ЛЕКЦІЯ 1.

ТЕОРІЯ МНОЖИН

ПЛАН

1. Організаційні моменти

2. Дискретна математики & комп'ютерна дискретна математика

3. Теорія множини

    3.1 Основні поняття

    3.2 Способи подання множин

    3.3 Графічна інтерпретація множин

    3.4 Операції над множинами

    3.5 Алгебра множин

16 годин лекції

32 години лабораторних робіт

Екзамен

Лабораторна робота + Індивідуальна робота = 60 балів

Тести (модульний контроль) – 2 (2 х 20 = 40 балів)

Л.р. + І.р. + Тести = 100 балів.

Освітній портал - курс «Комп'ютерна дискретна математика»

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКИ & КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Дискретна математика це галузь математики,

- що вивчає властивості будь-яких дискретних структур.
- займається вивченням структур, що складаються з окремих, розділених елементів, таких як числа, графи чи логічні вирази;
- що досліджує об'єкти, які можна порахувати чи перелічити по одному.

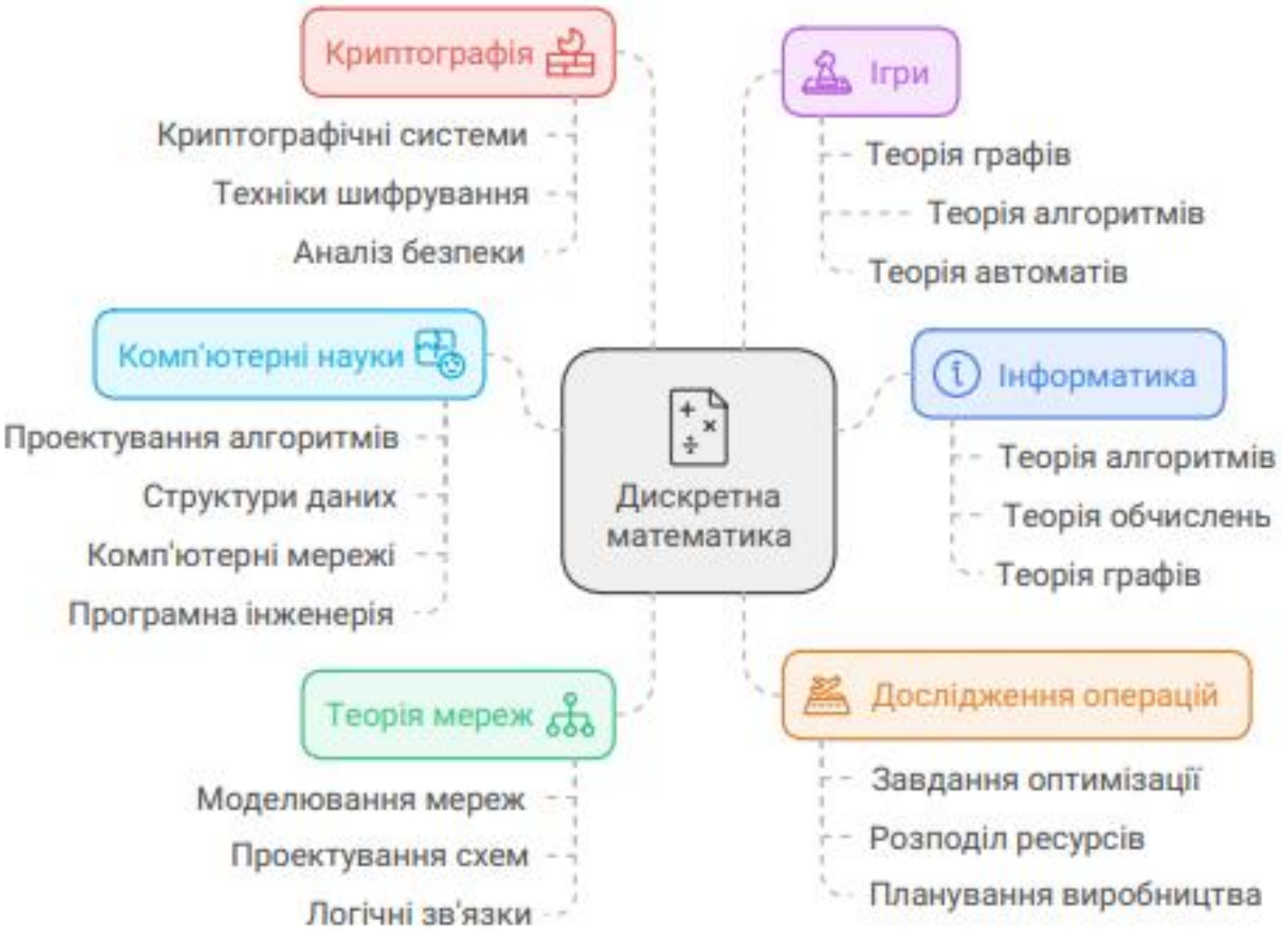
Дискретна математика - це фундамент для багатьох сучасних наук, оскільки вона дозволяє моделювати та аналізувати процеси, що відбуваються у дискретних системах, таких як комп'ютери, мережі, логічні схеми тощо.

