2. ГЕОМЕТРІЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

Тема 2.3: Головні радіуси кривизни та лінійні елементи поверхні еліпсоїда

1. Головні радіуси кривизни в даній точці еліпсоїда.
2. Лінійний елемент поверхні еліпсоїда.

1. Головні радіуси кривизни в даній точці еліпсоїд.

В будь-якій точці поверхні еліпсоїда обертання головними нормальними перерізами є:

– меридіальний переріз, тобто нормальний переріз, що проходять через задану точку Q і полюси еліпсоїда PP_1;

– переріз першого вертикалу, що проходить через точку Q і перпендикулярний до меридіального перерізу точки Q.

Радіус кривизни меридіального перерізу буде радіусом кривизни плоскої кривої, від обертання якої утворилась дана поверхня обертання. У сфероїдній геодезії він позначається буквою *M*. Радіус кривизни другого головного перерізу – *N*. Вказані радіуси аналогічні радіусам R_1 та R_2.

Згідно теореми Меньє $R = R_0 \cos\upsilon$ (1.6), радіус кривизни першого вертикалу N буде рівний радіусу паралелі r, поділеному на косинус кута між площиною паралелі та нормаллю до поверхні

$$N = \frac{r}{\cos B}. \tag{2.37}$$

Це означає, що радіус кривизни головного перерізу, перпендикулярного до меридіального, рівний відрізку нормалі до поверхні від поверхні до осі обертання (*рис 2.5*).

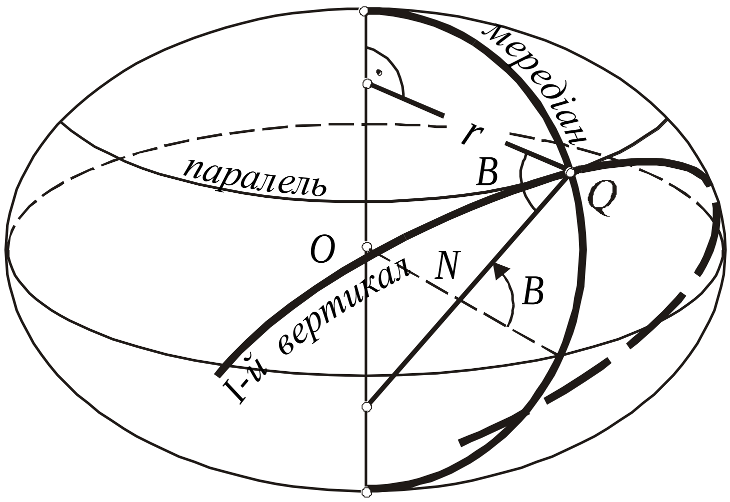


Рис. 2.5.

Радіуси кривизни *M* та *N*, як функції широти *B* даної точки, застосовуються в багатьох теоретичних і практичних розрахунках.

У функції широти радіус кривизни меридіана *M* може бути виражений через формули (1.2) або через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні (1.7).

На основі другої групи формул (1.2) та з врахуванням рівняння (2.10) в редакції (2.13) для радіуса кривизни меридіана запишемо

$$M = \frac{(dx^2 + dz^2)^{3/2}}{dxd^2z - dzd^2x}.$$

Підставивши у вищенаведену формулу значення похідних, отримаємо вираз для радіуса кривизни M

$$M = \frac{(a^2 \sin^2 udu^2 + b^2 \cos^2 udu^2)^{3/2}}{abdu},$$

або

$$M = \frac{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}}{ab}. \tag{2.38}$$

Вираз (2.38) можна перетворити

$$M = \frac{a^3(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 u)^{3/2}}{ab} = \frac{a^2}{b}(1 - e^2 \cos^2 u)^{3/2}.$$

З врахуванням першої формули (2.20)–($tg\Phi = (1 - e^2)tgB$) та формули (2.21)–($\cos u = \dfrac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$), остаточний вираз для радіуса кривизни меридіана M буде мати вид

