

Лабораторна робота № 4

Формули алгебри висловлень. Рівносильні перетворення формул. Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми

Мета: Ознайомитися з основними поняттями алгебри висловлювань, навчитися будувати та трансформувати формули, а також застосовувати знання до розв'язання логічних завдань. Вивчити основні закони алгебри висловлювань, навчитися виконувати рівносильні перетворення формул та зводити їх до нормальних форм. Опанувати навички роботи з логічними виразами.

Література

Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас Ф.Г. Комп'ютерна дискретна математика. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – ст. 9-15

Зміст роботи

Завдання 1. Перетворити до ДНФ формули:

1	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(C \vee D)$	2	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$
3	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$	4	$(A \rightarrow B) \vee \neg(B \wedge C)$
5	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$	6	$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$
7	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	8	$((A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow \neg A))) \rightarrow \neg B)$
9	$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B))$	10	$((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow \neg A)) \rightarrow \neg B$
11	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B)$	12	$A \rightarrow (B \rightarrow ((C \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg B))$
13	$((P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge (Q \rightarrow R)))$	14	$(P \vee Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
15	$((P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \rightarrow R$		

Завдання 2. Перетворити до КНФ формули:

1	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \wedge P))$	2	$(P \wedge Q) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
3	$(\neg P \rightarrow \neg(Q \wedge P)) \rightarrow (P \vee R)$	4	$((P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)) \rightarrow R$
5	$((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$	6	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$
7	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(C \vee D)$	8	$(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \wedge B)$
9	$(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow R))$	10	$\neg((X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Z))$
11	$\neg((\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y \wedge Z))$	12	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$
13	$((P \vee Q) \rightarrow (P \vee Q)) \rightarrow R$	14	$\neg((\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Z))$
15	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \vee C)$		

Завдання 3. Мінімізувати формули

1	$(P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	2	$X \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee \neg Y \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$
3	$((P \wedge Q) \rightarrow R) \vee (P \rightarrow (Q \wedge R))$	4	$((A \rightarrow (B \wedge C)) \wedge \neg((B \wedge C) \rightarrow A))$
5	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$	6	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (\neg A \vee C)$
7	$(P \rightarrow D) \rightarrow ((Q \rightarrow D) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow D))$	8	$(A \rightarrow B) \wedge ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \vee C))$
9	$((P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \vee R)) \rightarrow (P \vee R)))$	10	$((Q \rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \rightarrow Q))$
11	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$	12	$((A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
13	$(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$	14	$((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
15	$(X \wedge Y) \vee \neg X \wedge (Y \vee (X \wedge Z)) \wedge \neg(X \wedge (\neg Y \vee Z) \vee (Y \wedge Z))$		

Методичні рекомендації

Нормальні форми логічних висловлювань

Розрізняють дві нормальні форми логічних висловлювань: диз'юнктивну (ДНФ) і кон'юнктиву (КНФ).

Диз'юнктивною нормальною формою логічного висловлювання називається формула вигляду: $D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_n$, де $n \geq 1$ і D_i - змінна або її заперечення, кон'юнкція або її заперечення. Довільна формула перетворюється до ДНФ шляхом послідовного застосування до неї тотожностей (1) – (5) і (7).

Кон'юнктивною нормальною формою логічного висловлювання називається формула вигляду: $C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$, де $n \geq 1$ і C_i - змінна або її заперечення, диз'юнкція або її заперечення.

Довільна формула перетворюється до КНФ шляхом послідовного застосування до неї тотожностей (1) – (6).

Тотожності:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A); \quad (1)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B; \quad (2)$$

$$\neg \neg A \equiv A; \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B; \quad (4)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B; \quad (5)$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C); \quad (6)$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad (7)$$

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A; \quad (8)$$

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A; \quad (9)$$

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv B; \quad (10)$$

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \equiv B. \quad (11)$$

Приклад 1. Перетворити до ДНФ формулу $F = \neg(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$.

