ЛЕКЦІЯ № 7.

ТЕМА: ***БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ ВИБІР***

ПИТАННЯ ЛЕКЦІЇ:

7.1. Специфіка багатокритеріальної оптимізації

7.2. Метод головного критерію

7.1. Специфіка багатокритеріальної оптимізації

У попередніх лекціях було розглянуто деякі методи, спрямовані на розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації: перехід від початкової множини $D\{d\}$ альтернатив d до підмножини Парето P_a , яка включає лише ефективні альтернативи, метод скаляризації сукупності критеріїв (перехід до суперкритерію $q_0(d)=q_0[q_1(d), \ldots , q_p(d)]$), а також деякі евристичні методи ранжування альтернатив.

Навіть такий, далеко не повний перелік відомих підходів дає змогу визначити загальні особливості задачі багатокритеріальної оптимізації.

1. Жоден з критеріїв $q(d_1),...,q_p(d)$ не може бути обраний в якості єдиного.

2. Одні критерії необхідно максимізувати, а інші – мінімізувати.

3. Рішення може виявитися неоптимальним за жодним з критеріїв, але разом з тим, воно має бути найкращим компромісним рішенням з урахуванням всіх критеріїв одночасно.

4. Виникає необхідність вибору принципу оптимальності: неоднозначність використання різних принципів оптимальності може призводити до вибору різних альтернатив.

5. Виникає неоднозначність впорядкованості критеріїв за важливістю, оскільки ранжування критеріїв залежить від суб'єктивних оцінок ОПР або експертів.

6. Виникає необхідність нормування критеріїв, які вимірюються у різних одиницях і діапазонах.

7. Виникає питання переходу від якісних критеріїв до кількісних.

8. Рішення, оптимальне за одним критерієм, найчастіше не оптимальне за іншими.

Крилата фраза: «Досягти максимальний ефект за умови мінімальних витрат» позбавлена наукового сенсу і може сприйматися швидше за все як гасло.

У деяких випадках задача скаляризації, тобто перехід від окремих критеріїв $q(d_1)$,..., $q_p(d)$ до суперкритерію $q_0(d)=q_0[q_1(d), \dots, q_p(d)]$, не викликає особливих проблем і може бути здійснена природним чином за допомогою адитивної згортки

$$q_0(d) = \alpha_1 q_1(d) + \dots + \alpha_p q_p(d). \tag{7.1}$$

Наприклад, припустимо, що підприємство виготовляє p різних продуктів, інтенсивність виготовлення яких залежить від управлінського рішення $d \in D$. Нехай $q_j(d)$ – кількість вироблених одиниць j-го продукту (j=1,...,p) для фіксованого d , а α_j – продажна ціна цього продукту.

Тоді суперкритерій, обчислений за формулою (7.1), характеризує сумарний прибуток $q_0(d)$ підприємства. Це дає змогу вибрати оптимальне управлінське рішення d^*, максимізуючи $q_0(d)$:

$$d^* = \arg\max_{d \in D} q_0(d).$$

Разом з тим у лекції 6 на жартівливому, але дуже переконливому прикладі з телевізором, було продемонстровано, що адитивна лінійна згортка двох критеріїв (якість зображення та звуку) призводить до парадоксального результату прийняття рішення щодо якості телевізору.

Можна представити інші приклади правдоподібних, але невірних підходів до формування суперкритеріїв. Зокрема, доволі часто при розв’язуванні практичних задач два окремих критерії q_i та q_j замінюють одним суперкритерієм

$$q_0 = \frac{q_i}{q_j}, \tag{7.2}$$

ґрунтуючись на тому, що за умовами задачі q_i бажано максимізувати, а q_j – мінімізувати.

Тоді, здавалося б, визначення оптимального рішення можна істотно спростити: достатньо максимізувати суперкритерій (7.2).