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} \tag{2.39}$$

З врахуванням (2.11)–($r = a\cos u$) вираз для радіуса кривизни першого вертикалу буде

$$N = \frac{a\cos u}{\cos B},$$

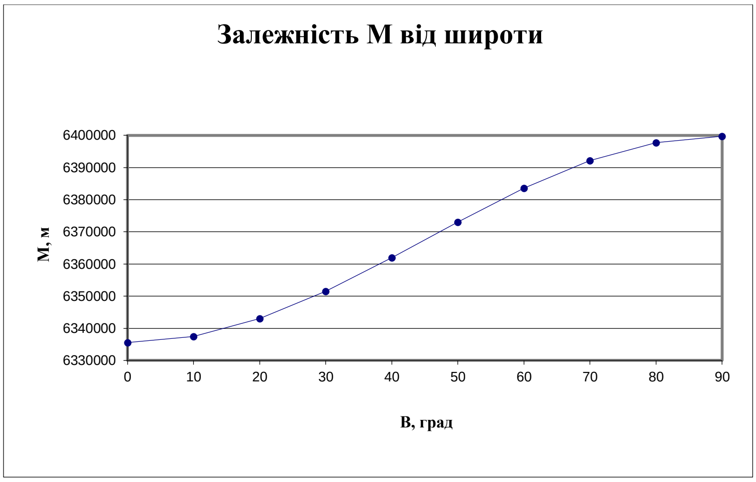
а використовуючи першу із формул (2.21)–($\cos u = \dfrac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$), остаточно отримаємо

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}. \tag{2.40}$$

Величини *M* та *N* характеризують форму поверхні еліпсоїда в околицях даної точки і в подальшому постійно будуть нами використовуватися.

Графічно, залежність радіусів кривизни M і N від широти B, показана на *рис. 2.6 а)* і *б)* відповідно.

а)



б)

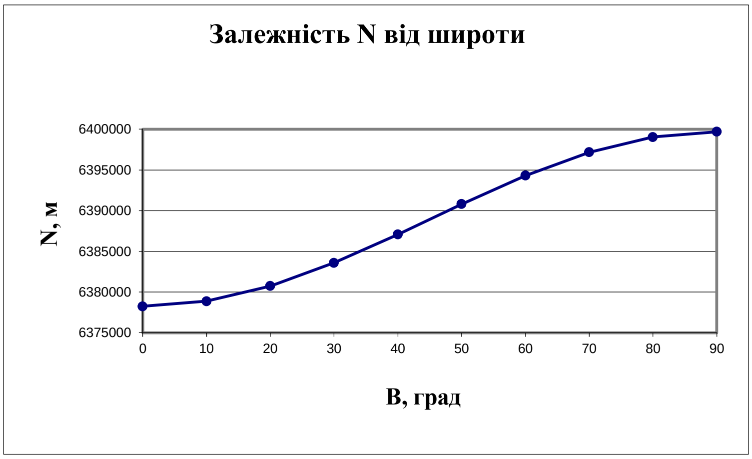


Рис. 2.6.

Більшим за значенням є радіус кривизни N. Дійсно, згідно формул (2.39) і (2.40), маємо

$$\frac{N}{M} = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} \geq 1.$$

$\frac{N}{M} = 1$ тільки при $B=90°$, тобто на полюсі, де радіус кривизни

$$c = M_{90^\circ} = N_{90^\circ} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = a\sqrt{1 + e'^2} = \frac{a^2}{b}. \qquad (2.41)$$

Відношення різниці головних радіусів кривизни до меншого із них може бути виражений формулою

$$\frac{N - M}{M} = \frac{e^2}{1 - e^2}\cos^2 B = e'^2 \cos^2 B = \eta^2.$$

Величина η^2 характеризує відступ форми еліпсоїда в околицях даної точки від сфери. Досить часто застосовуються і інші вирази для радіусів M та N

$$M = \frac{c}{V^3}; \quad N = \frac{c}{V}. \qquad (2.42)$$

З використанням введених позначень, формулу (1.8), запишемо у вигляді

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \qquad (2.43)$$

Дана формула встановлює залежність радіуса кривизни нормального перерізу, проведеного під азимутом A, від радіуса кривизни меридіана та першого вертикала.

Середнє геометричне значення із головних радіусів кривизни

$$R = \sqrt{MN} \tag{2.44}$$

називається *середнім радіусом кривизни* еліпсоїда обертання, а рівняння (2.44) є наслідком формули (1.9).

Середній радіус кривизни застосовується при зображенні частин еліпсоїда на кулі або на площині, при обчисленнях площ і сферичних надлишків фігур на поверхні еліпсоїда.

Наближені значення середнього радіуса кривизни для різних широт можна знайти графічно (*рис. 2.7*).

