ЛЕКЦІЯ № 6.

ТЕМА: ***КРИТЕРІАЛЬНА МОВА ОПИСУ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ***

ПИТАННЯ ЛЕКЦІЇ:

6.1. Загальні відомості.

6.2. Множина Парето.

6.1. Загальні відомості.

Критеріями називають показники привабливості (або непривабливості) альтернатив для учасників процесу вибору, зокрема ОПР. У професійній діяльності вибір критеріїв часто визначається багаторічною практикою та досвідом.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли *кожну* альтернативу можна оцінити одним числом (значенням критерію). Тоді порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм чисел.

Нехай $d \in D$ - деяка альтернатива з множини D можливих альтернатив. Вважається, що $\forall d$ може бути задана функція $q(D)$, така, що

$$q(d_1) > q(d_2), \text{ якщо } d_1 > d_2,$$

де знак > означає перевагу альтернативи d_1 над d_2.

Критеріальну функцію $q(d)$ називають також цільовою функцією, функцією переваги або функцією корисності.

Якщо припускати, що вибір альтернативи призводить до однозначних наслідків (вибір в умовах визначеності), а критерій чисельно виражає оцінку цих наслідків (переваг), то найкращою альтернативою є та, яка задовольняє умову

$$d^* = \arg\max_{d \in D} q(d).$$

Часто проста за постановкою задача пошуку оптимальної альтернативи d^* за одним критерієм виявляється складною, оскільки метод її розв’язування визначають як специфікою множини $D = \{d\}$, так і видом критерію $q(d)$.

Покажемо це на простому прикладі побудови лінійної регресії

$$y = k_1 x + k_0, \tag{6.1}$$

яка може бути сформульована як задача пошуку оптимального вектору $k^* = (k_1,k_2)$ коефіцієнтів прямої (6.1), що забезпечує найбільш точне прогнозування значень залежної змінної y, як лінійної функції від незалежної змінної x .

Зазвичай для визначення оптимального значення вектору k^* використовують метод найменших квадратів (МНК), згідно з яким серед можливих значень $k = (k_1,k_2) \in K$ обирають вектор, який задовольняє умову

$$k^* = \arg\min_{k \in K} q(k),$$

де критерій $q(k)$ визначається як сума квадратів

$$q(k) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - k_1 x_i - k_0)^2$$

відхилень значень y_i залежної змінної y , що спостерігалися в експериментальній вибірці з N спостережень, від значень функції (6.1) при $x=x_t$ (рис. 6.1).