КОМП’ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

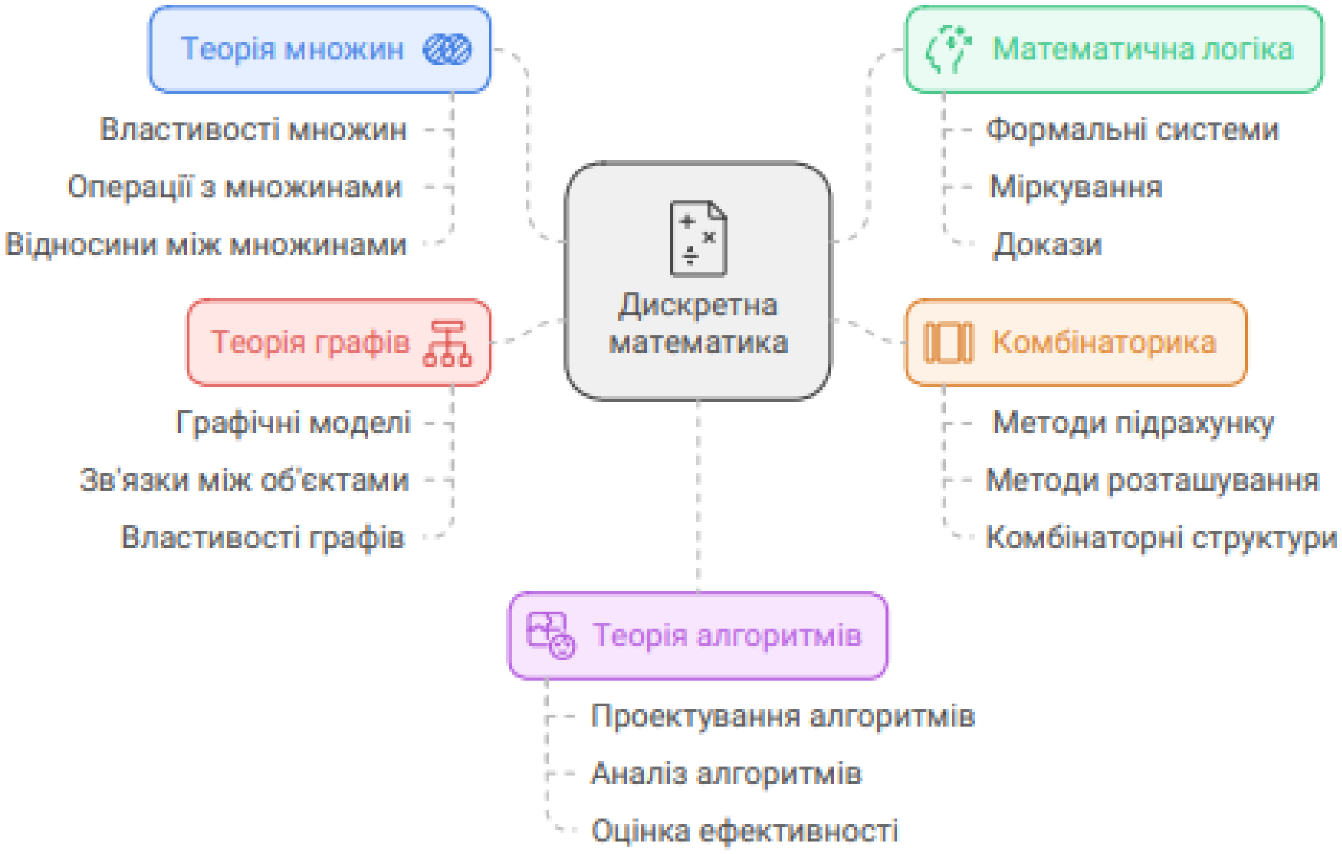
Комп'ютерна дискретна математика застосовує поняття та методи дискретної математики для вирішення завдань, що виникають в інформатиці.

Дискретна математика надає теоретичні основи, а комп'ютерна дискретна математика показує, як ці основи можна використовувати для розв'язання конкретних завдань.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА ФУНДАМЕНТ ДЛЯ БАГАТЬОХ СУЧАСНИХ НАУК



ОСНОВНІ РОЗДІЛИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ



3

ТЕОРІЯ МНОЖИН

“ Множина – це багато, що мислиться як єдине ціле ”

ГЕОРГ КАНТОР

1845-1918

ГЕОРГ КАНТОР ОСНОВНІ ІДЕЇ:

Множина.
Будь-яка сукупність об'єктів може бути розглянута як множина.

Елемент множини.
Кожен об'єкт, що входить до множини, називається елементом.

Потужність множини.
Ввів поняття потужності, яке характеризує "розмір" множини.

Нескінченні множини.
Довів, що існують різні "розміри" нескінченності.

Континуум-гіпотеза.
Одна з найвідоміших нерозв'язаних проблем математики, сформульована Кантором

3.1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН

ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ

Множина – це фундаментальне поняття, яке використовується для опису сукупності об'єктів. Ці об'єкти можуть бути будь-чим: числами, літерами, людьми, ідеями тощо. Головна умова – об'єкти у множині мають бути чітко визначені та не повторюватися.