Послідовність перетворень: застосувати тотожності (5), (7).

$$F = (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) = ((\neg A \vee \neg B) \wedge A) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B).$$

Ця ДНФ означає, що формула F дорівнює істинній тоді і тільки тоді, коли або A є хибною, а B істинною, або A істинною, а B хибною. Іншими словами, формула F виражає еквівалентність висловлювань A та B.

Приклад 2. Перетворити до КНФ формулу $F = (A \rightarrow (B \vee \neg C)) \rightarrow D$.

Послідовність перетворень: застосувати тотожності (2), (4), (6).

$$F = (\neg A \vee B \vee \neg C) \rightarrow D = \neg(\neg A \vee B \vee \neg C) \vee D = (A \wedge \neg B \wedge C) \vee D = (D \vee A) \wedge (D \vee (\neg B \wedge C)) = (D \vee A) \wedge (D \vee \neg B) \wedge (D \vee C).$$

Приклад 3. Мінімізувати формулу:

$$F = \neg(\neg(\neg A \wedge (\neg A \vee B)) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge \neg(B \wedge \neg C) \wedge \neg((A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg C))).$$

Послідовність перетворень заданої формули:

$$F = \neg(\neg(\neg A) \wedge \neg((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C)) \wedge \neg(\neg C)) = \neg(A \wedge \neg(B \wedge C)) = \neg((A \wedge \neg B) \wedge C) = \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg C = \neg A \vee B \vee \neg C.$$

Завдання 4. Для заданих функцій отримати ДДНФ.

№	f	№	f	№	f	№	f
1	00110111	2	01101110	3	11011100	4	10111001
5	01110011	6	11100110	7	11001101	8	10011011
9	10111010	10	01110101	11	11101010	12	11010100
13	11111000	14	11110001	15	11100011	16	11000111

Завдання 5. Для заданих функцій отримати МДНФ.

№	f	№	f	№	f	№	f
1	11100101	2	11001011	3	10010111	4	00101111
5	10111100	6	01111001	7	11110010	8	11100101
9	10010111	10	00101111	11	01011110	12	10111100
13	11100110	14	11001101	15	10011011	16	00110111

Методичні рекомендації:

Для заданої функції отримати ДДНФ (Досконала диз'юнктивна нормальна форма):

	x	y	z	f(x, y, z)
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Виділимо в таблиці рядки 3, 6, 8, де функція =1.

1 рядок - $x^0, y^1, z^0 = \neg x, y, \neg z$

2 рядок - $x^1, y^0, z^1 = x, \neg y, z$

3 рядок - $x^1, y^1, z^1 = x, y, z$

ДДНФ для даної функції має вид: $f(x, y, z) = \neg x y \neg z \vee x \neg y z \vee x y z$

Для заданих функцій отримати МДНФ:

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	f(x ₁ , x ₂ , x ₃ , x ₄)
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	1
4	0	0	1	1	1
5	0	1	0	0	1
6	0	1	0	1	1
7	0	1	1	0	0
8	0	1	1	1	0
9	1	0	0	0	0
10	1	0	0	1	1
11	1	0	1	0	1
12	1	0	1	1	1
13	1	1	0	0	1
14	1	1	0	1	0
15	1	1	1	0	0
16	1	1	1	1	0

Алгоритм Квайна складається з таких кроків:

1. Записати ДДНФ (ДКНФ) заданої функції.

3 рядок - $x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^0 = \neg x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4$

- 4 рядок - $x_1^0 x_2^0 x_3^1 x_4^1 = \neg x_1 \neg x_2 x_3 x_4$
 5 рядок - $x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^0 = \neg x_1 x_2 \neg x_3 \neg x_4$
 6 рядок - $x_1^0 x_2^1 x_3^0 x_4^1 = \neg x_1 x_2 \neg x_3 x_4$
 10 рядок - $x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^1 = x_1 \neg x_2 \neg x_3 x_4$
 11 рядок - $x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^0 = x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4$
 12 рядок - $x_1^1 x_2^0 x_3^1 x_4^1 = x_1 \neg x_2 x_3 x_4$
 13 рядок - $x_1^1 x_2^1 x_3^0 x_4^0 = x_1 x_2 \neg x_3 \neg x_4$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 x_4 \vee \neg x_1 x_2 \neg x_3 \neg x_4 \vee \neg x_1 x_2 \neg x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \neg x_3 x_4 \vee x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4 \vee x_1 \neg x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \neg x_4$$

2. Виконати всі можливі операції неповного диз'юнктивного (кон'юнктивного) склеювання. Склеювання, визначається формулою $ab \vee \neg ab = b$

3. Виконати всі можливі операції диз'юнктивного (кон'юнктивного) поглинання.

