шифротекст C = 5 29 10 27 0

$c_1 = 14^3 \, mod \, 3 \, 3 = ((14^2 \, mod \, 3 \, 3) \cdot (14^1 \, mod \, 3 \, 3)) \, mod \, 3 \, 3 = (31 \cdot 14) \, mod \, 3 \, 3 = 434 \, mod \, 3 \, 3 = 5;$

$c_2 = 17^3 \, mod \, 3 \, 3 = ((17^2 \, mod \, 3 \, 3) \cdot (17^1 \, mod \, 3 \, 3)) \, mod \, 3 \, 3 = (25 \cdot 17) \, mod \, 3 \, 3 = 425 \, mod \, 3 = 29;$

$c_3 = 10^3 \, mod \, 3 \, 3 = 1000 \, mod \, 3 \, 3 = 10;$

$c_4 = 3^3 \, mod \, 3 \, 3 = 27 \, mod \, 3 \, 3 = 27;$

$c_5 = 0^3 \, mod \, 3 \, 3 = 0 \, mod \, 3 \, 3 = 0.$

3. Алгоритм RSA

Приклад 1.3 (дешифрування):

Для дешифрування потрібно також виконати піднесення до степеню, використовуючи ключ дешифрування 7.

Відкритий текст: M = 14 17 10 3 0 $\Rightarrow$ КНИГА

$m_1 = 5^7 \, mod \, 33 = ((5^4 \, mod \, 33) \cdot (5^3 \, mod \, 33)) \, mod \, 33 = (31 \cdot 26) \, mod \, 33 = 806 \, mod \, 33 = 14;$

$m_2 = 29^7 \, mod \, 33 = ((29^4 \, mod \, 33) \cdot (29^3 \, mod \, 33)) \, mod \, 33 =$

$= (((29^2))^2 \, mod \, 33) \cdot (29^2 \, mod \, 33) \cdot (29 \, mod \, 33)) \, mod \, 33 = (25 \cdot 16 \cdot 29) \, mod \, 33 = 11600 \, mod \, 33 = 17;$

$m_3 = 10^7 \, mod \, 33 = ((10^4 \, mod \, 33) \cdot (10^3 \, mod \, 33)) \, mod \, 33 =$

$= (((10^2))^2 \, mod \, 33) \cdot (10^2 \, mod \, 33) \cdot (10 \, mod \, 33)) \, mod \, 33 = (1 \cdot 1 \cdot 10) \, mod \, 33 = 10 \, mod \, 33 = 10;$

$m_4 = 27^7 \, mod \, 33 = ((27^4 \, mod \, 33) \cdot (27^3 \, mod \, 33)) \, mod \, 33 =$

$= (((27^2))^2 \, mod \, 33) \cdot (27^2 \, mod \, 33) \cdot (27 \, mod \, 33)) \, mod \, 33 = (9 \cdot 3 \cdot 27) \, mod \, 33 = 729 \, mod \, 33 = 3;$

$m_5 = 0^7 \, mod \, 33 = 0 \, mod \, 33 = 0.$

3. Алгоритм RSA

Приклад 1.4:

p

12131072439211271897323671531612440428472427633701410925634549312301964
37304208561932419736532241686654101705736136521417171171379797429933487
1062829803541

q

12027524255478748885956220793734512128733387803682075433653899983955179
85098879789986914690080913161115334681705083209602216014636634639181247
0987105415233

n

14590676800758332323018693934907063529240187237535716439958187101987343
87990053589383695714026701498021218180862924674228281570229220767469065
43401224889672472407926969987100581290103199317858753663710862357656510
50788371429711563734278891146353510271203276516651841172685983798867211
1837205085526346618740053

3. Алгоритм RSA

Приклад 1.4:

e - the public key

65537 has a gcd of 1 with $\phi(n)$, so lets use it as the public key. To calculate the private key, use extended euclidean algorithm to find the multiplicative inverse with respect to $\phi(n)$.

