ЛЕКЦІЯ 3.

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ. АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

ПЛАН

1. Алгебра висловлень
2. Операції над висловлюваннями
3. Закони алгебри логіки. Еквівалентні перетворення.
4. Синтез логічних схем

АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

ВИСЛОВЛЮВАННЯ

У логіці, висловлюванням називають речення, яке можна однозначно оцінити як істинне чи хибне, але не одночасно.

Іншими словами, це твердження, про яке можна сказати, що воно відповідає дійсності чи ні.

Приклади висловлювань:

- Київ є столицею України.
- Завтра буде сонячно.
- Сніг білий.
- 2 + 2 = 5.
- Котра година?
- Підеш сьогодні в кіно?
- Я завжди говорю неправду.

ПРИКЛАД

Визначте, що є висловлюваннями:

1. Земля обертається довкола Сонця.
2. Який сьогодні день?
3. Це дуже гарно!
4. Якщо сьогодні вівторок, то завтра вівторок.
5. $x + y > 5$

1. Висловлювання (істинне)
2. Не висловлювання (питання)
3. Не висловлювання (вигук)
4. Висловлювання (хибне)
5. Не висловлювання (вираз)

Значення істинності висловлювання – це його характеристика, яка вказує на те, чи відповідає висловлювання дійсності. Воно може бути лише одним із двох: "істиним" (T) або "хибним" (F).
Висловлювання у логіці зазвичай позначають великими латинськими літерами. Такі літери називають ***пропозиційними змінними*** або атомами. Вони служать для формалізації висловлювань в логічних системах.

Просте висловлювання - це висловлювання, яке не містить логічних спільників і кванторів, і виражає одну повну думку.

Складне висловлювання - це висловлювання, яке складається з кількох простих висловлювань, поєднаних логічними союзами, кванторами чи предикатами.

Приклад:
"Сонце світити і небо блакитне", "Якщо піде дощ, то я візьму зонтик".
"Сьогодні сонячно", "Кіт ловити мишу", "Число 5 є непарним".

ОПЕРАЦІЇ НАД ВИСЛОВЛЮВАННЯМИ

ЛОГІЧНІ ЗВ'ЯЗКИ У ВИСЛОВЛЮВАННЯХ

Із простих висловлювань можна будувати складні висловлювання, використовуючи атомарні формули і логічні зв’язки.

Основні логічні зв'язки у висловлюваннях:

- Заперечення (¬, не)
- Кон'юнкція (∧, і)
- Диз'юнкція (∨, або)
- Імплікація (→, якщо…, то)
- Еквівалентність (↔, тоді і тільки тоді)

КОН’ЮНКЦІЯ

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Кон’юнкція (логічний добуток) - це висловлювання, яке утворено з'єднанням двох простих висловлювань за допомогою сполучника і.

Кон’юнкція висловлювань **A∧B** істинна, якщо обидва висловлював істинні і хибна в противному випадку.

Застосовувані позначення: A і B, A Λ B, A & B, A and B

ПРИКЛАД

A - сьогодні сонячно.

B - я піду гуляти.

Кон'юнкція A ∧ B буде істинною тільки тоді, коли і сьогодні сонячно, і я піду гуляти.

Якщо хоча б одне з цих висловлювань хибне, то й вся кон'юнкція буде хибною.

Таблиця істинності

A ***(Сьогодні сонячно)***	B ***(Я піду гуляти)***	A ∧ B
Істина	Істина	Істина
Істина	Хіба	Хіба
Хіба	Істина	Хіба
Хіба	Хіба	Хіба

ВЛАСТИВОСТІ КОН'ЮНКЦІЇ

Комутативність. $A \wedge B = B \wedge A$ (порядок висловлювань не має значення)

Асоціативність. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ (можна об'єднувати кон'юнкції довільним чином)

Ідемпотентність. $A \wedge A = A$ (кон'юнкція висловлювання з самим собою дорівнює самому висловлюванню)

Закони поглинання. $A \wedge (A \vee B) = A$

$A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$

ДИЗ’ЮНКЦІЯ

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Диз’юнкція (логічна сума) - це висловлювання, яке утворено з'єднанням двох простих висловлювань за допомогою сполучника або.