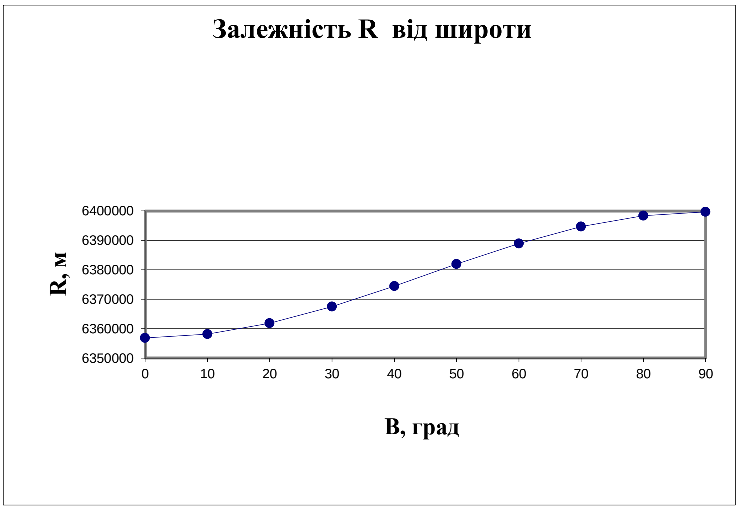


Рис. 2.7.

При розв'язуванні деяких задач Землю приходиться приймати за кулю. Якщо це робиться для досить наближених розрахунків, радіус кулі R приймається рівним 6 371 *км*, в інших випадках можна прийняти $R = \dfrac{a+a+b}{3}$.

2. Лінійний елемент поверхні еліпсоїда.

Через дану точку на поверхні еліпсоїда можна провести низку різних ліній. Кожна з цих ліній певним чином зорієнтована відносно однієї з координатних ліній, а саме меридіана. Кут орієнтування, тобто кут між дотичними, проведеними до меридіана в північному напрямі та заданою лінією, називається *геодезичним азимутом А*. Він відраховується від меридіана в сторону руху годинникової стрілки. Один і той азимут може мати і декілька різних ліній. Це буде в тому випадку, коли ці лінії мають спільну дотичну в даній точці, наприклад, паралель і перший вертикал в заданій точці поверхні еліпсоїда мають однаковий азимут, який дорівнює 90^0 (або 270^0), хоча розташовані вони в різних площинах.

Диференціал дуги ds довільної кривої на поверхні еліпсоїда називається лінійним елементом поверхні еліпсоїда.

На поверхні еліпсоїда координатні лінії мають своє позначення: X – довжина дуги меридіана від екватора (в сторону полюса) до даної точки; Y – довжина дуги паралелі від середнього (початкового) меридіана до даної точки.

Відомо, що для будь-якої кривої радіус її кривизни в даній точці дорівнює відношенню диференціала дуги кривої до диференціалу кута між дотичними до кривої в крайніх точках цієї дуги. Якщо позначити диференціал дуги меридіана через dX, а паралелі через dY, диференціал кута між дотичними до крайніх точок елемента дуги меридіана через dB, а паралелі через dL, то, згідно вище зазначеного, для диференціалів дуг меридіана та паралелі отримаємо відповідно

$$dX = MdB,$$
$$dY = rdL = N\cos BdL.$$

Спроектувавши лінійний елемент на координатні лінії (лінії меридіанів та паралелей), отримаємо (*рис 2.8*)

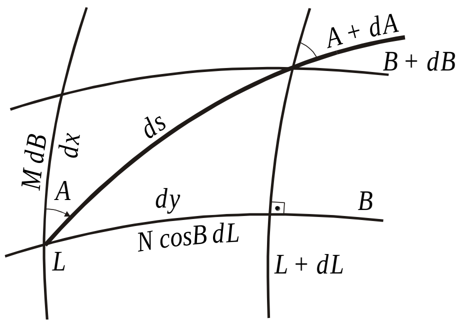


Рис. 2.8.

$$\begin{aligned} ds\cos A = dX = MdB, \\ ds\sin A = dY = N\cos BdL. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Звідки,

$$ds^2 = M^2dB^2 + N^2\cos^2 BdL^2. \tag{2.46}$$

Отримане рівняння (2.46) є аналогом рівняння (1.4)–($ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$) для поверхні еліпсоїда обертання, тобто є першою квадратичною формою поверхні еліпсоїда.

Характер зміни довготи та широти при переміщенні вздовж будь-якої лінії на поверхні еліпсоїда, може бути виражений наступними диференціальними рівняннями, що випливають із (2.45)

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}. \tag{2.47}$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N\cos B}. \tag{2.48}$$

Серед цих формул відсутній вираз, що характеризує зміну азимута A в залежності від переміщення вздовж лінії на величину ds. Справа в тому, що ця залежність не буде однаковою для всіх ліній, тоді як приведенні вище формули відносяться до будь-якої лінії на поверхні.