Види множин

Порожня множина

Скінчена множина

Нескінчена множина

ПОЗНАЧЕННЯ І ОЗНАЧЕННЯ

Для позначення окремих елементів, що входять до складу множин використовуються малі літери латинського алфавіту (a, b, c). Самі ж множини позначаються великими літерами того ж алфавіту (A, B, C).

Запис $a \in A$ означає, що елемент а належить множині А. Якщо а не є елементом множини А, то пишуть $a \notin A$.

Множина, яка не містить жодного елемента називається порожньою і позначається $\emptyset$.

Множина всіх підмножин множини А називається булеаном і позначається як P(A).

Кількість елементів множини А називається її потужністю і позначається $|A|$.

ПРИКЛАД

Нехай є множина A = {a, b}.
Знайти булеан P(A).

Булеан буде складатися з:

Порожня множина: ∅
Одиночні підмножини: {a}, {b}
Підмножина, що містить всі елементи: {a, b}

Отже, булеан множини A: P(A) = {∅, {a}, {b}, {a, b}}.

Потужності множин = 2 , булеан множини = 4.

Якщо |A|=n , тоді P(A)=2^n .

ПРИКЛАД

Чому дорівнює булеан множини
A={1, 2, 3, 4, 5} =?

Порожня множина: ∅

Одноелементні підмножини: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}

Двохелементні підмножини: {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4} , {3, 5}, {4, 5}

Триелементні підмножини:
{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5} , {2, 3, 4}, {2 , 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}

Чотириелементні підмножини: {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}

П'ятиелементна підмножина : {1, 2, 3, 4, 5}

Якщо A містить n елементів, її булеан буде містити 2^n елементів.
У нашому випадку, n = 5, отже, P(A) містить 2^5 = 32 елементи.

Множина A називається підмножиною множини B, якщо всі елементи множини A є елементами множини B і позначається наступним чином: $A \subset B$ або $A \subseteq B$.

Дві множини називаються рівними, якщо всі елементи однієї множини є елементами другої множини і навпаки, тобто, $A = B$ означає, що $A \subseteq B$ та $B \subseteq A$.

Приклад:
Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тоді $A \subset B$, оскільки всі числа з множини A є також числами з множини B.

Нехай $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{2, 4, 6\}$. Тоді $C \subseteq D$, оскільки всі елементи множини C є також елементами множини D, і вони повністю збігаються.

Символ	Назва	опис	приклад
N	Множина натуральних чисел	Набір всіх натуральних чисел. Починаючи з 1.	{1, 2, 3, 4, …}
Z	Множина цілих чисел	Набір усіх додатних, від'ємних і нульових цілих чисел.	{…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
R	Множина дійсних чисел	Набір всіх дійсних чисел, включаючи додатні та від'ємні раціональні та ірраціональні числа.	{…, -3.14, -2, -1, 0, 1, 2, 3.14, …}
C	Множина комплексних чисел	Набір усіх чисел, які можна виразити як a + bi, де a і b — дійсні числа, а i — уявна одиниця (√(-1)).	{1 + 2i, 3 – 5i, √2, -πi, …}
Q	Множина раціональних чисел	Набір усіх чисел, які можна виразити дробом p/q, де p і q — цілі числа, а q ≠ 0..	{1/2, -3/4, 5, 0.75, …}

ПРИКЛАД: ПОБУДУВАТИ «ЛАНЦЮЖОК» ВКЛЮЧЕНЬ ДЛЯ ТАКИХ МНОЖИН:

- I варіант

Z- множина цілих чисел;

Q- множина раціональних чисел;

R- множина дійсних чисел;

N- множина натуральних чисел;

P- множина додатних чисел, які діляться на 5.

- II варіант

A - множина чотирикутників;

K - множина квадратів;

P - множина паралелограмів;

R - множина ромбів;

M - множина багатокутників.

$$P \subset N \subset Z \subset Q \subset R$$

$$K \subset R \subset P \subset A \subset M$$

3.2 СПОСОБИ ПОДАННЯ МНОЖИН

1. Перелік елементів.

Елементи множини перераховуються у фігурних дужках, відокремлюючись один від одного комами, наприклад **A = {1, 2, 3, 4, 5}.**

2. Опис характеристичної властивості.

Множина задається шляхом вказівки властивості, яка притаманна всім його елементам **{ x | умова для x } або { x : умова для x }**

Приклад: Множина B всіх парних натуральних чисел:

B = {b | b – натуральне число та x ділиться на 2}.

Читання: "B - це множина чисел таких, що b - натуральне число і b ділиться на 2".

ПРИКЛАД

1. Якщо А представляє набір, який містить усі літери слова TREE , то правильним представленням форми списку буде:

A = {T,R,E} = {E,R,T}

A={T,R,E,E} є неправильним представленням

2. Набір усіх простих чисел, менших або рівних 10, подається як
A = {a | a — просте число ≤ 10}.

Набір натуральних чисел подається як N = {n | n — натуральне число}.

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

Визначити чи рівні множини ?

