2. ГЕОМЕТРІЯ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

Тема 2.2: Зв’язки між координатами

1. Зв'язок між геодезичною, приведеною і геоцентричною широтами.
2. Зв’язки між різними видами координат.

1. Зв'язок між геодезичною, приведеною і геоцентричною широтами.

Для того щоб встановити зв'язок геодезичної широти *B* з приведеною *u,* розглянемо який-небудь меридіан, наприклад, такий, площиною якого є площина *zx*. Для цього меридіана *L* = *const* і його рівняння в параметричній формі отримаємо із рівнянь (2.10).

$$x = a\cos u,\; z = b\sin u.$$

Тангенс кута, утвореного нормаллю з віссю *x* (*рис. 2.4*), рівний похідній $\frac{dx}{dz}$, взятій з оберненим знаком, тобто

$$tgB = -\frac{dx}{dz},$$

або

$$tgB = tgu\frac{a}{b}.$$

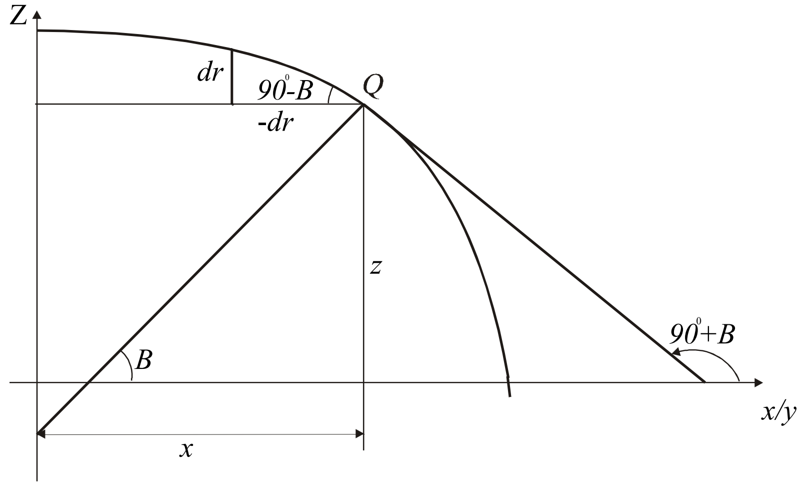

Рис. 2.4

Із останньої формули легко можна отримати

$$\sin B = \frac{a\sin u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}},$$

$$\cos B = \frac{a\sqrt{1-e^2}\cos u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}}.$$

Ввівши позначення

$$V = \frac{a}{\sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}},$$

отримаємо наступні формули зв'язку між геодезичною B та приведеною u широтами

$$\cos B = V\sqrt{1-e^2}\cos u;\quad \sin B = V\sin u. \qquad (2.18)$$

Приймаючи до уваги третю формулу (2.5), отримаємо

$$tgu = \sqrt{1-e^2}\,tgB. \tag{2.19}$$

На основі формул (2.15) та (2.19) зв'язок між геоцентричною широтою *Ф* та геодезичною *B* буде наступним

$$tg\Phi = (1-e^2)\,tgB. \tag{2.20}$$

Для подальшого викладу нам будуть необхідні ще наступні залежності, що отримуються із (2.19)

$$\cos u = \frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}},$$
$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}. \tag{2.21}$$

Якщо ввести позначення

$$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B}, \tag{2.22}$$

то формули (2.21) будуть мати наступний вид

$$\cos u = \frac{\cos B}{W};\quad \sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{W}. \tag{2.23}$$

Згідно формул (2.23) і (2.18) можна записати зв'язок між величинами *V* та *W*

$$W = V\sqrt{1-e^2}. \tag{2.24}$$

Із формули (2.24) з врахуванням (2.22) та зв'язку між ексцентриситетами (перша формула із 2.5) отримаємо вираз для *V* у функції геодезичної широти B

$$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}. \tag{2.25}$$

Функції *V* та *W* називають ще *основними сфероїдними функціями геодезичної широти.*

У сфероїдній геодезії часто використовується позначення

$$e'\cos B = \eta, \tag{2.26}$$

тоді

$$V^2 = 1+\eta^2. \tag{2.27}$$

2. Зв’язки між різними видами координат.

Між просторовими прямокутними (декартовими) X, Y, Z та геоцентричними Φ, L координатами, на основі формул (2.10)

$$X = r\cos L,$$
$$Y = r\sin L,$$
$$Z = z,$$

та отриманих співвідношень (2.16), існують прості математичні залежності

$$X = r_e\cos\Phi\cos L,$$
$$Y = r_e\cos\Phi\sin L, \tag{2.28}$$
$$Z = r_e\sin\Phi.$$

Радіус-вектор еліпсоїда r_e визначається із (2.17).