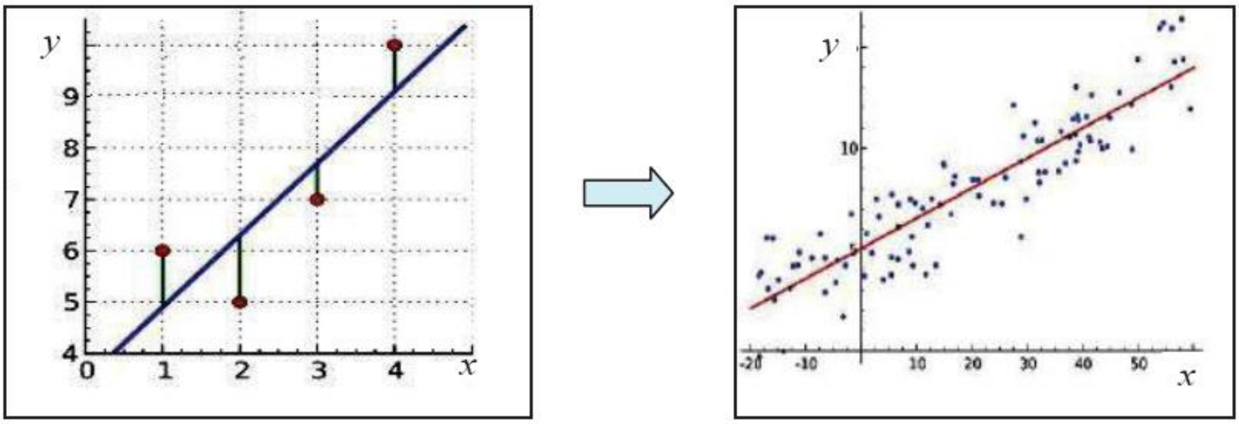

Рисунок 6.1. – Визначення лінії регресії за методом найменших квадратів

Водночас відомо, що визначення значення вектору $k^* = (k_1,k_2)$ за вибіркою спостережень на основі МНК не завжди призводить до побудови оптимальної лінійної регресії (рис. 6.2). Це може статися, наприклад, коли серед точок x_i, y_i експериментальної вибірки присутня всього одна точка - викид, який суттєво відхиляється від інших точок та викликає зміщення оцінок регресійних коефіцієнтів. У результаті замість прийнятної буде побудована хибна лінія регресії, яка не забезпечує найкращу точність апроксимації основних точок вибірки (рис. 6.2, а).

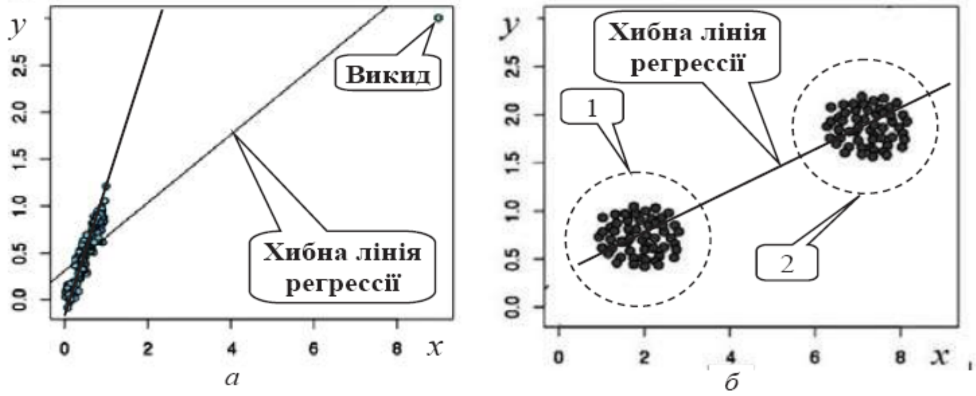

Рисунок 6.2. – Проблеми застосування МНК в реальних ситуаціях

Можна описати ще один приклад, який веде до побудови «хибної регресії» (рис. 6.2,б). Така ситуація виникає тоді, коли експериментальні точки x_i, y_i спочатку групувались в області 1, а потім у результаті систематичної помилки вимірювань, змістилися в область 2. Зрозуміло, що рішення МНК окремо за першими та другими даними є нестійким.

Можна викласти інші приклади неефективного застосування МНК, які також, як і розглянуті, потребують застосування додаткових процедур оброблення даних експериментів.

У переважній більшості задач існує досить багато критеріїв, за якими можуть бути оцінені альтернативні рішення. Тому на практиці для більш повної оцінки альтернатив застосовують не один, а декілька критеріїв, що з різних сторін характеризують кожну альтернативу. В такому випадку виникає задача *багатокритеріальної оптимізації*. Наразі нагадаємо лише основні особливості цієї задачі.

Нехай для оцінювання альтернатив використовують декілька критеріїв $q_i(d)$, $j=1,...,p$. Одним зі способів розв'язування багатокритеріальної задачі є її зведення до однокритеріальної шляхом застосування *суперкритерію,* тобто скалярної функції векторного аргументу

$$q_0(d) = q_0[q_1(d),...,q_p(d)], \tag{6.2}$$

Тоді найкращою вважають альтернативу, яка максимізує суперкритерій, тобто

$$d^* = \arg\max_{d \in D} q_0(d) = \arg\max_{d \in D} q_0[q_1(d),...,q_p(d)]. \tag{6.3}$$

Зауважимо, що в деяких задачах замість (2.3) використовують умову

$$d^* = \arg\min_{d \in D} q_0(d) = \arg\min_{d \in D} q_0[q_1(d),..., q_p(d)].$$

Конкретний вид функції $q_0(d)$ визначає вклад кожного окремого критерію $q_i(d)$, $j = 1,..., p$ у суперкритерій. Зазвичай використовують адитивні

$$q_0(d) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j q_j(d)$$

або мультиплікативні функції

$$q_0(d) = 1 - \prod_{j=1}^{p} \beta_j q_j(d) \ ,$$

у яких вагові коефіцієнті α_j та β_j визначають відносний внесок окремого j-го критерія у суперкритерій, а також узгоджують розмірності критеріїв.