$P = \{p \mid p$ є простим, $40 < r < 50\}$

і

$Q = \{42, 44, 45, 46, 48\}$?

P = набір простих чисел від 40 до 50.

$\Rightarrow P = \{41, 43, 47\}$

$Q = \{42, 44, 45, 46, 48, 49\}$

$\Rightarrow P = \{41, 43, 47\} \neq Q = \{42, 44, 45, 46, 48, 49\}$

Отже, множини P і Q нерівні.

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

Визначити чи рівні множини ?

Нехай A — множина, що складається зі слова TITLE

І

Нехай B — множина, що складається зі слова LITTLE

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

Визначити чи рівні множини ?

P = {p ∈ R| p^2 – 2p + 1 = 0}

Q = (1, 2, 3}

R = {r ∈ R|r^3 – 6r^2 + 11r–6 = 0}

P:

$p^2 - 2p + 1 = 0$ – це квадрат рівності $(p-1)^2 = 0$.
Отже, єдиний корінь цього рівняння – p = 1.
Тому множина P містить лише один елемент: P = {1}.

Q:

Множина Q задана явно: Q = {1, 2, 3}.

R:

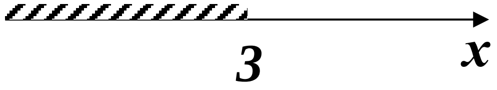
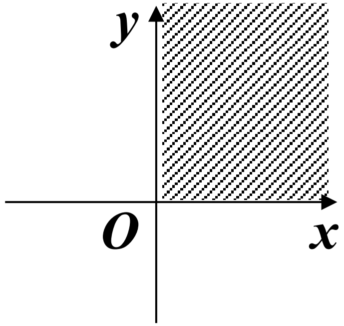
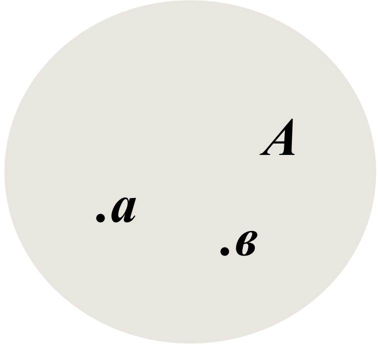
Щоб знайти елементи множини R, потрібно розв'язати кубічне рівняння $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$.
Корінням цього рівняння є числа 1, 2,3.
Отже, множина R = {1, 2, 3}.

Висновок:

P і Q не рівні, оскільки вони мають різну кількість елементів.
Q і R рівні, оскільки вони містять одні й ті ж самі елементи.

$P \neq Q$, $Q = R$

СПОСОБИ ЗАДАННЯ МНОЖИН

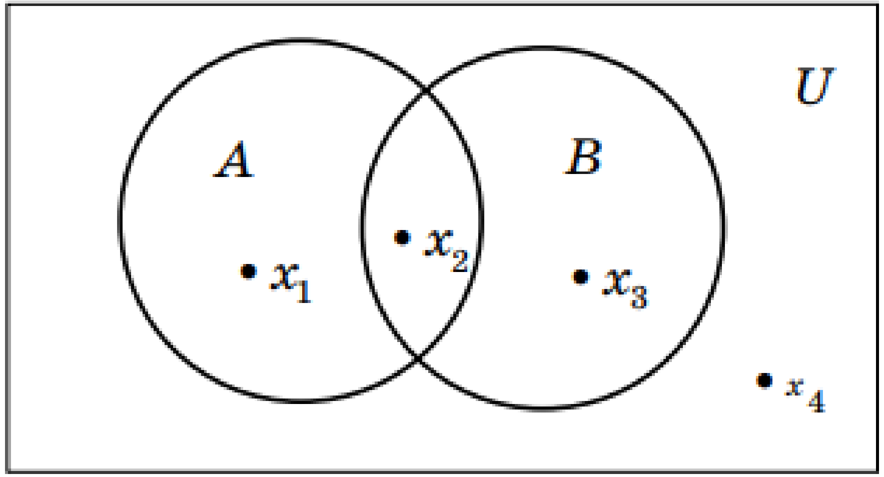
Переліком елементів	A={ к, л, а, с} B={зима, весна, літо, осінь} C= { ➔, ⬋, ➔, ⬉ }
За допомогою характеристичної властивості	M={ x: -3 < x < 4 } N={a: a – житель м. Житомир}
Графічний	1)  2)  3) 

3.3
ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ МНОЖИН

ДІАГРАМИ ВЕННА І КРУГИ ЕЙЛЕРА

Діаграми Венна і круги Ейлера – це графічні зображення, які використовують для ілюстрації відносин між множинами. Вони допомагають наочно уявити, як елементи різних груп перетинаються чи не перетинаються між собою.