Диз’юнкція висловлювань **A∨B** істинна, якщо хоча б одне з висловлювань істинно, і хибна в противному випадку.

Для операції прийняті такі умовні позначення: A або B, A V B, A or B, A || B

ВЛАСТИВОСТІ ДИЗ'ЮНКЦІЇ

Комутативність. $A \lor B = B \lor A$ (Порядок висловлювань не впливає на результат).

Асоціативність. $(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$ (Диз'юнкцію можна обчислювати попарно).

Ідемпотентність. $A \lor A = A$ (Повторення одного і того ж висловлювання не змінює результат).

Закони де Моргана: $\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$

$\neg(A \land B) = \neg A \lor \neg B$

ЗАПЕРЕЧЕННЯ

A	¬ A
1	0
0	1

Заперечення – це висловлювання, яке утворено з простого висловлювання за допомогою сполучника не.

Заперечення**, ¬ A** (не А) істинно, якщо А хибний, і навпаки, хибно, якщо А істинно.

Для операції заперечення прийняті такі умовні позначення: Ā, not A, ¬A, ! A.

ІМПЛІКАЦІЯ

A	B	A →B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Імплікація - це висловлювання, яке утворено з'єднанням двох простих висловлювань за допомогою сполучника *якщо…то*.

Імплікація висловлювань **A → *B*** (якщо *A*, то *B)* хибна, тоді і тільки тоді, коли A істинне і B - хибне.

Позначення: якщо A, то B; if A then B; A → B.

АНТЕЦЕДЕНТ І КОНСЕКВЕНТ У ЛОГІЦІ

Антецедент і консеквент – це основні компоненти умовного (імплікативного) судження, тобто такого, де одна пропозиція (наслідок) випливає з іншої (умови).

Антецедент (від лат. *antecedens* – передує) – це частина умовного судження, що виражає умову. Це "якщо" частина речення.

Консеквент (від лат. *consequens* – те, що слідує) – це частина умовного судження, що виражає наслідок. Це "тоді" частина речення.

ПРИКЛАД

Аналіз імплікації: "Якщо йде дощ, то вулиця мокра"

A	B	A →B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Йде дощ	Вулиця мокра	Імплікація
Так	Так	Істина
Так	Ні	Хіба
Ні	Так	Істина
Ні	Ні	Істина

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ

A	B	A$\leftrightarrow$B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Еквівалентність (подвійна імплікація) - це висловлювання, яке утворено з'єднанням двох простих висловлювань за допомогою сполучника тоді і тільки тоді, коли.

Еквівалентність **A↔*B*** (A тоді і тільки тоді, коли B) істинна у випадку, коли A і B істинні або хибні одночасно і хибна в противному випадку.

Застосовується позначення: A ↔ B, A ~ B, A ⇔ B або A ≡ B.

ЛОГІЧНЕ ДОДАВАННЯ ЗА МОДУЛЕМ 2

A	B	A⊕B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Логічне додавання за модулем 2 - бінарна *операція, що виключає або.*

Позначається як A⊕*B*, читається як “або A або B”.

Висловлення A⊕*B* істинно, коли одне з висловлювань A чи B є істинним (висловлювання A і B набувають різних значень).

Має місце рівність $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$, яка означає, що логічне додавання за модулем є запереченням еквівалентності.

Застосовується позначення: A XOR B, A ⊕ B.

ЗВ'ЯЗОК З ІНШИМИ ЛОГІЧНИМИ ОПЕРАЦІЯМИ

Виключне або можна виразити через інші логічні операції:

$A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$

$A \oplus B = (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$

Заперечення виключного або:

$\neg(A \oplus B) = A \leftrightarrow B$

ВЛАСТИВОСТІ ВИКЛЮЧНОГО АБО

1. **Ідемпотентність не виконується $A \oplus A \neq A$**

2. **Комутативність $A \oplus B = B \oplus A$ (**Порядок операндів не впливає на результат**)**

3. **Асоціативність $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$** (можна об'єднувати операнди у довільному порядку**)**

4. **Дистрибутивність $A \wedge (B \oplus C) = (A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$**

ШТРИХ ШЕФФЕРА

Штрих Шеффера - бінарна операція.
Позначається A|B.