Зауваження. Об’єднання декількох критеріїв в один суперкритерій призводить до низки труднощів і недоліків. Впорядкування точок у багатовимірному просторі принципово не може бути однозначним. Тому навіть «невелика» зміна суперкритерію може призвести до того, що нова «оптимальна» альтернатива дуже сильно відрізнятиметься від старої.

Крім того, об’єднання окремих критеріїв у суперкритерій за допомогою адитивної згортки не завжди є правомірним та може призвести до парадоксальних рішень.

Продемонструємо це на жартівливому прикладі.

Приклад 6.1. Нехай для вибору якісного телевізору застосовують два критерії: якість звуку та якість зображення, які оцінюють інтервальними величинами $q_1 \in [0,1]$ і $q_2 \in [0,1]$ відповідно.

Зрозуміло, що можна окремо оцінювати якість звуку і зображення пороговими правилами, наприклад, так:

$$\text{ЗВУК} = \begin{cases} \text{Поганий,} & \text{якщо} \quad q_1 \le 0{,}5, \\ \text{Гарний,} & \text{якщо} \quad q_1 > 0{,}5, \end{cases}$$

$$\text{ЗОБРАЖЕННЯ} = \begin{cases} \text{Погане,} & \text{якщо} \quad q_2 \le 0{,}5, \\ \text{Гарне,} & \text{якщо} \quad q_2 > 0{,}5. \end{cases}$$

Водночас очевидно, що неможливо компенсувати поганий звук гарним зображенням та навпаки, тобто область поганого телевізора не є опуклою (рис. 6.3).

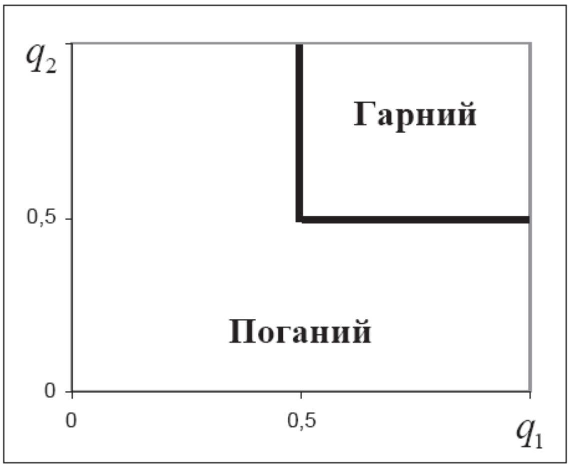

Рисунок 6.3. – Області поганих та гарних телевізорів

Тому *з будь-якими* ваговими коефіцієнтами α_1 і α_2 суперкритерій

$$q_0 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$$

немає сенсу: використання двокритеріального правила

$$\text{ТЕЛЕВІЗОР} = \begin{cases} \text{Поганий,} & \text{якщо } \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 \le h_0, \\ \text{Гарний,} & \text{якщо } \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 > h_0. \end{cases}$$

з будь-яким пороговим значенням h_0 веде до абсурдних рішень.

Наприклад, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ та $h_0 = 0{,}5$ телевізор з огидним звуком ($q_1 = 0{,}3$), але виключно гарним зображенням ($q_2 = 0{,}95$) буде визнаний гарним (рис. 6.4) тільки лише тому, що виконується умова

$$q_0 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0{,}625 > 0{,}5.$$

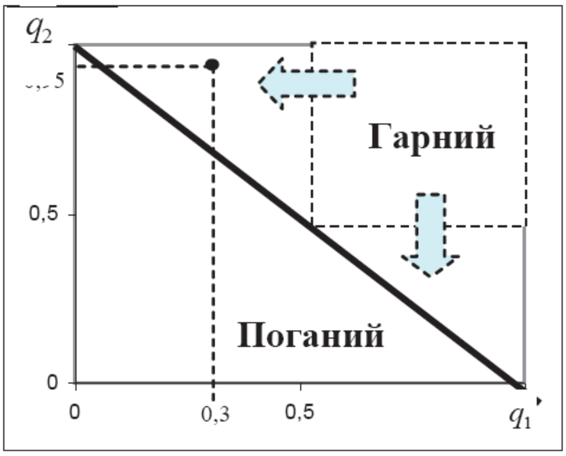

Рисунок 6.4. – Неправомірне використання двокритеріального правила

Згаданий вище парадоксальний результат має цілком конкретне математичне пояснення. Вже давно доведено, що застосування адитивної згортки критеріїв правомірно лише в тих випадках, коли критерії незалежні за перевагами