ДІАГРАМИ ВЕННА

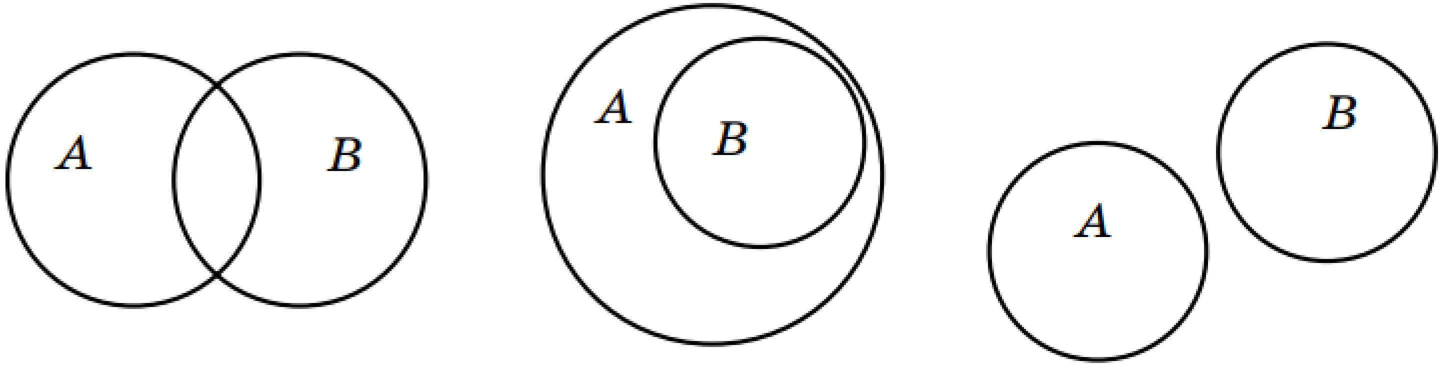


Побудова діаграм Венна передбачає розподіл площини на 2^n частин за допомогою n фігур. Кожна фігура символізує одну множину. При цьому кожна нова фігура повинна мати єдину точку перетину з кожною з уже побудованих фігур. Вся площина, на якій розміщені фігури, вважається універсальною множиною, яка містить усі можливі елементи. Елементи, що не належать жодній з конкретних множин, автоматично відносяться до універсальної множини.

КРУГИ ЕЙЛЕРА

Діаграми Венна надають загальний огляд того, як множини можуть бути пов’язані між собою, не вказуючи на конкретні відносини.

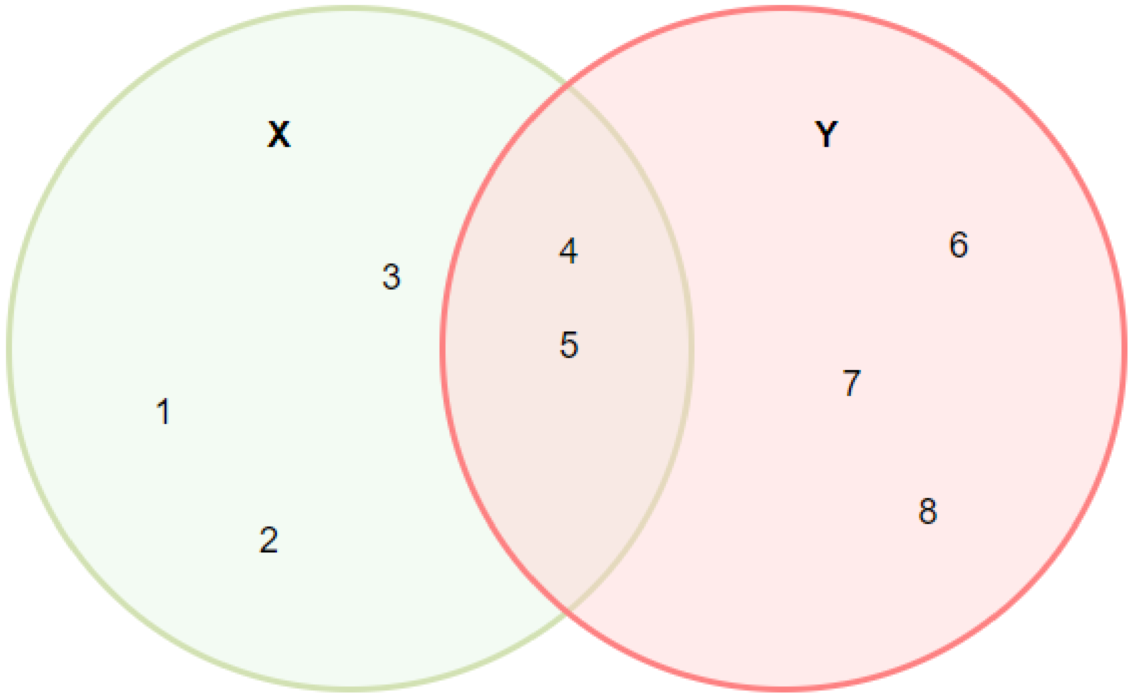
Круги Ейлера, навпаки, точно відображають взаємне розташування заданих множин. Коли множини не мають спільних елементів, їх зображують окремими фігурами. Якщо одна множина є підмножиною іншої, то її фігура повністю розташована всередині фігури більшої множини.



