Лабораторна робота № 7

Тема заняття: ***Елементи комбінаторного аналізу***

Мета: освоєння методів розв'язування задач комбінаторики. Застосування правил суми та добутку, основних комбінаторних конфігурацій перестановок, розміщень і сполучень.

Література

Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас Ф.Г. Комп'ютерна дискретна математика. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – ст.

Зміст роботи

Завдання 1. Під час розв'язування задач указати на використання різних підходів для отримання розв'язку, наприклад основного закону комбінаторики або однієї чи кількох комбінаторних схем перестановок, розміщень або сполучень.

	Завдання
1	Скількома способами можна розподілити 3 квитки до театру серед 10 студентів, якщо а) Розподіляються квитки в різні кінотеатри на один і той самий час, тобто кожний студент може отримати не більше одного квитка. б) Розподіляються квитки на різні сеанси в різний час, тобто кожен студент може отримати будь-яку кількість квитків. в) Розподіляються рівноцінні квитки на один і той самий сеанс.
2	Скількома способами можна: а) розставити 9 осіб у колону, так щоб для кожної людини, крім першої й останньої, перед нею і позаду неї була людина або більшого зросту, або меншого. б) вишикувати дев'ять осіб у три колони по три людини, якщо в кожній колоні люди стоять за зростом і немає двох людей однакового зросту. в) Скількома способами можна обрати 5 осіб з групи 9 осіб для участі в конкурсі?
3	Скільки існує різних матриць з n рядків і m стовпчиків, які складаються з нулів і одиниць. Скільки різних способів розмістити n різних елементів по m місцях? Скількома способами можна заповнити квадратну матрицю розміром $n \times n$ нулями та одиницями так, щоб у кожному рядку і кожному стовпці було рівно k одиниць?
4	На 8 столах стоїть 6 ваз із квітами і 5 свічок. На жодному столі немає двох ваз або двох свічок: а) Скільки існує способів розставити вази і свічки. б) Скільки способів розставити вази та свічки так, щоб на кожному столі був хоча б один предмет.

	в) Скільки існує способів розставити вази і свічки так, щоб рівно два столи були порожніми.
5	Студенту необхідно здати 4 екзамени за 8 днів: а) Скількома способами це можна зробити? б) Скількома способами це можна зробити, якщо відомо, що один із цих екзаменів буде здаватись в останній день? в) Студенту необхідно здати 4 екзамени, серед яких є математика, за 8 днів. Скількома способами це можна зробити, якщо математику треба здати або в перший або в другий день?
6	Кидають дві гральні кістки: а) Скільки можливих комбінацій у сумі дають непарні числа. б) Скільки можливих комбінацій у сумі дають парні числа. в) Скількома способами можна отримати суму очок 8 при киданні трьох гральних кісток?
7	Нехай M={1,2,3,4,5}. Навести а) всі розміщення без повторень з елементів множини M по 3 елементи. б) всі сполучення без повторень з елементів множини M по 3 елементи. в) всі розміщення з повторенням з елементів множини M по 3 елементи.
8	Виписати всі розміщення без повторень по два елементи та розміщення з повтореннями по два елементи для множини A={1, 2, 3, 4}. Виписати всі сполучення з повтореннями по два елементи цієї ж множини.
9	На шахову дошку розміром 8×8 випадковим способом ставляться дві тури. а) Скільки існує способів розстановки тур, при яких вони не б'ють одна одну? б) В скількох випадках, тури б'ють одна одну? в) Скільки існує способів розташування 8 тур на шаховій дошці, щоб вони не били одна одну?
10	Скількома способами можна занумерувати елементи множини {1,2,...,2n} так, щоб а) при парному n так, щоб кожне число, кратне 4, мало непарний номер? б) кожне число, яке ділиться на 3, мало номер, який ділиться на 3? в) 1,2,3 стояли поруч в порядку зростання?
11	Скільки п'ятицифрових натуральних чисел мають одну з цифр 3 або 5? Скільки п'ятицифрових натуральних чисел закінчуються цифрою 3 або 5? Скільки п'ятицифрових натуральних чисел починаються цифрою 3 а закінчуються цифрою 5?

12	Нехай задано три множини: $M_1 = \{a_1, a_2, ...a_{k_1}\}, \quad M_2 = \{b_1, b_2, ...b_{k_2}\}, \quad M_3 = \{c_1, c_2, ...c_{k_3}\}$ які попарно не перетинаються. Кожна послідовність к1, к2, к3 визначає наступну послідовність з елементів заданих множин $M_1 = \{a_1, a_2, ...a_{k_1};\ b_1, b_2, ...b_{k_2};\ c_1, c_2, ...c_{k_3}\}$. Припустимо, що к1+к2+ к3=к. а) Скільки існує варіантів утворити послідовності з елементів заданих множин з повторенням? б) Скільки існує варіантів утворити послідовності з елементів заданих множин без повторень? в) Скільки різних множин можна отримати, якщо з першої множини взяти 5 елементів, з другої 3, з третьої 2.
13	Літери, що входять у вираз ааббсс переставляються всіма способами, при яких поряд з кожною літерою зліва або справа стоїть така ж сама літера. Доведіть, що а) число таких перестановок дорівнює 6; б) для ааабббссс також 6; в) для а4б4с4 90 перестановок; г) для а5б5с5 426 перестановок.
14	Скільки різних рядків можна утворити зі слова MISSISSIPPI а) використовуючи всі букви? б) скільки таких рядків починаються та закінчуються літерою S? в) У скількох таких рядках усі чотири букви S стоять поруч?
15	Скільки існує різних варіантів а) Скільки різних чисел можна отримати, переставляючи цифри в числі 123123? б) Скільки різних трицифрових чисел можна скласти з цифр від 0 до 9, якщо цифри в числі повторюються? в) Скільки різних трицифрових чисел можна скласти з цифр від 0 до 9, якщо цифри в числі не повторюються?