У теорії прийняття рішень критерії $q_i(d)$ та $q_j(d)$ вважають *залежними,* якщо порівняння альтернативи за одним критерієм, наприклад, за критерієм $q_i(d)$, змінює *переваги* ОПР в умовах *однакових* оцінок за другим критерієм $q_j(d)$.

Наведемо наочний приклад залежності критеріїв. Припустимо, що купуючи автомобіль людина враховує три критерії:

- q_1 - ціну (чим менше, тим краще);
- q_2 - розмір (чим більше, тим краще);
- $д_3$ - конструкцію коробки передач (автоматична краще механічної).

Нехай відповідно до критерію q_1 автомобілі, що порівнюють, мають *однакову* оцінку. Тоді, якщо ОПР бажає купити автомобіль з автоматичною коробкою передач, то він віддає переваги великій машині. Але його переваги можуть змінитися на зворотні для автомобіля з механічною коробкою передач через труднощі в керуванні великою машиною. Саме тому в згаданому вище прикладі критерії q_1 і q_2 є *залежними* від критерію q_3.

Зрозуміло, що порушення умов незалежності за перевагами істотно ускладнює задачу прийняття рішення. До того ж для повної перевірки умови незалежності слід розглянути *всі* пари критеріїв. Однак на практиці зазвичай застосовують спрощену перевірку: обирають один або два найбільш істотних критерія, а інші розглядають тільки в парі з ними. Або просто припускають, що умови незалежності виконуються.

Взагалі на складність задач прийняття рішень впливає кількість альтернатив та кількість критеріїв. Для невеликого числа критеріїв (два - три) задача порівняння декількох альтернатив відносно проста і прозора: якості альтернатив за критеріями можуть бути безпосередньо зіставлені.

При великій кількості критеріїв задача суттєво ускладнюється. З метою спрощення зазвичай критерії поєднують в певні групи, що мають конкретне змістовне значення та незалежні за перевагами.

Підставою для природного угруповання критеріїв є можливість визначити плюси та мінуси альтернатив для груп критеріїв та оцінити їх переваги та недоліки. Таке угруповання критеріїв робить процес прийняття рішень значно більш усвідомленим й ефективним.

Використання критеріїв для оцінки альтернатив вимагає визначення градацій якості: кращих, гірших і проміжних оцінок. Інакше кажучи, існують різні шкали оцінок за критеріями.

Розрізняють шкали неперервних і дискретних оцінок, а також шкали кількісних і якісних оцінок. Так, для критерію «вартість» може бути використана неперервна кількісна шкала оцінок (у грошових одиницях). Для критерію «наявність дачі» може бути використана якісна двійкова шкала: є або немає.

Крім категорій «якісні - кількісні», «неперервні - дискретні», в теорії прийнятті рішень розрізняють наступні типи шкал:

1. *Шкала порядку* - оцінки впорядковані за зростанням або спаданням переваг ОПР. Прикладом може слугувати шкала екологічної чистоти району біля місця проживання:

• дуже чистий район;

• цілком задовільний за ступенем чистоти;

• екологічне забруднення велике.

2. *Інтервальна шкала*, для якої визначають рівні відстані за зміною якості між оцінками. Наприклад, шкала додаткового прибутку підприємця може бути 1 млн, 2 млн, 3 млн грн тощо. Для інтервальної шкали характерно, що початок відліку вибирають довільно, так само, як і крок (відстань між оцінками) шкали.

3. *Шкала пропорційних оцінок* - ідеальна шкала. Прикладом є шкала оцінок згідно з критерієм вартості, відлік у якій починається з встановленого значення (наприклад, з нульовою вартістю).

Слід зауважити, що прийняття рішень за сукупністю критеріїв $q_j(d)$, $j = 1,...,p$ не обов'язково зводиться до формування суперкритерію (6.2).