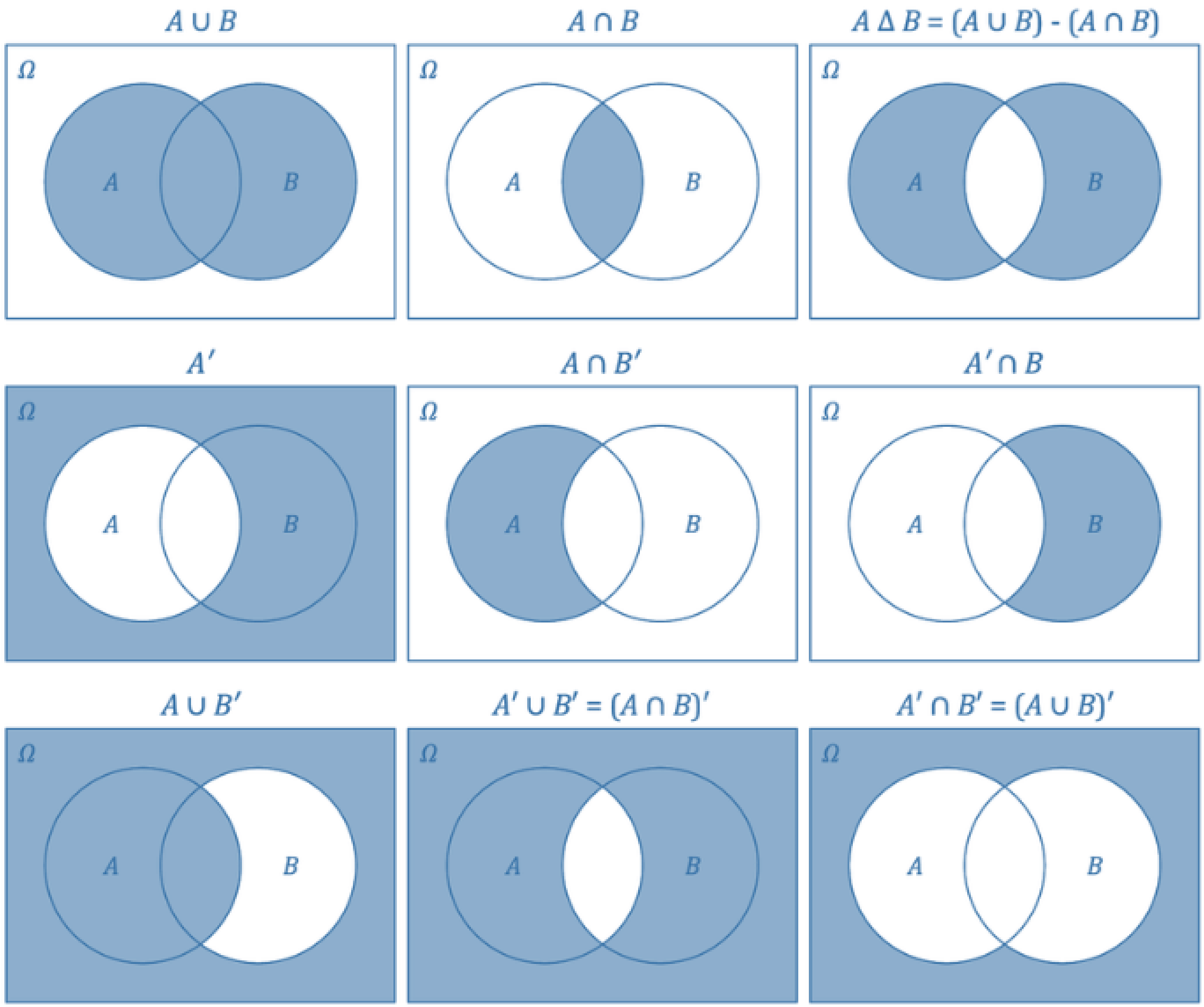
ПРИКЛАД

X = {1, 2, 3, 4, 5},

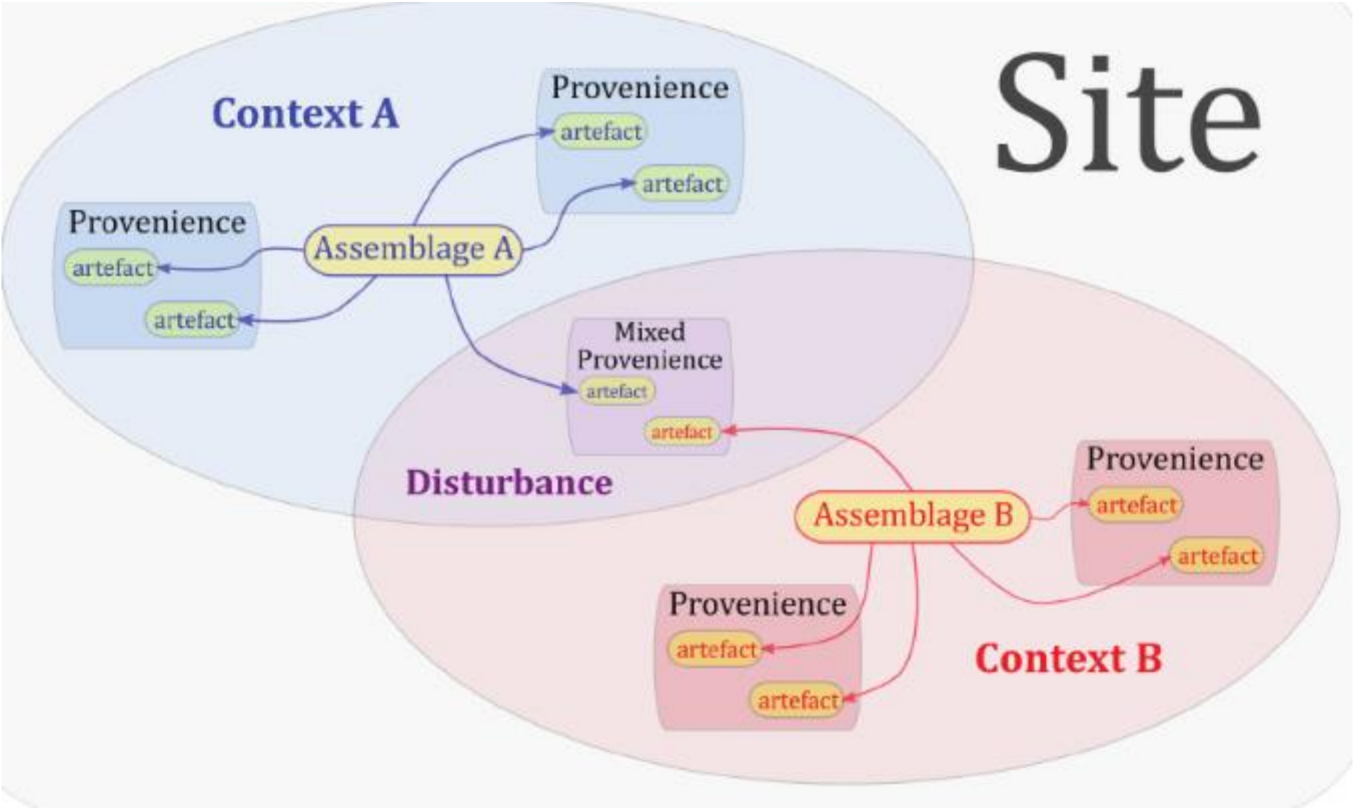
Y = {4, 5, 6, 7, 8}



ДІАГРАМИ ВЕННА



ПРИКЛАД



Cardinal, J.. (2019). Sets, Graphs, and Things We Can See: A Formal Combinatorial Ontology for Empirical Intra-Site Analysis. Journal of Computer Applications in Archaeology. 2. 56-78. 10.5334/jcaa.16.

3.4
ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

ОБ'ЄДНАННЯ МНОЖИН ($A \cup B$)

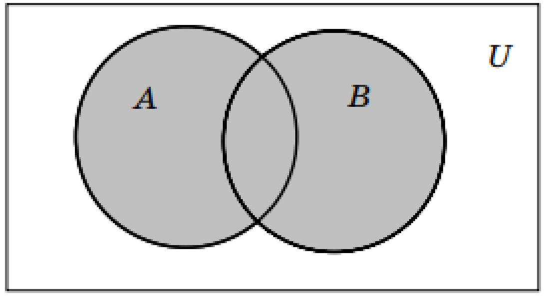
Це нова множина, яка містить всі елементи, що належать хоча б одній з вхідних множин.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$

позначається $A \cup B$ або $A + B$

Приклад:

Якщо $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{3, 4, 5\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



