2. ГЕОМЕТРІЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

Тема 2.4: Довжини дуг меридіана та паралелі. Площа сфероїдної трапеції

1. Обчислення довжини дуги меридіана.
2. Обчислення довжини дуги паралелі.
3. Обчислення площі сфероїдної трапеції.

Поскільки у формулі лінійного елемента поверхні еліпсоїда (2.46) кожна складова в правій частині є квадрат диференціала дуги координатної лінії, то звідти отримаємо наступні вирази для довжин дуг меридіана та паралелі:

$$
\begin{aligned}
&dX = MdB;\\
&X = \int_{B_1}^{B_2} MdB;\\
&dY = N\cos BdL;\\
&Y = \int_{L_1}^{L_2} N\cos BdL.
\end{aligned}
\qquad (2.49)
$$

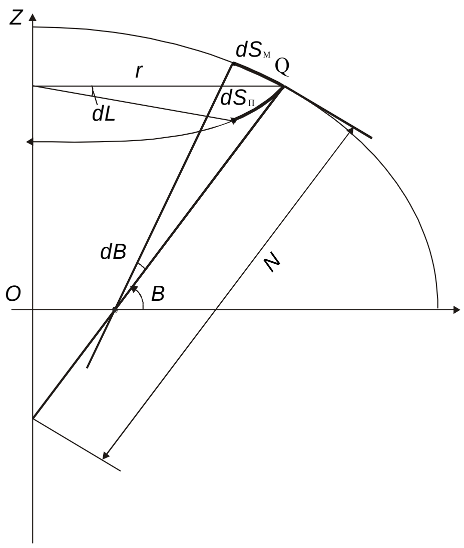

Рис. 2.9.

На практиці також часто виникає необхідність обчислення площі частин поверхні еліпсоїда (сфероїдних трапецій), які представляють площі знімальних трапецій.

Сфероїдною трапецією називається частина поверхні еліпсоїда, обмежена меридіанами і паралелями (*рис 2.10*).

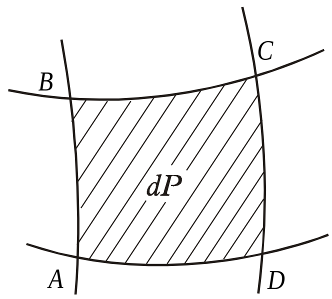

Рис.2.10.

Елемент площі сфероїдної трапеції dP визначається добутком диференціалів дуг координатних ліній: $dP=dXdY$. Замінивши dX і dY їх значеннями за формулами (*2.45*) отримаємо

$$dP = MN\cos BdBdL,$$

де M і N визначаються формулами (2.39) і (2.40) відповідно.

Тоді площа сфероїдної трапеції визначається подвійним інтегралом:

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos BdBdL. \tag{2.50}$$

1. Обчислення довжини дуги меридіана

Обчислення довжини дуги меридіана X, згідно (2.49), зводиться до знаходження еліптичного інтегралу

$$X = a(1 - e^2)\int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB, \tag{2.51}$$

який в елементарних функціях не береться. Одним із класичних шляхів його знаходження є розклад підінтегрального виразу в біноміальний ряд з подальшим почленним інтегруванням. Отримаємо

$$(1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 B + \frac{35}{16}e^6 \sin^6 B + ...$$

Замінивши в цьому виразі парні степені синуса косинусами кратних дуг згідно відомих рівнянь

$$\sin^2 B = \frac{1}{2}(-\cos 2B + 1),$$

$$\sin^4 B = \frac{1}{8}(\cos 4B - 4\cos 2B + \frac{6}{2}),$$

$$\sin^6 B = \frac{1}{32}(-\cos 6B + 6\cos 4B - 15\cos 2B + \frac{20}{2}),$$

та згрупувавши постійні члени і позначивши їх буквами $A, B, C, D, ...$, отримаємо

$$X = a(1 - e^2)\int_{B_1}^{B_2} (A - 2B\cos 2B + 4C\cos 4B - 6D\cos 6D + ...)dB.$$