Один з таких альтернативних підходів ґрунтується на пошуку альтернативи з заданими якостями. Задача полягає у тому, щоб серед множини можливих альтернатив D знайти таку альтернативу, яка в просторі окремих критеріїв найближча до опорної точки з заданими якостями.

Простим прикладом такого методу є пошук роботи, яка влаштовує ОПР, за двома критеріями: q_1 - відстань від дому до офісу та q_2 - рівень зарплати (рис. 6.5).

Зауважимо, що цей метод не завжди є обґрунтованим. Крім цього він потребує нормування критеріїв, для чого застосовують різні підходи.

Якщо діапазон значень критерію q_j не дорівнює нулю, тобто Δ_{qi} = max q_j - min $q_j \neq 0$, то перехід від q_j до нормованих значень $q_j^{\text{норм}} \in [0,1]$ може бути здійснений за формулою

$$q_j^{\text{норм}} = \frac{q_j - \min q_j}{\max q_j - \min q_j}, \; j = 1,\ldots,p. \tag{6.4}$$

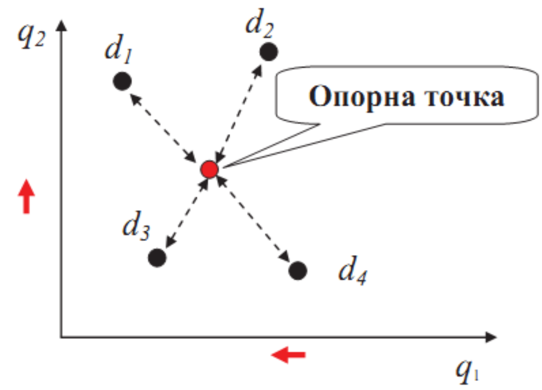

Рисунок 6.5. – Простір критеріїв: q_1 – відстань до роботи, q_2 – зарплата

Нормування за формулою (6.4) здійснюють, якщо значення критерію q_j щільно заповнюють інтервал

$$\Delta_{q_i} = \max q_j - \min q_j.$$

Якщо ж для оцінювання деяких альтернатив значення q_j можуть включати відносно рідкісні викиди, які набагато перевищують типові значення, то за (6.4), саме такі викиди визначать масштаб нормування. Це призведе до того, що основна маса нормованих значень $q_j^{\text{норм}}$ критерію q_J зосередиться поблизу нуля.

У таких випадках набагато надійніше орієнтуватися на статистичні характеристики критерію, такі як середнє M_{qj} і середнє квадратичне відхилення σ_{q_j} та для нормування критеріїв замість (6.4) застосовувати формулу

$$q_j^{\text{норм}} = \frac{q_j - M_{q_j}}{\sigma_{q_j}}, \qquad j = 1,\ldots,p.$$

6.2. Множина Парето

Якщо уважно подивитись на рис. 6.5, то можна зробити такі висновки.

1. Альтернатива d_3 має найменшу відстань від опорної точки, тобто саме цю альтернативу слід визнати оптимальною за розглянутим методом. Водночас

з точки розу здорового глузду альтернатива d_1 більш приваблива: обравши такий варіант роботи ОПР буде ближче до офісу (критерій q_1) та мати більшу платню (критерій q_2).

2. Альтернатива d_4 є найгірша (аутсайдер) серед можливих альтернатив $d_1,\ldots, d_4$: відстань до офісу найбільша (критерій q_1), а платня найменша (критерій q_2).

Таким чином, якщо не застосовувати додаткових засобів, то досить привабливий метод пошуку альтернативи з заданими якостями, який ґрунтується на аналізі відстаней до опорної точки в просторі окремих критеріїв, має суттєві недоліки.

Розглянемо один з таких додаткових засобів.

Зрозуміло, що при розв'язуванні задачі прийняття рішень за сукупністю критеріїв розумно звузити початкову множину D допустимих альтернатив, тобто побудувати множину $D_0 \subseteq D$, якій заздалегідь належить оптимальна альтернатива d^*.

Якщо виявиться, що $D_0 \subset D$, тобто можна наперед видалити з розгляду неефективні альтернативи ($D / D_0 \neq \varnothing$), то пошук оптимальної альтернативи буде спрощений.