Водночас, суперкритерій у вигляді відношення (7.2), також як і адитивна згортка (7.1), передбачає, що погіршення за одним критерієм можна компенсувати поліпшенням за другим, що не завжди вірно.

Тут доречно згадати критерій одного з письменників, згідно з яким «Людина – це дріб, у чисельнику якого стоять його дійсні гідності, а у знаменнику – його думка про себе». Однак, навряд чи можна високо оцінити людину, яка не має надмірної самовпевненості, але й не має жодної гідності.

Недоліки згортання декількох критеріїв в один суперкритерій змушують шукати інші підходи до вирішення задач багатокритеріального вибору. Один з таких альтернативних напрямів – методи послідовної оптимізації, до яких відносять методи головного критерію, послідовних поступок та інші методи.

7.2. Метод головного критерію

Суть методу головного критерію полягає у наступному:

1. Один з критеріїв $q_1(d),...,q_p(d)$ визначають як головний, наприклад, критерій $q_1(d)$ – зарплата для обраної роботи.
2. Для інших критеріїв $q_j(d)$, j 2,...,p, наприклад, терміну відпустки, відстані до офісу тощо, вводять обмеження.
3. Далі розв'язують однокритеріальну задачу

$$q_1(d) \to \max \tag{7.3}$$

з обмеженнями

$$q_2(d) \le q_2^0,\ q_3(d) \le q_3^0,\ \dots,\ q_p(d) \le q_p^0. \tag{7.4}$$

Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації зводиться до відомої математичної задачі знаходження умовного екстремуму однієї змінної – головного критерію

$$d^* = \arg\max_{d \in D} \{q_1(d) \mid q_j(d) \le q_j^0\},\ j = 2,...,p\}.$$

Основна проблема, яка виникає при реалізації методу головного критерію – вибір прийнятних значень q^0_j , j=2,..., p, які відокремлюють область D^0 обмежень (7.4) на множині D.

Зрозуміло, що при визначенні q^0_j , j=2,...,p слід уникати двох крайніх випадків:

$D / D^0 = \varnothing$, коли обмеження (7.4) існують для всіх точок d є D (у цьому випадку не зрозуміло для чого потрібні додаткові критерії, крім головного);

$D \cap D^0 = \varnothing$, тобто серед точок, для яких існують обмеження (7.4), нема жодної допустимої альтернативи.

Продемонструємо основну ідею методу умовної оптимізації для такого прикладу.

Приклад 7.1. Треба вибрати місце роботи з дев’яти варіантів, представлених у табл. 7.1, ґрунтуючись на критеріях q_1 – зарплата, q_2 – термін відпустки, q_3 – термін поїздки до офісу.

Зрозуміло, що критерії q_1 та q_2 бажано максимізувати, а критерій q_3 – мінімізувати.

Таблиця 7.1. Варіанти альтернатив місця роботи

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв)
1	9000	20	60
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	**6000**	**30**	**10**
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

Нехай з точки зору ОПР головним критерієм обрано критерій q_1 – зарплата.

Задамо обмеження для інших двох критеріїв:

термін відпустки – не менше ніж 30 днів;

термін поїздки – не більше ніж 40 хв.

Відповідно з даними табл. 7.1 таким обмеженням задовольняють лише варіанти {**2, 3, 5, 6, 9**}.

Тому інші варіанти можуть бути вилучені (табл. 7.2).

Як видно з табл. 7.2 найкращим виявився варіант 3 – місце роботи з максимальною зарплатою q_1=7000 грн, відпусткою q_2=36 днів і терміном поїздки до роботи q_3=40 хв.

Таблиця 7.2. Варіанти альтернатив, що задовольняють обмеженням

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв)
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
5	4000	60	15
6	6000	30	10
9	6500	35	40

4.3. Метод послідовних поступок

На відміну від попереднього метод послідовних поступок передбачає, що всі критерії $q_1(d),...,q_p(d)$ є важливими та їх можна впорядкувати за важливістю для ОПР.