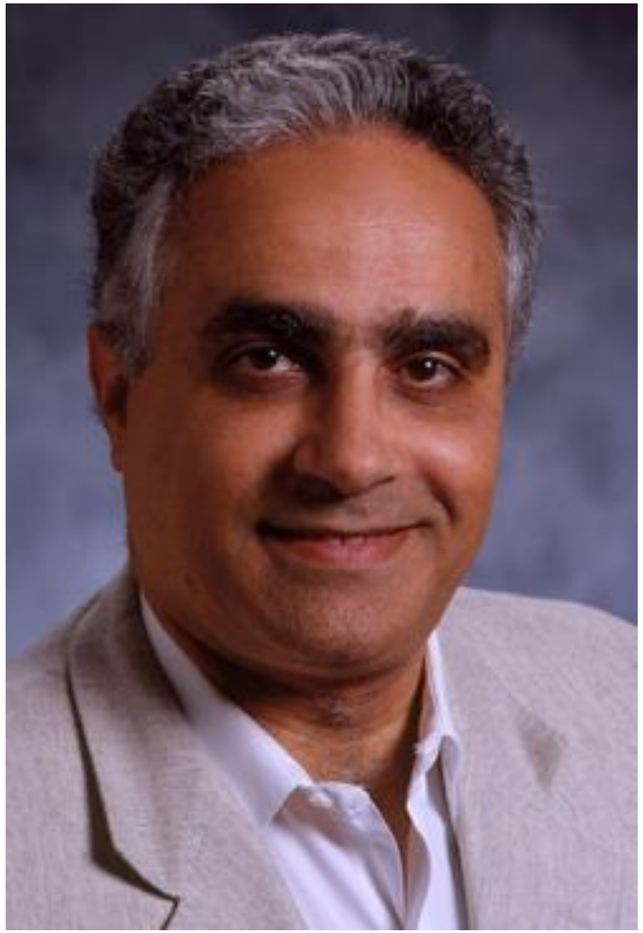
d - the private key

894894250092744443682285459217730939196695860658842574454978544564876748396298183909349419732628796167979706089172836798754993315741611138540888132754881105882471930775825272784379065040156806234235500672400424666656542323835029222154936232894721388664458187891279461234078077257026266440910365023725451397 13

2. Алгоритм Ель-Гамаля

Автор – американський вчений єгипетського походження
Тахер Ель-Гамаль
(1985 рік)

Безпека алгоритму заснована на складності обчислення дискретних логарифмів у скінченному полі



Тахер Ель-Гамаль

2. Алгоритм Ель-Гамаля

Генерація ключів

1. Генерується просте випадкове число p

2. Вибирається генератор g, таке що $1 < g < p - 1$ та $g^{p-1} \bmod p = 1$.

3. Вибирається випадкове число x, таке що $1 < x < p - 1$

4. Обчислюється $y = g^x \bmod p$

5. Відкритими даними є p, g, y

6. Закритим ключем є x

2. Алгоритм Ель-Гамаля

Шифрування:

Повідомлення M шифрується таким чином: вибирається сесійний ключ – випадкове число k, таке що $1 < k < p - 1$;

потім обчислюються

$$a = g^k \bmod p$$

$$b = y^k M \bmod p$$

Пара чисел (a, b) є шифротекстом

Дешифрування:

для дешифрування (a, b) обчислюється

$$M = b(a^x)^{-1} \bmod p$$

або

$$M = b(a^x)^{-1} \bmod p = \\ = b \cdot a^{(p-1-x)} \bmod p$$

2. Алгоритм Ель-Гамаля

Приклад 2.1 (генерація ключів):

1. Нехай $p = 11$, $g = 2$.
2. Виберемо $x = 8$ – випадкове ціле число x таке, що таке що $1 < x < p - 1$.
3. Обчислимо $y = g^x \bmod p = 2^8 \bmod 11 = 3$.
4. Отже, відкритим даними є трійка є 11, 2 та 3, закритим ключем є число $x = 8$.