Звідси, після почленного інтегрування і підстановки границь, знайдемо остаточно

$$X = a(1 - e^2)\left\{\begin{aligned} & A(B_2 - B_1) - \frac{B}{2}(\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \\ & + \frac{C}{4}(\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - \\ & - \frac{D}{6}(\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + ... \end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

Коефіцієнти A, B, C, D визначаються із наступних виразів, основним аргументом яких є ексцентриситет еліпсоїда

$$\left.\begin{aligned} A &= 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+... \\ B &= \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+... \\ C &= \frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+... \\ D &= \frac{35}{512}e^6+... \end{aligned}\right\|. \tag{2.53}$$

За формулою (2.52) можна знайти довжину дуги земного меридіана будь-якої довжини, взявши при цьому необхідну кількість членів розкладу.

Для обчислення довжини дуги меридіана від екватора ($B_1 = 0^0$) до будь-якої паралелі з широтою *B*, формула (2.52) отримає наступний вид

$$X = a(1-e^2)\left\{AB-\frac{B}{2}\sin 2B+\frac{C}{4}\sin 4B-\frac{D}{6}\sin 6B+...\right\}. \tag{2.54}$$

Формулу (2.54) можна представити ще в такому виді

$$X = A_0B - A_2\sin 2B + A_4\sin 4B - A_6\sin 6B + ... \;, \tag{2.55}$$

де коефіцієнти A_0, A_2, A_4, A_6 визначаються через параметри прийнятого еліпсоїда

$$\begin{aligned} A_0 &= a(1-e^2)\left[1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+...\right], \\ A_2 &= \frac{1}{2}a(1-e^2)\left[\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+...\right], \\ A_4 &= \frac{1}{4}a(1-e^2)\left[\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+...\right], \\ A_6 &= \frac{1}{6}a(1-e^2)\left[\frac{35}{512}e^6+...\right]. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Вираз для довжини дуги меридіана при малих відстаннях (довжини сторін або ланки тріангуляції 1 класу) можна отримати на основі застосування формули Тейлора з введенням середнього аргумента.

Позначимо довжини дуг меридіанів від екватора до точок з широтою B_1, B_2 та B_m через X_1, X_2 та X_m. Крім того,

$B_m = \frac{(B_2 - B_1)}{2}$; $\Delta B = B_2 - B_1$. Тоді можна написати

$$X_2 - X_1 = \Delta X = f(B_2) - f(B_1) = f(B_m + \frac{\Delta B}{2}) - f(B_m - \frac{\Delta B}{2}). \tag{2.57}$$

Приймаючи різницю широт між двома точками ΔB малою величиною, запишемо ряд за степенями *ΔB*

$$\begin{aligned} \Delta X = &\left\{X_m + \left(\frac{dX}{dB}\right)_m\frac{\Delta B}{2}+\left(\frac{d^2X}{dB^2}\right)_m\frac{\Delta B^2}{8}+\left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m\frac{\Delta B^3}{48}+...\right\} - \\ &-\left\{X_m - \left(\frac{dX}{dB}\right)_m\frac{\Delta B}{2}+\left(\frac{d^2X}{dB^2}\right)_m\frac{\Delta B^2}{8}-\left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m\frac{\Delta B^3}{48}+...\right\} \end{aligned},$$

або

$$\Delta X = \left(\frac{dX}{dB}\right)_m\Delta B + \frac{1}{24}\left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m\Delta B^3 + ... \tag{2.58}$$

Індекс "*m"* при коефіцієнтах цього ряду означає, що вони обчислюються за середнім аргументом B_m. Похідні $\frac{d^iX}{dB^i}$ (i=1,3), можна знайти на основі першої формули (2.49) послідовним диференціюванням:

$$\left(\frac{dX}{dB}\right)_m = M_m,$$

$$\left(\frac{d^2X}{dB^2}\right)_m = \frac{3ae^2(1-e^2)\sin 2B_m}{2W_m^{\ 5}} = \frac{3e^2M_m \sin 2B_m}{2W_m^{\ 2}},$$

$$\left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m = \frac{3ae^2(1-e^2)\cos 2B_m}{W_m^{\ 5}}\left(1+\frac{5e^2\sin 2B_m tg 2B_m}{4W_m^{\ 2}}\right).$$

Тут W визначається формулою (2.21).