Поглинання, визначається формулою $a \vee ab = a$. Видалення літерала, визначається за формулою $a \vee \neg ab = a \vee b$.

4. Результуюча формула є скороченою МДНФ (МКНФ) даної функції:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 \neg x_3 x_4$$

Завдання 6. Бульова функція $f(x, y, z)$ задана формулою алгебри логіки. Спростити її за допомогою карт Карно (Таблиці істинності були побудовані у лабораторній роботі №3).

1	$f = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$	2	$f = (x \rightarrow z) \rightarrow (\neg x \wedge y) \rightarrow (x \vee y)$
3	$f = \neg x \wedge (y \vee \neg z) \oplus (\neg(x \vee y)) y \vee z$	4	$f = ((x \rightarrow (y \vee z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)))$
5	$f = (((x \wedge \neg z) \vee \neg y) \oplus (\neg(z \vee \neg x))) \vee y$	6	$f = \neg(z \vee (\neg y \wedge x)) \rightarrow (\neg x \wedge (\neg z \vee y))$
7	$f = ((x \wedge \neg y) \vee z) \wedge (\neg x \vee y) \vee \neg z$	8	$f = (\neg(x \wedge y)) \oplus (\neg(y \vee \neg z) \wedge x)$
9	$f = ((\neg y \wedge \neg z) \vee \neg x) \wedge (\neg(z \vee y) \wedge x)$	10	$f = \neg(((\neg x \wedge z) \wedge y) \vee (x \vee \neg y))$
11	$f = (x \rightarrow y) \oplus (y \vee z)$	12	$f = \neg(\neg z \vee (\neg y \wedge \neg x) \wedge (\neg z \vee y))$
13	$f = (x \vee y) \oplus (y \rightarrow z)$	14	$f = (x \oplus y) \rightarrow y \wedge z$
15	$f = (((x \wedge y) \rightarrow z) \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow z)$	16	$f = (x \wedge y) \vee (y \rightarrow z)$

Методичні рекомендації

Карта Карно – це графічний метод, розроблений для спрощення булевих функцій. Вони надають наочне уявлення про взаємозв'язок між вхідними та вихідними змінними логічної функції та дозволяють швидко визначити мінімальну логічну формулу, яка описує цю функцію. **Кроки мінімізації:**

1. Побудувати таблицю істинності.
2. За результатами таблиці істинності побудувати карту Карно:
 - Визначити кількість змінних вхідного виразу.
 - Створити карту Карно відповідного розміру (2^n клітин для n змінних).
 - Заповнити клітинки карти значеннями функції.
3. Групування клітин:
 - Об'єднати в групи сусідні клітини, що містять одиницю. Групи повинні бути прямокутними і мати розмір, що дорівнює ступеню двійки (2, 4, 8, ...).
 - Групи можуть перетинатися.
4. Скласти отриманий вираз:
 - Для кожної групи скласти вираз, що відповідає спільним змінним для всіх клітин групи.
 - Об'єднати всі отримані вирази.

Завдання 7. Реалізувати завдання 6 програмно.

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття карти Карно.
2. Наведіть приклади карт Карно для двох, трьох, чотирьох змінних.
3. Як визначати сусідні клітинки у картах Карно?
4. Наведіть приклади об'єднання клітинок в картах Карно для чотирьох змінних.
5. Наведіть правило запису логічного виразу при об'єднанні клітинок карти Карно з одиницями.
6. Наведіть правило запису логічного виразу при об'єднанні клітинок карти Карно з одиницями.