Завдання 2. Розв'язати на наступні завдання:

	Розв’язати рівняння	Обчислити	Спростити вираз
1	$\dfrac{A_{x-1}^{x-3}}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$	$\dfrac{9!-8!}{10!}$	$\dfrac{C_{n+1}^{n-1}}{P_n}$
2	$C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1)$	$\dfrac{4!+3!}{2!}$	$\dfrac{A_{n-2}^{n-4}}{A_{n+1}^{n-1}}$
3	$A_x^3 - 2C_x^4 = 7(x-1)$	$\dfrac{5!+4!}{7!}$	$\dfrac{A_{n+1}^{n}}{P_{n-1}}$

4	$\frac{C_x^{x-3}\cdot A_{x-3}^{x-4}}{C_{x-2}^{x-5}}=5$	$\frac{7!-6!}{8!}$	$\frac{A_{n-2}^{n-3}}{C_{n+2}^{n-1}}$
5	$\frac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}\cdot P_3}=210$	$\frac{8!-6!}{7!}$	$\frac{C_{n-1}^{n-3}}{P_{n-2}}$
6	$3C_x^{x-2}-4C_{x-2}^{x-3}+2C_{x-1}^{x-2}=56$	$\frac{6!+4!}{5!}$	$\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_n^{n-1}}$
7	$P_{x+3}=720A_x^5\cdot P_{x-5}$	$\frac{7!+5!}{5!}$	$\frac{P_{n-1}}{C_n^{n-2}}$
8	$\frac{A_x^{x-4}}{C_x^{x-5}}=55$	$\frac{8!+3!}{7!}$	$\frac{C_n^{n-4}}{A_{n+1}^{n-1}}$
9	$A_x^2+3C_{x-1}^{x-3}=27-13x$	$\frac{8!-5!}{9!}$	$\frac{A_{n+2}^n}{P_{n+1}}$
10	$\frac{P_{x+2}}{A_x^2\cdot P_{x-2}}=5$	$\frac{2!+3!}{5!}$	$\frac{A_{n+1}^{n-1}}{C_{n-1}^{n-2}}$
11	$\frac{A_x^{x-4}}{C_{x-2}^{x-5}}=5+7x$	$\frac{12!-3!}{5!}$	$\frac{A_{n-2}^{n-4}}{P_{n+1}}$
12	$A_x^2+3C_{x-1}^{x-3}=27-13x$	$\frac{2!+6!}{6!}$	$\frac{A_n^{n-4}}{C_{n+1}^{n-1}}$
13	$C_x^{x-2}+C_{x-2}^{x-3}=56$	$\frac{8!-2!}{4!}$	$\frac{A_{n-1}^{n-3}}{P_{n-2}}$
14	$C_{x+4}^{x+1}-C_{x+2}^{x}=15(x+2)$	$\frac{5!-3!}{6!}$	$\frac{P_{n+1}}{C_{n+2}^{n-2}}$
15	$C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^3$	$\frac{8!+2!}{7!}$	$\frac{P_{n+3}}{C_{n-1}^{n-2}}$

Завдання* 3. Тролінг Комбінаторна задача, яка пропонувалася на Всеукраїнській студентській олімпіаді з програмування у тренувальному турнірі, 19 квітня 2012.

У мові тролів 5 приголосних звуків {h, k, m, r, t} і 3 голосних {a, o, u}. Кожне слово починається з приголосної букви, причому в слові не може бути підряд дві голосні або приголосні.

N тролів по черзі називають найкоротше слово, яке ще не назвав ніхто з попередніх тролів. Якщо варіантів декілька, то троль вибирає найменше лексикографічно. Лексикографічний порядок h<k<m<r<t<a<o<u.. При цьому слова порівнюють спочатку по першій букві. Якщо перші літери однакові,

то по другий і т. д. Тобто порядок слів такий: h, k, m, r, t, ha, ho, hu, ka, ko, …Знайти слово, яке назве N-ий троль.

Методичні рекомендації

Правило суми

Якщо елемент А можна вибрати m способами, а елемент В — n способами, то А або В можна вибрати (m + n) способами.

Правило добутку

Якщо елемент А можна вибрати m способами, а після цього елемент В — n способами, то А і В можна вибрати (m * n) способами.

Перестановка, коли допускається повторення:

$$\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Перестановка, коли повторення не допускається:

$$P_n = n!$$

Сполучення без повторення:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сполучення з повторенням:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Розміщення без повторень

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Розміщення з повтореннями

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Контрольні питання

1. Які задачі відносять до класу комбінаторних?
2. У чому полягає комбінаторний принцип додавання?
3. Як формулюється принцип множення? Наведіть приклад.
4. Що називається перестановкою з *n* елементів?
5. За якою формулою обчислюється кількість перестановок?
6. Що називається розміщенням з *m* елементів по *n*?
7. За якою формулою обчислюється A_m^n?
8. Що називається комбінацією з *m* елементів по *n*?
9. За якою формулою обчислюється C_m^n ?