Один з популярних методів звуження множини D ґрунтується на багатокритеріальній оптимізації за Парето. Згідно з цим методом вважається, що альтернатива d_i має переваги порівняно з альтернативою d_j етому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями і краща d_j хоча б за одним критерієм.

Якщо ж існує розбіжність переваг d_i і d_j хоча б за одним критерієм, то такі альтернативи вважають непорівняними.

У результаті попарного порівняння, гірші за всіма критеріями альтернативи (аутсайдери) відкидають, а альтернативи, що залишились утворюють підмножину P_a альтернатив, оптимальних за Парето.

У множину Парето P_a входять тільки ті альтернативи, які не домінують одна над іншою, але домінують над варіантами, що не входять у цю множину. Якщо $D / Pa \neq \varnothing$, тобто множина неефективних альтернатив не порожня, то в множині Парето обов'язково знайдеться альтернатива, яка домінує над деякою альтернативою з неефективної множини *за всіма критеріями.*

Нехай $D = \{d_1,\ldots, d_M\}$ - множина з M можливих альтернатив, а

$$q_i(d_j)\ ,\ i = 1,\ldots, p\ ,\ j = 1,\ldots, M$$

- сукупність значень p різних критеріїв, за якими оцінюють кожну з цих альтернатив, причому чим більше значення критерію, тим краща відповідна властивість альтернативи з точки зору ОПР.

Формально множину Парето P_a визначають таким чином.

Припустимо, що для двох альтернатив d_α i d_β

$$(1 \le a \le M, 1 \le \mathrm{P} \le M, \alpha \ne \beta)$$

виконується нерівність

$$q_i(d_\alpha) \ge q_i(d_\beta) \ \ \forall i = 1,\ldots, p, \tag{6.5}$$

і, крім цього, існує хоча б один критерій, для якого (6.5) переходить до *строгої нерівності.*

У такому випадку альтернатива d_α заздалегідь краща за альтернативу d_β, яку можна видалити з розгляду, тобто

$$d_\beta \notin Pa .$$

Таким чином, найпростіший алгоритм визначення множини Pa полягає у почерговому виборі альтернатив вихідної множини $D = \{d_1,\ldots, d_M\}$ і порівняні обраної альтернативи з рештою альтернатив.

Якщо знайдеться альтернатива, яка домінує над обраною, то переходимо до аналізу наступного варіанту, оскільки обрана альтернатива свідомо не належить до множини Парето. Якщо ж жодна з альтернатив множини $D = \{\mathrm{d}_1,\ldots, d_\mathrm{M}\}$ не домінує над обраною альтернативою, то вважають, що обрана альтернатива належить до множини Pa .

Потім обирається наступний елемент вихідної множини і так до тих пір, поки не будуть перевірені всі можливі варіанти.

Приклад 6.2. Нехай треба вибрати мобільний телефон за двома критеріями: q_1 - термін роботи акумулятора та q_2 - ємність оперативної пам’яті.

Покажемо, як можна просто визначати множину Парето графічним способом (рис. 6.6).

Зобразимо альтернативи телефонів з конкретними значеннями критеріїв точками на площині (рис. 6.6,а). Для кожного з варіантів визначимо альтернативи, які гірші одразу за двома критеріями. Для цього потрібно через точку, що аналізується, провести горизонтальну та вертикальну лінії та видалити всі альтернативи, які належать області, що ліворуч та нижче даної точки.

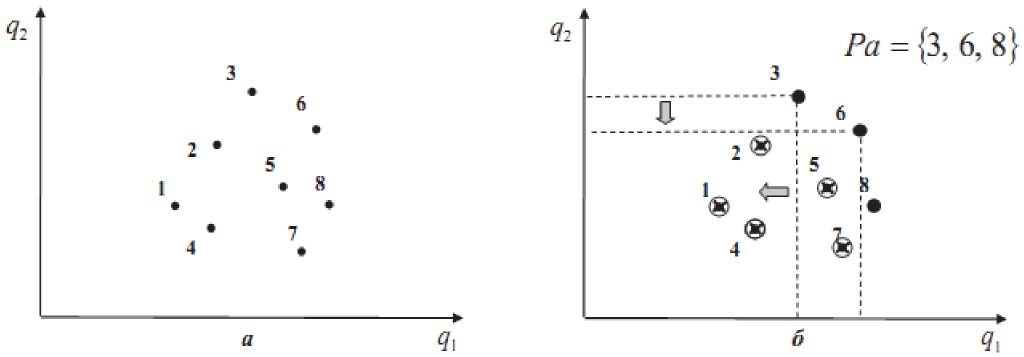

Рисунок 6.6. – Визначення множини Парето

Наприклад, для точки 3 видаляють альтернативи 1, 2, 4, а для точки 6 - альтернативи 5, 7. У результаті визначаємо, що множину Парето утворюють точки 3, 6, 8**.**

