Лекція 3. Екстремум функції багатьох змінних

1. Частинні похідні й диференціали вищих порядків
2. Локальні екстремуми функції двох змінних.
3. Застосування екстремуму в економіці
4. Умовні екстремуми. Метод множників Лагранжа

1. Частинні похідні й диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D \subset R^2$. Припустимо, що в області D існують частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$, які називаються частинними похідними першого порядку. Частинні похідні функцій $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ називають ***частинними похідними другого порядку*** або ***другими частинними похідними*** функції $z = f(x, y)$. Їх усього чотири. Якщо процес подальшого диференціювання можливий, то частинні похідні від похідних другого порядку називають ***частинними похідними третього порядку*** (або ***третіми частинними похідними)*** й т.д.

Якщо першу похідну функції $z = f(x, y)$ було взято, припустимо, за змінною x, то її частинні похідні в точці $M(x; y)$ позначаються так:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = f''_{xx}(x, y), \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = f''_{xy}(x, y)$$

або

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Аналогічні позначення використовують і для других частинних похідних, наприклад, $z''_{yy} = (z'_y)'_y = f''_{yy}(x, y)$, $z''_{yx} = (z'_y)'_x = f''_{yx}(x, y)$.

Означення. Частинні похідні другого порядку z''_{xy} і z''_{yx} називаються **мішаними частинними похідними.**

Приклад 1. Обчислити частинні похідні другого порядку функції $z = e^{3x} \sin 5y$.

Знаходимо частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{3x} \sin 5y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5e^{3x} \cos 5y$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9e^{3x} \sin 5y, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 3e^{3x} 5\cos 5y = 15e^{3x} \cos 5y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 15e^{3x}\cos 5y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5e^{3x}(-5\sin 5y) = -25e^{3x}\sin 5y.$$

Приклад 2. Обчислити частинні похідні другого порядку функції $z = arctg\,\dfrac{y}{x}, \quad (x \neq 0)$.

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(x^2+y^2)\cdot 0 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(x^2+y^2)\cdot 1 - 2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2)\cdot 0 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

У наведених прикладах мішані похідні виявилися рівними, хоча це буває не завжди. Відповідь на це питання про рівність мішаних других похідних функції двох змінних дає наступна теорема.

Теорема. Якщо функція $z = f(x,y)$ має частинні похідні другого порядку в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ і мішані похідні z''_{xy} і z''_{yx} неперервні в самій точці, то справедлива рівність: $z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0)$.

Означення. Функція $z = f(x,y)$ називається n разів диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо частинні похідні $(n-1)$-го порядку є диференційовними функціями в цій точці.

Нехай функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$ і її деякому околі. Тоді диференціал функції в цій точці обчислюється за формулою

$$dz = z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy.$$

Його називають диференціалом першого порядку. Нехай функція $z = f(x,y)$ двічі диференційовна в точці $M(x; y)$. Диференціал від диференціала першого порядку dz функції $z = f(x,y)$ в даній точці називається диференціалом другого порядку (або другим диференціалом) і позначається $d(dz) = d^2 z$. Він обчислюється за формулою

$$d^2z = z''_{xx}(x,\, y)dx^2 + 2z'_{xy}(x,\, y)dxdy + z''_{yy}(x,\, y)dy^2.$$

2. Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена і неперервна деякому околі точки $M_0(x_0;\, y_0)$.

Означення. **Точка** $M_0(x_0;\, y_0)$ **називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції** $z = f(x,y)$, якщо існує такий δ-окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x;\, y)$ із цього околу виконується нерівність

$$f(x_0,\, y_0) \geq f(x,\, y) \qquad \bigl(f(x_0,\, y_0) \leq f(x,\, y)\bigr).$$

Точки локального максимуму і локального мінімуму називаються **точками локального екстремуму функції** $z = f(x,y)$, а значення функції в цих точках – **екстремумами функції.**

Зауважимо, що поняття екстремуму функції має локальний характер, і тому мінімум функції в деяких випадках може бути більшим за максимум.