2. Алгоритм Ель-Гамаля

Приклад 2.2 (шифрування):

Дано: повідомлення $M = 5$.

Вибираємо випадкове ціле число $k = 9$ таке, що $1 < k < p - 1$.

Обчислюємо число

$$a = g^k \bmod p = 2^9 \bmod 11$$
$$= 512 \bmod 11 = 6$$

Обчислюємо число

$$b = y^k M \bmod p = 3^9 \cdot 5 \bmod 11$$
$$= 19683 \cdot 5 \bmod 11 = 9$$

Пара $(6, 9)$ є шифротекстом.

Приклад 2.3 (дешифрування):

Шифротекст $(6, 9)$, закритий ключ $x = 8$.

Обчислюємо M за формулою:

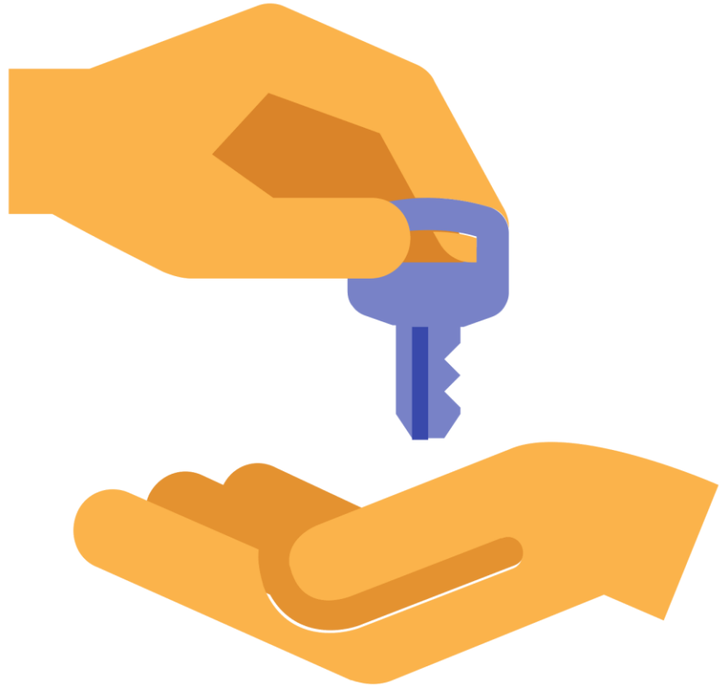
$$M = b(a^x)^{-1} \bmod p =$$
$$= b \cdot a^{(p-1-x)} \bmod p$$
$$= 9 \cdot 6^{(11-1-8)} \bmod 11 = 5$$

Отримали початкове повідомлення

$$M = 5.$$

3. Алгоритм обміну ключами Діффі-Хелмана

Алгоритм обміну ключами Діффі-Хелмана дозволяє двом сторонам отримати спільний секретний ключ, використовуючи незахищений від прослуховування, але захищений від модифікації канал зв'язку



Алгоритм заснований на складності обчислень дискретних логарифмів

3. Алгоритм обміну ключами Діффі-Хелмана

Алгоритм Діффі-Хелмана

1. Абоненти A і B спільно обирають просте число p і ціле число g, що є первісним коренем p.

2. Користувач *A* вибирає випадкове ціле число $x < p$, обчислює $x_A = g^x \, mod \, p$ та відправляє його користувачеві *B*.