Останній вираз з точністю до членів з e^2 можна записати

$$\left(\frac{d^3X}{dB^3}\right)_m = 3M_m e^2 \cos 2B_m.$$

Підставивши значення похідних у (2.58), остаточно отримаємо

$$\Delta X = M_m\Delta B + \frac{1}{8}ae^2(1-e^2)\cos 2B_m \Delta B^3 + \ldots, \qquad (2.59)$$

де M_m обчислюється через B_m за формулою (2.39).

Другий член в правій частині формули (2.59) на широтах 45-55° складає всього лише 0,002 *м* при $\Delta B \le 30'$. Тому для малих різниць широт ΔB, дугу меридіана можна розглядати як дугу кола з центральним кутом, який рівний різниці широт її крайніх точок, і описану радіусом меридіанного перерізу, рівному M_m, тобто

$$\Delta X = M_m \Delta B. \qquad (2.60)$$

Наближенене значення інтегралу $X = \int_{B_1}^{B_2} MdB$ можна обчислити на основі застосування чисельних методів розв'язування означених інтегралів. Серед них: формули трапецій, Сімпсона, Гаусса, Чебишева тощо. В попередніх лекціях було приведено два методи обчислення інтегралу $\int_a^b f(x)dx$: формули (1.10) для методу Сімпсона та (1.11) для методу Гаусса. Застосуємо вказані формули для обчислення довжини дуги меридіана між точками з широтами B_1 та B_2.

В першому випадку розділимо інтервал інтегрування на дві частини з кроком $h = \frac{B_2 - B_1}{2}$. Для кожної вузлової точки $k(k=0{,}1{,}2)$ з кроком h за аргументом $B_k = B_1 + kh$ знаходимо значення підінтегральної функції M_k. Тоді, згідно (1.10), отримаємо

$$X_2 - X_1 = \frac{(B_2 - B_1)}{6}\left[M_1 + 4M_m + M_2\right]. \qquad (2.61)$$

При застосуванні формули (1.11) виберемо дві вузлові точки (i=2). З врахуванням даних *табл. 1.1*, визначимо аргументи функції M_i. При $i=1$ аргументом буде значення широти $B_1 + (B_2 - B_1)0.21132487$, а при $i=2$ – $B_1 + (B_2 - B_1)0.78867513$. Остаточно, формула для обчислення довжини дуги меридіана методом Гаусса, буде

$$X_2 - X_1 = (B_2 - B)_1\left[0.5M_1 + 0.5M_2\right]. \qquad (2.62)$$

Вказані формули є рівноточними і дозволяють обчислювати довжину дуги меридіана при різниці широт до 5^0 з похибкою ≤ 0.001 *м*. Для розширення широтного діапазону треба ділити інтервал інтегрування на більшу кількість частин (для методу Сімпсона) або вибирати більшу кількість вузлових точок (для методу Гаусса).

Можна поставити обернену задачу: при відомій довжині дуги меридіана ΔX і її середній широті чи X, знайти різницю широт кінцевих точок чи широту B.

На основі (2.60) отримаємо

$$\Delta B = (B_2 - B_1) = \frac{\Delta X}{M_m}. \qquad (2.63)$$

Для визначення широти B за довжиною дуги меридіана X за основу можна взяти формулу (2.54)

$$B = \frac{X}{a(1-e^2)A} + \frac{B}{2A}\sin 2B - \frac{C}{4A}\sin 4B + \frac{D}{6A}\sin 6B - .... \qquad (2.64)$$

Обчислення широти виконують методом послідовних наближень, приймаючи в першому наближенні $B = \dfrac{X}{a(1-e^2)A}$.