ПЕРЕТИН МНОЖИН (A ∩ B)

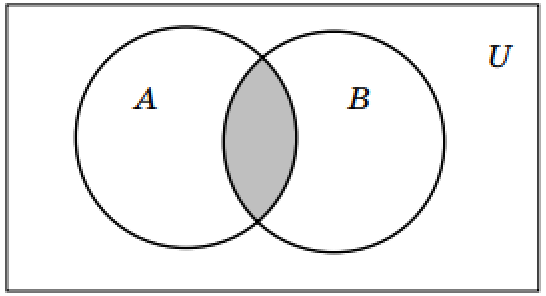
Це нова множина, яка містить тільки ті елементи, що належать одночасно обом вхідним множинам.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$

позначається $A \cap B$ **або** $A \cdot B$

Приклад:

Якщо $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{3, 4, 5\}$, то $A \cap B = \{3\}$.



РІЗНИЦЯ МНОЖИН (A \ B)

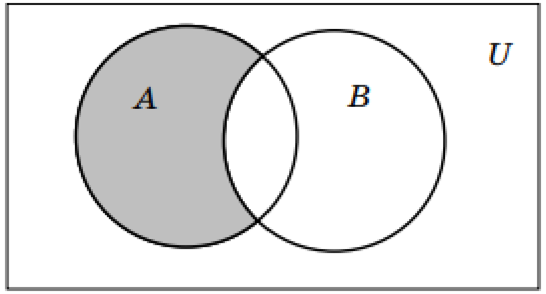
Це нова множина, яка містить всі елементи множини A, що не належать множині B.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$

позначається $A \oplus B$, $A \,\Delta\, B$ або $A - B$

Приклад:

Якщо A = {1, 2, 3} і B = {3, 4, 5}, то A \ B = {1, 2}.