Приклад 6.3. Змінимо тепер один з критеріїв вибору телефону та будемо його обирати згідно з критеріями: q_1 - термін роботи акумулятора та q_2 - ціна.

У такому випадку, на відміну від попереднього, критерії мають протилежний напрямок: критерій q_1 бажано збільшувати, а критерій q_2 зменшувати. Продемонструємо порядок визначення множини Парето *Pa*.

Нехай альтернативи телефонів з конкретними значеннями q_l та q_2 зображено точками на площині (рис. 6.7, а). Для побудови множини Парето, тепер уже для кожної точки, що аналізується, потрібно видаляти неефективні альтернативи, які знаходяться ліворуч та вище даної точки. Тобто видаляти альтернативи, у яких термін роботи акумулятора менше, а ціна більше.

Наприклад, для точки 5 видаляють неефективні за двома критеріями альтернативи 2, 3, для точки 7 - альтернативи 1, 4, 5, а для точки 8 - альтернатива 6**.** У результаті множину Парето утворюють лише точки 7 і 8 (рис. 6.7).

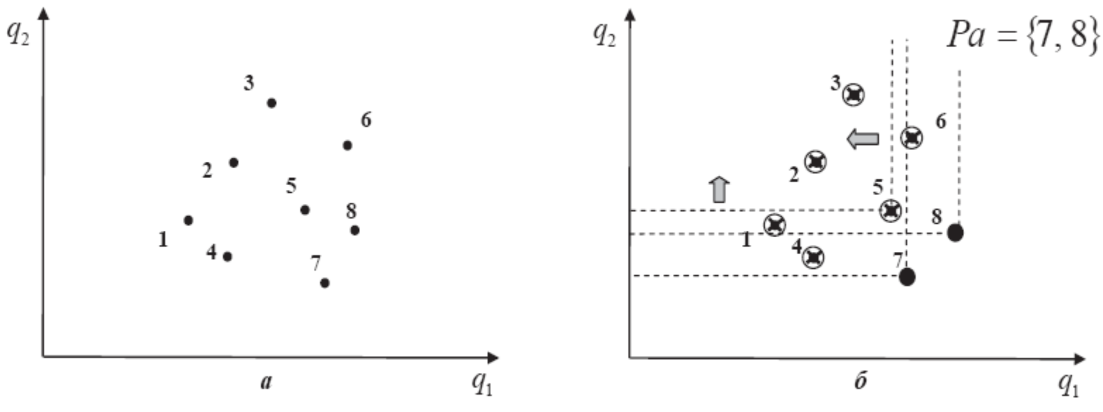

Рисунок 6.7. – Визначення множини Парето

Зрозуміло, що коли множина Парето включає декілька альтернатив, то остаточний вибір ґрунтується на пораді експерта або застосовується додатковий критерій.

Розглянемо ще раз альтернативи, що зображені на рис. 6.5. Після переходу від початкової множини альтернатив d_1,d_2,d_3,d_4 (рис. 6.8, *а)* до підмножини Парето (рис. 6.8, *б)* будуть видалені неефективні альтернативи d_3, d_4. Якщо тепер серед альтернатив d_1, d_2, які належать до множини Парето Pa, вибрати альтернативу d_1, яка знаходиться на мінімальній відстані від опорної точки, то така альтернатива і може вважатися оптимальною.

Зауважимо, що для реалізації методу пошуку альтернативи з заданими якостями можуть застосовуватись не тільки декартові відстані, а й манхеттенська метрика, відстані Хемінга, Левенштейна, Мінковського та інші.

Розглянемо ще один приклад побудови множини Парето альтернатив, що характеризуються трьома критеріями.