A	B	A|B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Висловлювання A|B істинне, тоді і лише тоді, коли хоча б одне з висловлень A і B хибне. Тобто операція штрих Шеффера є запереченням операції кон’юнкції.

Має місце рівність A|B = $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

СТРІЛКА ПІРСА

A	B	A ↑ B
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Стрілка Пірса або функція Вебба. Позначається $A \uparrow B$.

Висловлювання $A \uparrow B$ істинне, тоді і лише тоді, коли A і B – хибні. Тобто операція стрілка Пірса є запереченням операції диз’юнкції.

Має місце рівність $A \uparrow B = \neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$

ПРИКЛАД

Позначимо

A - "Сьогодні сонячно"

B - "Завтра піде дощ"

Висловлювання зі стрілкою Пірса

$A \uparrow B$
Невірно, що сьогодні сонячно або завтра піде дощ

Сьогодні похмуро і завтра не буде дощу.

Висловлювання зі штрихом Шеффера

$A \mid B$
Невірно, що сьогодні сонячно і завтра піде дощ

Або сьогодні не сонячно, або завтра не буде дощу

обидва твердження невірні.

ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Сформулюйте висловлювання:

1. *"Або сьогодні не понеділок, або завтра не вівторок*" за допомогою штриха Шеффера.

2. "Якщо йде дощ, то вулиця мокра" за допомогою стрілки Пірса.

Символи $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ « називаються *бінарними* зв’язками, тому що вони з'єднують два висловлювання.

Символ $\neg$ - *унарним* зв’язком, тому що застосовується тільки до одного висловлювання.

ПРИКЛАД

Представити логічними формулами наступні висловлювання.

1) Сьогодні не світить сонце.
2) Піду гуляти або залишуся удома.
3) Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду.
4) Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії.
5) Родину варто створювати тоді і тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові і поваги.
6) На вулиці ясно або похмуро.
7) Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану постать.

1) $\neg A$ 2) $A \vee B$ 3) $A \wedge B$ 4) $A \rightarrow B$ 5) $A \rightarrow (B \wedge C)$ 6) $A \oplus B$ 7) $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Формулу називають **логічно загальнозначущою** або *тавтологією*, якщо вона набуває значення 1 на всіх інтерпретаціях.

Формулу називають **логічною суперечністю** або *протиріччям*, якщо вона набуває значення 0 на всіх інтерпретаціях.

Формулу називають такою, **що виконуєтьс**я, якщо вона набуває значення 1 хоча б на одній інтерпретації.

ПРИКЛАД

$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$.

Ця формула є тавтологією, тобто завжди істинна. Її можна довести за допомогою таблиці істинності або використовуючи закони логіки.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

ПРИКЛАД

Чи є висловлювання тавтологією?

$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B.$

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$x1 \vee x2$ - диз'юнкція

$x1 \wedge x2$ - кон'юнкція

$x1 \oplus x2$ - додавання по модулю

$x1 \rightarrow x2$ - імплікація

$x1 \sim x2$ - еквівалентність

$x1 \mid x2$ – штрих Шеффера

$x1 \uparrow x2$ – стрілка Пірса

ЗАКОНИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ. ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ.

ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Еквівалентним перетворенням формули F є її заміна на рівносильну формулу за допомогою певного правила.
Еквівалентне перетворення формули F’ на формулу F” записується у вигляді F’= F”.

Для опису правил еквівалентних перетворювань визначимо поняття підформули:

- якщо F*G – формула, то F і G – її підформули (* - один з логічних зв'язків ∧, ∨, →, ↔);
- якщо F - формула, то F – її підформула;
- якщо G – підформула формули F, а H – підформула формули G, то H – під формула формули F;
- підформулою є тільки вираз, який можна отримати за допомогою двох попередніх пунктів.
-

Наприклад, для формули ((A→ B) ↔ C) ∧(A ∨ B) під формулами є вона сама, а також:
(A→ B) ↔ C); (A ∨ B); A→ B; A∨B; A; B; C.