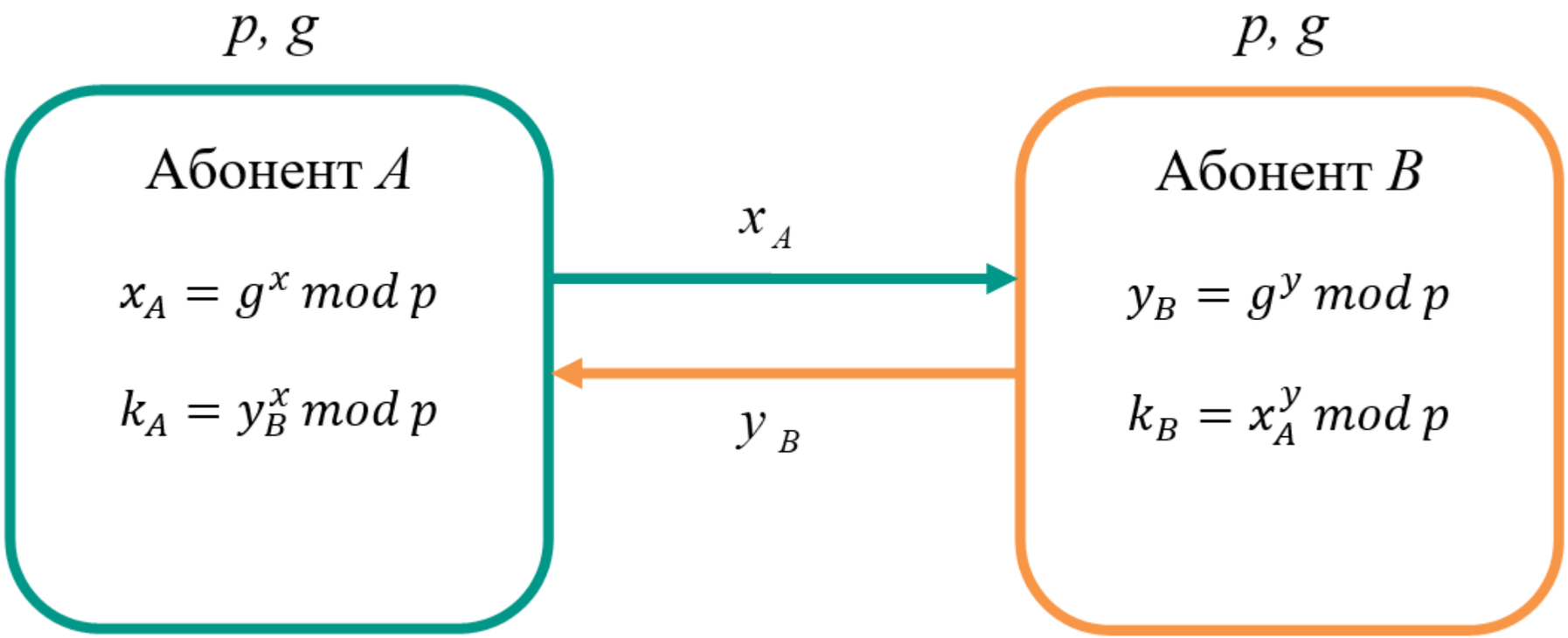
3. Користувач *B* вибирає випадкове ціле число $y < p$, обчислює $y_B = g^y \, mod \, p$ та відправляє його користувачеві *A*.

4. Користувач *A* обчислює закритий ключ за формулою $k_A = y_B^x \, mod \, p$.

5. Користувач *B* обчислює закритий ключ за формулою $k_B = x_A^y \, mod \, p$.

3. Алгоритм обміну ключами Діффі-Хелмана

Схема обміну ключами Діффі-Хелмана



3. Алгоритм обміну ключами Діффі-Хелмана

Приклад 3.1:

1. $p = 11, \mathrm{g} = 2.$

2. $x = 4$, обчислимо $x_A = 2^4 \bmod 11 = 16 \bmod 11 = 5.$

3. $y = 6$, обчислимо $y_B = 2^6 \bmod 11 = 64 \bmod 11 = 9.$

4. $k_A = 9^4 \, mod \, 11 = (9^2)^2 \, mod \, 11 = 4^2 \, mod \, 11 = 16 \, mod \, 11 = 5.$

5. $k_B = 5^6 \, mod \, 11 = (5^3)^2 \, mod \, 11 = 4^2 \, mod \, 11 = 16 \, mod \, 11 = 5.$

Секретний ключ, обчислений обома сторонами – 5.