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що на множині D можливих альтернатив d критерії $q_1(d),...,q_p(d)$ впорядковано таким чином

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ ... \succ q_p(d).$$

Спочатку знайдемо найкраще рішення за першим критерієм, тобто знайдемо розв'язок однокритеріальної оптимізаційної задачі

$$q_1^* = \arg\max_{d \in D} \ q_1(d).$$

Особливість оптимізації за методом послідовних поступок полягає у тому, що відхилення від оптимального рішення за більш важливими критеріями, вимагає поліпшення значень менш важливих таким чином, щоб сумарний виграш за менш важливими критеріями істотно перевищував втрату ефективності за більш важливими.

Формально це означає, що після визначення d_1^* призначаємо допустиму поступку Δ_{q1} для критерію $q_1(d)$ і розв'язуємо однокритеріальну оптимізаційну задачу з обмеженням

$$q_2^* = \arg\max_{\substack{d \in D \\ q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q1}}} \ q_2(d). \tag{7.5}$$

На наступному кроці призначаємо допустиму поступку Δ_{q2} для критерію $q_2(d)$ і знов розв'язують однокритеріальну оптимізаційну задачу з додатковим обмеженням, тобто

$$q_3^* = \underset{\substack{d \in D \\ q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q_1} \\ q_2(d) \geq q_2^* - \Delta_{q_2}}}{\arg\max} q_3(d).$$

Такий процес продовжують доки не буде розв'язана однокритеріальна оптимізаційна задача для останнього критерію $q_p(d)$.

Розглянемо два приклади.

Приклад 7.2. За методом послідовних поступок визначимо оптимальний варіант місця роботи згідно з критеріями: q_1 – зарплата, q_2– термін відпустки, q_3 – термін поїздки до офісу. Вихідні дані будемо брати з табл. 7.1.

Будемо вважати, що за важливістю для ОПР критерії впорядковано таким чином

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ q_3(d),$$

причому критерії q_1 та q_2 бажано максимізувати, а критерій q_3 – мінімізувати.

Для початку знайдемо максимум за першим критерієм q_1 (зарплата), не звертаючи увагу на значення інших двох критеріїв. У результаті визначаємо, що q_1^*= 9000 грн (варіанти 1 та 7).

Призначимо допустиму поступку Δ_{q1} для критерію $q_1(d)$ у розмірі 1000 грн. Тоді, згідно з (7.5) треба визначити варіант місця роботи, який має максимальний термін відпустки і зарплату не нижче, ніж 8000 грн:

$$q_2^* = \underset{q_1(d) \geq 8000 \text{ грн}}{\arg\max} q_2(d).$$

Згідно з табл. 7.1 таким умовам відповідає варіант 4, тобто місце роботи з зарплатою 8000 грн і терміном відпустки 40 днів.

Призначимо тепер допустиму поступку Δ_{q2} для критерію $q_2(d)$ у розмірі – 5 днів, тобто будемо шукати варіант роботи з такими обмеженнями:

зарплата не нижче за 8000 грн;

термін відпустки не менше ніж 35 днів.

Легко побачити, що таким обмеженням задовольняють варіант 4 з терміном поїздки до офісу q_3 = 50 хв. та варіант 7 з терміном поїздки до офісу q_3 = 60 хв. З цих двох варіантів остаточно обираємо варіант 4, тому що він забезпечує менший термін поїздки до офісу.

Приклад 7.3. Необхідно знайти оптимальні значення неперервних змінних x_1, x_2 , x_3 за трьома критеріями $q_1 \succ q_2 \succ q_3$, які визначають наступним чином:

$$q_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max,$$
$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min, \quad (7.6)$$

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max , \tag{7.7}$$

тобто критерії q_1 та q_3 бажано максимізувати, а критерій q_2 – мінімізувати.

Задана система обмежень:

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16, \\ x_1 + 2x_2 \leq 21, \end{gathered} \tag{7.8}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3. \tag{7.9}$$

Призначимо для всіх критеріїв максимальну поступку в розмірі 10 %.