ПРАВИЛА ЕКВІВАЛЕНТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

1. Закони ідемпотентності:

$X \vee X = X \qquad X \wedge X = X$

2. Закони комутативності:

$X \vee Y = Y \vee X; \qquad X \wedge Y = Y \wedge X$

3. Закони асоціативності:

$X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z \qquad X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$

4. Закони дистрибутивності:

$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \qquad X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

5. Закони де Моргана:

$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y \qquad \neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$

6. Закони поглинання:

$X \wedge (X \vee Y) = X \qquad X \vee (X \wedge Y) = X$

7. Закон зняття подвійного заперечення:

$\neg \neg X = X$

8. Закон протиріччя:

$X \wedge \neg X = X$

9. Закон виключеного третього:

$X \vee \neg X = I$

10.Дії з логічними константами:

$X \wedge I = X \quad X \wedge X = X \quad X \vee I = I \quad X \vee X = X$

Операції імплікації та еквіваленції можна виразити через кон'юнкцію, диз'юнкцію та інверсію таким чином:

11. $X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$

12. $X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$

13.Закони склеювання:

$(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) = X \qquad (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) = X$

Застосовуючи правила 4, 9, 10 отримуємо

$(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) = X \wedge (Y \vee \neg Y) = X \wedge I = X$

$(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) = X \vee (Y \wedge \neg Y) = X \vee X = X$

14.Закони узагальненого склеювання:

$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$

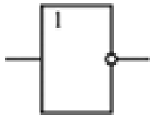
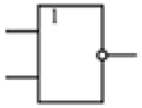
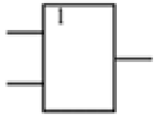
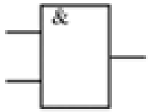
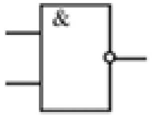
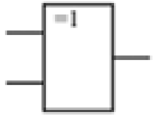
$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) = (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)$

СИНТЕЗ ЛОГІЧНИХ СХЕМ

Базисні елементи графічно зображують у вигляді прямокутників з позначками логічних операцій.

Прямокутники мають інверсні входи і виходи, що зображаються у вигляді кружків.

Заперечення позначається незафарбованим кружком на вході змінної до прямокутника-зображення логічної операції.

Інвертор *(не)*		*(або / ні)* $\overline{A + B}$		*діз'юнктор (або)*	
кон'юнктор *(І)*		*(і / ні)* $\overline{A \cdot B}$		*нерівнозначність*	

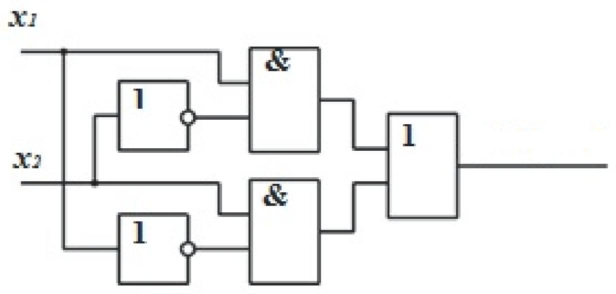
ПРИКЛАД

Скласти за структурною формулою відповідну логічну схему:

$X \wedge Y \vee \neg (X \vee Y)$

ПРИКЛАД

Скласти за логічною схемою відповідну структурну формулу.



ПРИКЛАДИ

Представити логічну функцію

$f = (x \vee y) \wedge (y \rightarrow z)$

у різний спосіб:

таблицею істинності, вектором значень, порядковим номером, номерами наборів.

x	y	z	$x \vee y$	$y \rightarrow z$	$f = (x \vee y) \wedge (y \rightarrow z)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Вектор значень

Вектор значень функції f - це послідовність значень функції, отриманих при всіх можливих комбінаціях змінних x, y, z..

З таблиці істинності можна отримати вектор: 00011101.

Порядковий номер

Щоб визначити порядковий номер, потрібно перевести вектор значень у десяткове число.

Отже, порядковий номер функції – 29.

Номери наборів, на яких f = 1

Функція f дорівнює 1 на наборах: 3(011), 4(100), 5(101), 7(111).

THANK YOU