Коли за основу взяти формулу (2.49), то отримаємо наступні вирази

$$\begin{aligned}
B^I &= \frac{X}{A_o},\\
B^{II} &= B^I + \frac{A_2}{A_o}\sin(2B^I) - \frac{A_4}{A_0}\sin(4B^I),\\
B^{III} &= B^I + \frac{A_2}{A_o}\sin(2B^{II}) - \frac{A_4}{A_o}\sin(4B^{II}) + \frac{A_6}{A_o}\sin(6B^{II}),\\
B^{IV} &= B^I + \frac{A_2}{A_o}\sin(2B^{III}) - \frac{A_4}{A_o}\sin(4B^{III}) + \frac{A_6}{A_o}\sin(6B^{III}),\\
B &= B^I + \frac{A_2}{A_o}\sin(2B^{IV}) - \frac{A_4}{A_o}\sin(4B^{IV}) + \frac{A_6}{A_o}\sin(6B^{IV}).
\end{aligned} \qquad (2.65)$$

Недоліком формул (2.64) та (2.65) при обчисленні широти є необхідність застосовування процесу наближень. Без наближень дана задача розв'язується методом перетворення (обертання) тригонометричних рядів. Якщо заданий тригонометричний ряд

$$y = x + p_2 \sin 2x + p_4 \sin 4x + p_6 \sin 6x + ...,$$

то наступний ряд

$$x = y + q_2 \sin 2y + q_4 \sin 4y + q_6 \sin 6y + ...,$$

буде оберненим по відношенню до заданого. Коефіцієнти в цих рівняннях пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned}
q_2 &= -p_2 - p_2 p_4 + \frac{1}{2} p_2^{\ 3} + ...,\\
q_4 &= -p_4 + p_2^{\ 2} + ...,\\
q_6 &= -p_6 + 3p_2 p_4 - \frac{3}{2} p_2^{\ 3} + ...
\end{aligned}$$

Якщо тепер за задану взяти формулу (2.55), то обернена до неї буде визначатися із виразу

$$B = \overline{A_0}X + \overline{A_2}\sin(2\overline{A_0}X) + \overline{A_4}\sin(4\overline{A_0}X) + \overline{A_6}\sin(6\overline{A_0}X), \qquad (2.66)$$

де коефіцієнти $\overline{A_0}, \overline{A_2}, \overline{A_4}, \overline{A_6}$ знаходяться із співвідношень

$$\overline{A_0} = \frac{1}{A_0},$$

$$\overline{A_2} = \frac{A_2}{A_0} + \frac{A_2 A_4}{A_0^{\ 2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^3,$$

$$\overline{A_4} = -\frac{A_4}{A_6} + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2,$$

$$\overline{A_6} = \frac{A_6}{A_0} - 3\frac{A_2 A_4}{A_0^{\ 2}} + \frac{3}{2}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^3.$$

2. Обчислення довжини дуги паралелі.

Рівняння довжини дуги паралелі інтегрується зразу в кінцевому виді, оскільки паралель є колом (див. *рис. 2.9*) з радіусом $r = N\cos B$

$$Y = \Big|_{L_1}^{L_2} N\cos BL = (L_2 - L_1)N\cos B = lN\cos B. \qquad (2.67)$$

Очевидно, що при одній і тій же різниці довгот $l = L_2 - L_1$ дуга паралелі на різних широтах буде мати неоднакову довжину, поскільки радіус паралелі залежить від широти.

Обернена задача, тобто знаходження різниці довгот, розв'язується строго на основі формули (2.67).

3. Обчислення площі сфероїдної трапеції.