Обернені залежності, на основі (2.28), будуть мати наступний вид

$$tgL = \frac{Y}{X},$$
$$tg\Phi = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}. \tag{2.29}$$

Між просторовими прямокутними координатами X, Y, Z , приведеною широтою u та геодезичною довготою L на основі формул (2.10) та отриманих співвідношень між великою та малою півосями (див. третю формулу (2.5)), існують наступні залежності

$$\begin{aligned} X &= a\cos u\cos L, \\ Y &= a\cos u\sin L, \\ Z &= a\sqrt{1-e^2}\sin u. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Обернені залежності, на основі (2.30), будуть мати наступний вид

$$\begin{aligned} tgL &= \frac{Y}{X}, \\ tgu &= \frac{Z\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{X^2+Y^2}}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Враховуючи співвідношення (2.20) та (2.30), для поверхневих еліпсоїдних координат *B*,*L* та декартових *X*,*Y*,*Z* формули зв'язку мають вид

$$X = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\cos B\cos L,$$

$$Y = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\cos B\sin L,$$

$$Z = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}(1-e^2)\sin B.$$

Вираз $\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$ позначимо через N і, як буде видно із подальшого викладу, це є рівняння для радіуса кривини першого вертикалу заданої точки на поверхні еліпсоїда у функції геодезичної широти. Остаточно, формули зв’язку будуть наступними:

$$\begin{aligned} X &= N\cos B\cos L, \\ Y &= N\cos B\sin L, \\ Z &= N(1-e^2)\sin B, \end{aligned} \tag{2.32}$$

Обернені залежності будуть мати наступний вид

$$\begin{aligned} tgL &= \frac{Y}{X}, \\ tgB &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\frac{1}{(1-e^2)}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Перша формула (2.33) отримана простим перетворенням (шляхом ділення другої формули (2.32) на першу). Друга формула (2.33) отримана наступним чином. Із перших двох формул (2.32) отримаємо

$$\sqrt{X^2+Y^2} = N\cos B.$$

Поділивши третє рівняння (2.32) на отримане, дістанемо остаточно друге рівняння (2.33).

Зв’язок між геодезичними координатами B, L, H та декартовими X, Y, Z отримаємо наступним чином. Спроектуємо висоту H на відповідні осі. Тоді проекції висоти будуть виражені залежностями

$$\begin{aligned} \Delta X &= H\cos B\cos L, \\ \Delta Y &= H\cos B\sin L, \\ \Delta Z &= H\sin B. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} X &= X + \Delta X = (N+H)\cos B\cos L, \\ Y &= Y + \Delta Y = (N+H)\cos B\sin L, \\ Z &= Z + \Delta Z = (N(1-e^2)+H)\sin B. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Обернені залежності будуть мати наступний вид

$$\begin{aligned} tgL &= \frac{Y}{X}, \\ tgB_{i+1} &= \frac{Z}{R} + \frac{btgB_i}{c+tg^2B_i},\ i = 1,2...,n. \\ tgB_1 &= \frac{Z}{R}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$R = \sqrt{X^2+Y^2}, \quad b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}}, \qquad c = \frac{1}{1-e^2},$$

$$H = \frac{Z}{\sin B} - (1-e^2)N.$$

Вираз для обчислення довготи L знаходимо аналогічно (2.33), а обчислення широти B, як видно із (2.35) вимагає застосування процесу наближень. Формула для B отримана наступним чином. На основі рівнянь (2.34), після нескладних перетворень, можемо отримати

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = tgB\left(1-\frac{e^2N}{N+H}\right),$$

а також

$$(N+H)\cos B = \sqrt{X^2+Y^2}\ .$$

Тоді

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = tgB\left(1-\frac{ae^2\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}\sqrt{X^2+Y^2}}\right),$$

або

$$tgB = \frac{Z}{R} + \frac{ae^2 tgB\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}\ \ R}. \tag{2.36}$$

Поділимо чисельник і знаменник у другому доданку (2.36) на $\cos B$ і в результаті перетворень отримаємо

$$tgB = \frac{Z}{R} + \frac{ae^2 tgB}{\sqrt{1+tg^2B-e^2tg^2B}\ \ R},$$

а помноживши знаменник другого доданку ще на $\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}$ та після деяких перетворень, остаточно отримаємо формулу, яка після відповідних позначень буде відповідати (2.35).

Що стосується переходу від поверхневих еліпсоїдних координат *B, L* до плоских *x, y,* то вид формул залежить від способу зображення (проекції) поверхні еліпсоїда на площині. Для проекції Гаусса-Крюгера формули зв'язку будуть приведенні при розгляді відповідної теми.