Крок 1. Максимізуємо перший критерій

$$q_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max \tag{7.10}$$

за обмежень:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 21,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3.$$

Оптимальні значення змінних такі

$$x_1 = 8;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0,$$

з якими перший критерій досягає максимального значення

$$q_1^{\max} = 16.$$

Крок 2. Враховуючи максимально допустиму поступку для першого критерію в 10 % максимальне значення може бути зменшено від 16 до 14,4.

Тому вводимо додаткове обмеження

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 14{,}4. \tag{7.11}$$

Приймаючи до уваги (7.6), (7.8), (7.9) мінімізуємо тепер другий критерій з додатковим обмеженням (7.11), тобто розв’язуємо оптимізаційну задачу

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min \tag{7.12}$$

за обмежень

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 21,$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 14{,}4,$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1{,}2{,}3.$$

Нові оптимальні значення змінних, що визначені на другому кроці оптимізації за умовою (7.12), такі:

$$x_1 = 7{,}8;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0{,}4. \tag{7.13}$$

Обчислюємо зміну значення другого критерію q_2:

при $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ маємо

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8,$$

при $x_1 = 7{,}8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}4$ маємо

$$q_2^{\min} = x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7{,}8 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0{,}4 = 7. \tag{7.14}$$

Тобто на другому кроці значення другого критерію поліпшилось на 12,5 % (зменшилось з 8 до 7), тоді як поступка для першого критерію дорівнювала 10 %.

Крок 3. Враховуючи те, що другий критерій мінімізують, введемо максимально допустиму поступку в 10 % та збільшимо його значення з $q_2^{\min} = 7$ до 7,7. Це дає нам змогу ввести ще одне додаткове обмеження

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 7{,}7. \tag{7.15}$$

Приймаючи до уваги (7.7), (7.8), (7.9) та (7.15) переходимо до максимізації третього критерію, тобто розв’язуємо оптимізаційну задачу

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max. \tag{7.16}$$

за обмежень

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 16,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 21,$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 14{,}4,$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 7{,}7,$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1{,}2{,}3.$$

За результатами обчислень маємо такі оптимальні значення змінних:

$$x_1 = 7{,}66,\quad x_2 = 0{,}28,\quad x_3 = 0{,}4. \tag{7.17}$$

Визначимо зміни значень третього критерію q_3:

на другому кроці (коли x_1 = 7,8, x_2 = 0, x_3 = 0,4) маємо

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7{,}8 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0{,}4 = -6{,}2,$$

на третьому кроці зі значеннями змінних згідно з (7.17) маємо

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7{,}66 + 2 \cdot 0{,}28 + 4 \cdot 0{,}4 = -5{,}5.$$

Тобто на третьому кроці в результаті оптимізації значення третього критерію поліпшилось на 11,29 % (збільшилось з –6,2 до –5,5), тоді як поступка на другий критерій дорівнювала 10 %.

Як це видно з підсумкової табл. 7.3, за рахунок послідовної оптимізації, сумарний виграш склав 13,29 %.

Зрозуміло, що результат оптимізації за методом послідовних поступок залежить від суб'єктивно призначених значень поступок.

Крім цього, слід зауважити, що отриманий результат не обов’язково належить підмножині ефективних рішень за Парето.

Таблиця 7.3. Підсумкові результати оптимізації

Крок	q_1 o max	', %	q_2 o min	',%	q_3 o max	',%
1	q_1 16,0	–	q_2 8,0	–	q_3 8,0	–
2	q_1 14,4	–10%	q_2 7,0	–12,5%	q_3 6,2	–
3	q_1 14,4	–	q_2 7,7	+10 %	q_3 5,5	+11,29%
Втрата 10 % для q_1			**Виграш 2,5%** для q_2 (12,5–10)%		**Виграш 13,79 %** для q_2 і q_3 (2,5+11,29)%	