Для обчислення площі формулу (2.50), з врахуванням (2.67), представимо в наступному вигляді

$$P = b^2 (L_2 - L_1)\int_{B_1}^{B_2} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} \cos B dB. \qquad (2.68)$$

після чого використаємо прийом, аналогічний як при знаходженні інтегралу (2.51), а саме, підінтегральну функцію (2.68) розкладемо в біномінальний ряд:

$$(1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = (1 + 2e^2 \sin^2 B + 3e^4 \sin^4 B + 4e^6 \sin^6 B + \ldots)\cos B.$$

Застосовуючи загальну формулу інтегрування

$$\int \sin^n B \cos B dB = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} B,$$

Отримаємо

$$P = b^2 (L_2 - L_1)\left\{\begin{array}{l} (\sin B_2 - \sin B_1) + \frac{2}{3}e^2(\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) + \\ + \frac{3}{4}e^4(\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \\ + \frac{4}{7}e^6(\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) + \ldots \end{array}\right\} \qquad (2.69)$$

У формулі (2.69) B_1, B_2 та L_1, L_2 – геодезичні координати вершин сфероїдної (знімальної) трапеції.

Якщо задана номенклатура знімальної трапеції, площу якої необхідно обчислити, то перш за все необхідно визначити геодезичні координати B і L її вершин. Для цього спочатку з допомогою бланкової номенклатури карти знаходять координати вершин трапеції масштабу 1 : 1 000 000, а потім за стандартною процедурою (методом поділу масштабів) геодезичні координати вершин, заданої певним масштабом, трапеції.

Числовий приклад.

Для листа карти $M-36$ масштабу 1 : 1 000 000 B_2=52°, B_1=48°, різниця довгот східної і західної рамок карти $L_2-L_1=6^0$. Тоді, згідно формули (2.69), для еліпсоїда Красовського площа трапеції $M-36$ дорівнює $P=191360$ км^2.

Коли мова йде про дійсну площу ділянок фізичної поверхні Землі, то її підраховують не за приведеними формулами, а шляхом безпосереднього вимірювання площ на топографічних картах чи планах.

Для обчислення площі всієї поверхні земного еліпсоїда у формулі (2.69) треба прийняти $L_2-L_1=2\pi$, $B_1=-\dfrac{\pi}{2}$, $B_2=\dfrac{\pi}{2}$. Тоді

$$P=4\pi b^2(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+...). \qquad (2.70)$$

На основі цієї формули можна знайти радіус еквівалентної кулі $R_к$, площа якої дорівнює площі еліпсоїда P

$$4\pi R_к{}^2=4\pi b^2(1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+...),$$

звідки

$$R_к=b\sqrt{1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+...} \qquad (2.71)$$

Радіус кулі, рівновеликої за площею поверхні загального земного еліпсоїда WGS-84, дорівнює, згідно формули (2.71) 6 370 894 *м*. Це значить, що при розв'язуванні деяких задач, в основному, наближеного характеру, коли форму Землі можна прийняти за кулю, її радіус потрібно брати 6 371 *км*.

Крім площі трапеції, на практиці приходиться обчислювати і лінійні розміри її рамок в масштабі карти. Рамки трапеції – це відрізки дуг меридіанів і паралелей. Формули для довжин рамок трапецій, у відповідності з формулами (2.63) та (2.67), будуть

$$\left.\begin{aligned} a_{1,см}&=100\,\frac{N_1\cos B_1}{m}(L_2-L_1),\\ a_{2,см}&=100\,\frac{N_2\cos B_2}{m}(L_2-L_1),\\ c_{,см}&=100\,\frac{M_m}{m}(B_2-B_1). \end{aligned}\right\}, \qquad (2.72)$$

де m – знаменник масштабу карти. Позначення сторін трапеції показані на *рис. 2.11*.

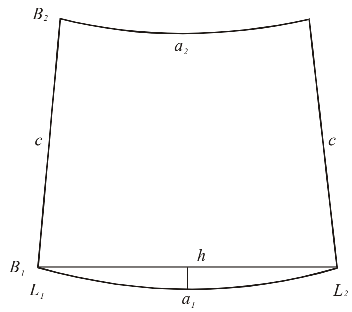

Рис. 2.11.

Стрілку прогину рамки знімальної трапеції розраховують за формулою

$$h=\frac{1}{16}N_m\sin 2B_m(L_2-L_1). \qquad (2.73)$$

Зазначимо, що всі кутові величини, які входять у вищенаведені формули безпосередньо, треба брати в радіанній мірі.