Відповідно до означення локального екстремуму (мінімуму або максимуму) повний приріст функції $\Delta z = f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0)$ задовольняє одну з умов в околі точки $M_0(x_0;\, y_0)$**:**

$\Delta z = f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) \leq 0$, якщо $M_0(x_0;\, y_0)$ – точка максимуму;

$\Delta z = f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) \geq 0$, якщо $M_0(x_0;\, y_0)$ – точка мінімуму.

Теорема **(необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних).** Якщо функція $z = f(x,y)$ у точці $M_0(x_0;\, y_0)$ має екстремум і частинні похідні першого порядку, то в цій точці частинні похідні дорівнюють нулю, тобто

$$f'_x(x_0,\, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,\, y_0) = 0. \qquad (1)$$

Зауваження. Якщо функція $z = f(x,y)$ у точці, то в точці локального екстремуму $df(M_0) = 0$, $grad\ f(M_0) = 0$.

Умови (1) не є достатніми умовами екстремуму.

Означення. Точки, що задовольняють систему рівнянь (1), називаються **стаціонарними точками функції** $z = f(x,y)$. Як і у випадку функції однієї змінної, в стаціонарній точці зовсім не обов’язкове забезпечення наявності екстремуму. Наприклад, для функції $z = xy$ частинні похідні $z'_x = y$, $z'_y = x$ перетворюються у нуль у точці $(0;\, 0)$, у якій $z = 0$. Водночас видно, що в довільному околі цієї точки функція набуває як додатних, так і від’ємних значень, і екстремуму не має. Бувають ситуації, коли в окремих точках деякі частинні похідні мають нескінченні значення або зовсім не існують. Такі точки також треба віднести до “підозрілих” на екстремум разом із стаціонарними точками. Тому стаціонарні точки й точки, в яких частинні похідні не існують, називаються **точками можливого екстремуму**, або **критичними точками**.

Теорема **(достатні умови локального екстремуму функції двох змінних).** Нехай функція $z = f(x, y)$ у деякому δ-околі стаціонарної точки $M_0(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, причому $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. Запишемо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то в точці $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум, причому якщо $A > 0 -$локальний мінімум, якщо $A < 0 -$локальний максимум;

2) якщо $\Delta < 0$, то в точці $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ екстремуму не має;

3) якщо $\Delta = 0$, то для вирішення питання про існування екстремуму в точці $M_0(x_0; y_0)$ потрібне додаткове дослідження.

Алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум

Для того, щоб знайти екстремуми функції $z = f(x, y)$, потрібно:

1) обчислити частинні похідні першого порядку f'_x, f'_y;

2) розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$ і знайти стаціонарні точки M_i;

3) обчислити частинні похідні другого порядку f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy};

4) для кожної стаціонарної точки M_i обчислити значення $A = f''_{xx}(M_i)$, $B = f''_{xy}(M_i)$, $C = f''_{yy}(M_i)$ і зробити висновки про наявність екстремумів на підставі теореми;

5) обчислити значення функції в точках екстремуму.

Приклад 3. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Знаходимо частинні похідні: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.

Прирівнявши ці похідні до нуля, дістанемо систему рівнянь, з якої визначатимуться стаціонарні точки даної функції.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0; \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2; \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Тоді $y_1 = 0,\ y_2 = 1$. Маємо дві стаціонарні точки: $M_1(0;\,0),\ M_2(1;\,1)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y,$$

обчислюємо їх значення у кожній стаціонарній точці і перевіряємо у ній виконання достатньої умови екстремуму. Дістанемо:

для точки $M_1(0;\,0)$: $A = 0,\ B = -3,\ C = 0,\ \Delta = AC - B^2 = -9 < 0$;

для точки $M_2(1;\,1)$: $A = 6 > 0,\ B = -3,\ C = 6,\ \Delta = AC - B^2 = 27 > 0$.

У точці M_1 маємо $\Delta < 0$, тому екстремуму не має.

У точці M_2 маємо $\Delta > 0$ і $A > 0$, а отже, це точка мінімуму функції і $z_{\min} = z(M_2) = -1$.