ДОПОВНЕННЯ МНОЖИНИ (A')

Це множина всіх елементів універсальної множини, яка не належить множині A.

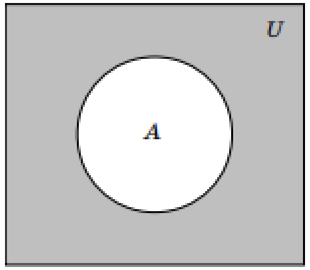
Доповнення визначається щодо певної універсальної множини.

A' = U \ A, де U – універсальна множина.

Приклад:

Якщо універсальна множина

U = {1, 2, 3, 4, 5} і A = {1, 2, 3}, то A' = {4, 5}.



СИМЕТРИЧНА РІЗНИЦЯ МНОЖИН (A Δ B)

Множина, яка містить всі елементи, що належать або множині A, або множині B, але не належать до їх перетину.

Приклад:

Якщо A = {1, 2, 3} і B = {3, 4, 5}, то A Δ B = {1, 2, 4, 5}.

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

Нехай

A = {1, 2, 3, 4} і B = {3, 4, 5, 6}

Знайти

$A \cup B$

$A \cap B$

$A \setminus B$

$B \setminus A$

Р**озв'язання:**

$A \cup B$ (об'єднання A і B):

Всі елементи A і всі елементи B, без повторень.

Відповідь: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

$A \cap B$ (перетин A і B):

Тільки спільні елементи A та B.

Відповідь: {3, 4}

$A \setminus B$ (різниця A і B):

Елементи, що є в A, але немає в B.

Відповідь: {1, 2}

$B \setminus A$ (різниця B і A):

Елементи, що є у B, але немає в A.

Відповідь: {5, 6}

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

Нехай

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$Y = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$Z = \{7, 8, 9, 10, 11\}$,

Знайти

$(X \cup Y)$, $(X \cup Z)$, $(Y \cup Z)$,

$(X \cup Y \cup Z)$ і $X \cap (Y \cup Z)$

$(X \cup Y) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6, 7, 8\} =$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(X \cup Z) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{7, 8, 9, 10, 11\} =$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$(Y \cup Z) = \{4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{7, 8, 9, 10, 11\} =$
$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$(X \cup Y \cup Z) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{7, 8, 9, 10, 11\} =$
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$X \cap (Y \cup Z) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} =$
$\{4, 5\}$

3.5
АЛГЕБРА МНОЖИН

ПРІОРИТЕТ ОПЕРАЦІЙ

Нехай

потрібно розставити дужки (визначити послідовність виконання операцій) у формулі:

$E = (A\backslash B \cup A' \cap D)\backslash B$

з урахуванням пріоритетів:

$E = (A\backslash(B \cup ((A') \cap D)))\backslash B$

1. A'
2. $A \cap B$
3. $A \cup B$
4. $A\backslash B$

ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ

Властивості	Позначення
Комутативність	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Асоціативність	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Дистрибутивність	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Закони поглинання	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Доповнення	$A \cup A' = U$ $A \cap A' = \emptyset$
Ідемпотентність	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Закони де Моргана	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
Заміна симетричної різниці	$A \Delta B = (A \cup B') \cup (B \cap A')$

Властивості	Позначення
Закони тотожності	
Властивості універсума (Об'єднання з універсальною множиною)	A ∪ U = U
Властивості універсума (Перетин з універсальною множиною)	A ∩ U = A
Властивості порожньої множини (Об'єднання з порожньою множиною)	A ∪ ∅ = A
Властивості порожньої множини (Перетин з порожнім множиною)	A ∩ ∅ = ∅
Властивості доповнення	
Інволюція (Подвійне доповнення)	(A')' = A
Заміна різниці	A \ B = A ∩ B'

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

Спростити вираз, використовуючи закони алгебри множин

$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C'$

1. **Винесемо спільний множник $(B \cap C)$:**

$(B \cap C) \cap [(A \cup A')] \cup B' \cup C'$

2. Закон доповнення: $A \cup A' = \mathbf{U}$

$(B \cap C) \cap \mathbf{U} \cup B' \cup C'$

3. Закон ідемпотентності:

$[(B \cap C) \cap \mathbf{U}] = B \cap C$

$(B \cap C) \cup \mathbf{B'} \cup \mathbf{C'} = (B \cap C) \cup (\mathbf{B \cap C})'$

Отримаємо: U

ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ

Спростити вираз, використовуючи закони алгебри множин

$(A \backslash B \cup C)' \cap A \cup B$

1. Застосуємо закон де Моргана :
$(A \backslash B \cup C)' = (A \backslash B)' \cap C'$

2. Застосуємо закон доповнення різниці:
$A \backslash B = A \cap B'$

Отримаємо**:** $(A' \cup B \cap C') \cap A \cup B$

3 Застосуємо дистрибутивний закон до **$(A' \cup B \cap C') \cap A$**

$[(A' \cap A) \cup (B \cap C') \cap A)] \cup B$

Закон доповнення **$A' \cap A = \emptyset$**

$(B \cap C' \cap A) \cup B$

Отримаємо: B