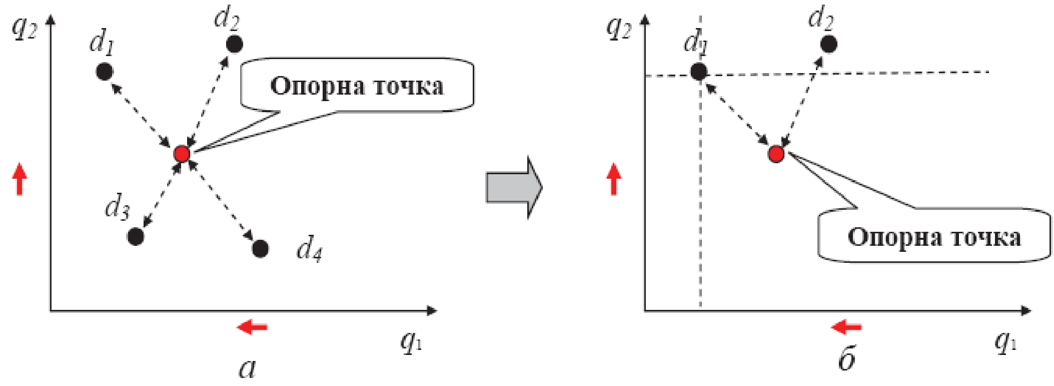

Рисунок 6.8. – Визначення оптимальної альтернативи на множині Парето

Приклад 6.4. Треба вибрати місце роботи з варіантів, викладених у табл. 6.1, ґрунтуючись на критеріях q_1 - зарплата, q_2 - термін відпустки, q_3 - термін поїздки до офісу.

Зрозуміло, що критерії q_1 та q_2 бажано максимізувати, а критерій q_3 - мінімізувати.

Аналізуючи табл. 2.1, визначимо спочатку Парето оптимальну множину. Легко бачити, що за трьома критеріями можна заздалегідь видалити неефективні варіанті 1, 2, 8 і 9.

Таким чином, множина Парето включає п’ять альтернатив:

$$Pa = \{3,4,5,6,7\}.$$

Таблиця 2.1. Варіанти альтернатив місця роботи

Варіанти	**Критерії**		
	Зарплата	**Відпустка**	**Термін поїздки**
1	9000	20	60
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	**6000**	**30**	**10**
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

Для того, щоб звузити множину Парето введемо додаткові обмеження на критерії:

- зарплата - не менше ніж 6000 грн на місяць;
- термін відпустки - не менше ніж 30 днів;
- термін поїздки - не більше ніж 40 хв.

Таким обмеженням задовольняють вже тільки два варіанти з множини Парето - альтернативи 3 та 6, між якими потрібно зробити остаточний вибір на основі неформальних міркувань.

Розглянемо ще один підхід до визначення оптимального варіанту за даними табл. 6.1, а саме оптимізацію на основі критеріїв, що мають *пріоритети.*

Для цього впорядкуємо критерії за їх важливістю для ОПР, наприклад, так

$$q_1 \succ q_3 \succ q_2,$$

тобто будемо вважати, що для ОПР найбільш важливим є розмір зарплати, а найменш важливим - термін відпустки.

Тоді, відповідно до даних у табл. 6.1 максимальному значенню зарплати (q_1= 7000 грн) відповідають варіанти 1 та 7. Далі, порівнюємо ці варіанти за терміном поїздки від дому до офісу. Оскільки значення цього критерію однакові (q_3 = 60 хв), то порівнюємо термін відпустки.

Звідси випливає, що оптимальним є варіант 7, для якого зарплата q_1 = 7000 грн, відпустка q_2 = 35 днів і термін поїздки до роботи q_3 = 60 хв.

Розглянуті приклади показують, що оптимальне рішення за багатьма критеріями не є однозначним і залежить від методу, який застосовують для розв'язування конкретної задачі.

Слід також зауважити, що вище згадані приклади є відносно простими. В реальних же ситуаціях прийняття рішень за багатьма критеріями, кількість яких може бути великою, отримати обґрунтований розв'язок задачі суттєво складніше, а іноді й практично не можливо.

Методологія прийняття рішень у задачах багатокритеріальної оп- тимізації досі активно розвивається, про що свідчать чисельні публікації у науковій літературі.