Приклад 4. Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Знаходимо частинні похідні: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y$.

Прирівнявши ці похідні до нуля, дістанемо систему рівнянь, з якої визначатимуться стаціонарні точки даної функції.

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0; \\ y^3 + x - y = 0, \end{cases} \Rightarrow +\begin{cases} x^3 - x + y = 0; \\ y^3 + x - y = 0, \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow y = -x.$$

Підставивши у перше рівняння, знайдемо значення x:

$$x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -\sqrt{2}.$$

Тоді $y_1 = 0,\ y_2 = -\sqrt{2},\ y_3 = \sqrt{2}$. Маємо три стаціонарні точки $M_1(0;\,0),\ M_2(\sqrt{2};\,-\sqrt{2}),\ M_3(-\sqrt{2};\,\sqrt{2})$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4,$$

й обчислюємо їх значення у кожній стаціонарній точці і перевіряємо у ній виконання достатньої умови екстремуму. Дістанемо:

для точки $M_1(0;\,0)$: $A = -4,\ B = 4,\ C = -4,\ \Delta = AC - B^2 = 0$;

для точки $M_2(\sqrt{2};\,-\sqrt{2})$: $A = 20 > 0,\ B = 4,\ C = 20,\ \Delta = AC - B^2 = 384 > 0$;

для точки $M_3(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$: $A = 20 > 0, B = 4, C = 20, \Delta = AC - B^2 = 384 > 0$.

У точках M_2 і M_3 маємо $\Delta > 0$ і $A > 0$, а отже, це точки мінімуму функції і $z_{\min} = z(M_2) = z(M_3) = -8$.

У точці M_1 маємо $\Delta = 0$, і достатні умови відповіді не дають. Додатковим дослідженням можна встановити, що в початку координат функція екстремуму не має. Справді, в цій точці $z = 0$, а в довільному околі початку координат є точки, в яких значення z можуть бути як додатними, так і від'ємними. Наприклад, уздовж осі Ox (тобто для $y = 0$)

$$z = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0$$

поблизу початку координат, а вздовж бісектриси $y = x$ значення функції

$$z = x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 > 0.$$

3. Застосування екстремуму в економіці

Розглянемо застосування екстремуму в економіці.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – обсяги випуску різних товарів фірмою, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – відповідно їх ціни (всі p_i – сталі величини).

Нехай витрати виробництва цих товарів задаються функцією витрат $V = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тоді функція прибутку має вигляд

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n) - V(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Максимум прибутку природно шукати як локальний екстремум функції багатьох змінних $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Необхідні умови існування локального екстремуму, тобто $\dfrac{\partial P}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$, приводять до системи алгебраїчних рівнянь відносно змінних x_i:

$$p_i - \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1, n} \Rightarrow p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i},\ i = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Остання система реалізує відоме правило економіки: гранична ціна товару дорівнює граничним витратам на виробництво цього товару.

Розв'язком системи (2) є набори значень $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, які за достатніми умовами існування екстремуму визначають набір обсягів товарів x_i, які потрібні, аби за даної функції витрат на їх виробництво в спектрі цін, що склалися, забезпечити максимальний прибуток.

Приклад 5. Нехай фірма випускає два види товарів. Позначимо їх через x та y. Нехай ціни на ці товари становлять відповідно $p_1 = 8$ і $p_2 = 10$ ум.

гр. од., а функція витрат $V(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Знайдемо максимальний прибуток, який може одержати фірма.

Функція прибутку фірми

$$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Запишемо необхідні умови локального екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 8 - 2x - y = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 10 - x - 2y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 8, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Rightarrow M(2;\,4) -$$

критична точка.

Перевіримо достатні умови локального екстремуму:

$$A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2,\; B = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -1, C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2,\; \Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

і $A = -2 < 0$.

Отже, $M(2;\,4)$ − точка локального максимуму. Максимальний прибуток дорівнює $P_{\max} = P(M) = 28$.

4. Умовні екстремуми. Метод множників Лагранжа

Екстремум функції $z = f(x, y)$ при виконанні умови $\varphi(x, y) = 0$ називають умовним екстремумом функції. Умова $\varphi(x, y) = 0$ називається ***рівнянням зв'язку.***

Умовні екстремуми часто використовуються при дослідженні оптимізації багатьох економічних та соціальних проблем. Дослідити функцію на умовний екстремум можна двома методами. Перший метод – прямий, аби метод зведення до задачі про безумовний екстремум. Його можна застосувати, якщо рівняння $\varphi(x, y) = 0$ розв'язне, наприклад відносно $y = \psi(x)$. Тоді , підставляючи $y = \psi(x)$ у вираз функції $z = f(x, y)$, дістанемо складну функцію однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$, яку і досліджують на екстремум.

Приклад 6. Знайдемо екстремуми функції $z = x^2 + y^2$, якщо її змінні задовольняють умову $x + y - 2 = 0$.

Екстремум цієї функції шукають на не всій площині xOy, а на прямій $x + y - 2 = 0$. Підставимо у функцію вираз для y з умови зв'язку, тобто $y = 2 - x$, і тим самим зведемо задачу про умовний екстремум для функції

$z = x^2 + y^2$ до задачі про безумовний екстремум для функції $z = x^2 + (2-x)^2$. Ця функція має екстремум у точці $x = 1$, тобто функція $z = x^2 + y^2$, за наявності даного зв'язку, має умовний мінімум $z = 2$ у точці $(1; 1)$, який не збігається з безумовним мінімумом функції в точці $(0; 0)$.

Другий метод – метод множників Лагранжа, сутність якого полягає в наступному:

1) записати функцію трьох змінних $L(x, y, \lambda)$ вигляду

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

яка називається функцією Лагранжа, а λ – множником Лагранжа.

2) знайти стаціонарні точки $M_i(x_i, y_i, \lambda_i)$ функції Лагранжа, використовуючи необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

3) перевірити у кожній стаціонарній точці достатні умови існування екстремуму функції $L(x, y, \lambda)$ та його типу за допомогою знаку другого диференціалу функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2. \quad (6)$$

Якщо $d^2L(M_i) < 0$, то функція $z = f(x, y)$ в точці M_i має умовний максимум, а якщо $d^2L(M_i) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ в точці M_i – умовний мінімум. При дослідженні знаку d^2L в кожній стаціонарній точці слід мати на увазі, що диференціали змінних dx, dy в $d^2L(M_i)$ залежні, і ця залежність диктується рівнянням зв'язку.

Аналогічно можна знайти умовний екстремум функції трьох і більшої кількості змінних. За наявності декількох рівнянь зв'язку функція Лагранжа матиме стільки постійних множників, скільки є рівнянь зв'язку.

Приклад 16. Знайти умовний екстремум функції $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Запишемо умову зв'язку у вигляді $\varphi(x, y) = 0$, тобто $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Складемо функцію Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки: $M_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\quad M_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Для перевірки достатніх умов існування екстремуму обчислимо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

Запишемо другий диференціал функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$ (6):

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$$

й обчислимо його значення в кожній стаціонарній точці:

$$d^2L_{|M_1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(dx^2 + dy^2) = \sqrt{2}(dx^2 + dy^2) > 0;$$

$$d^2L_{|M_2} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(dx^2 + dy^2) = -\sqrt{2}(dx^2 + dy^2) < 0.$$

Отже, точка M_1 є точкою умовного мінімуму, і $z_{\min} = z(M_1) = -\sqrt{2}$, а точка M_2 є точкою умовного максимуму, і $z_{\max} = z(M_2) = \sqrt{2}$.

Контрольні запитання

1. Що таке точки локального екстремуму функції двох змінних?
2. Сформулюйте необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних?
3. Сформулюйте достатні умови локального екстремуму функції двох змінних?
4. За яким алгоритмом досліджують функцію двох змінних на екстремум?
5. Як знайти умовний екстремум функції двох змінних? У чому полягає суть методу множників Лагранжа?
6. Як знаходять умовний екстремум функції багатьох змінних?