Лекція 1-2. Функції багатьох змінних

1. Означення функції багатьох змінних. Способи задання функції

2. Границя й неперервність функції двох змінних

3. Частинні й повний прирости функції двох змінних

4. Диференційованість функції двох змінних. Повний диференціал функції двох змінних

5. Похідна за напрямком. Градієнт функції

1. Означення функції багатьох змінних. Способи задання функції

Введемо поняття функції двох незалежних змінних. Задамо дві множини X та Y.

Означення. Нехай $D-$деяка множина впорядкованих пар дійсних чисел: $D = X \times Y$. Припустимо, що кожній парі $(x, y) \in D$ певним способом поставлено у відповідність число z із множини Z. Тоді кажуть, що на множині D задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Змінні x, y називають незалежними змінними, або аргументами, а $z-$залежною змінною. Множину D називають областю визначення функції. Всі значення, яких набуває функція $z = f(x, y)$ при $(x, y) \in D$, утворюють область значень функції z.

У випадку функції однієї змінної її областю визначення був проміжок (скінчений або нескінченний). У випадку функції двох змінних області визначення функцій різноманітні й складні. Тому розгляд цих областей набагато полегшується, якщо використовувати їхню геометричну інтерпретацію.

Приклад 1. Знайти область визначення функції:

$$\text{а) } z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}; \qquad \text{б) } z = \frac{1}{xy}.$$

а) Областю визначення такої функції є множина точок, для яких $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 9$ (рис. 1). Множина точок площини, координати яких задовольняють цю нерівність, є круг із центром $O(0; 0)$ і радіусом 3, що включає в себе і його межу.

б) Очевидно, що функція визначена, якщо $x \neq 0, y \neq 0$. Тоді множина $D-$це площина Oxy, за винятком точок координатних прямих Ox і Oy.

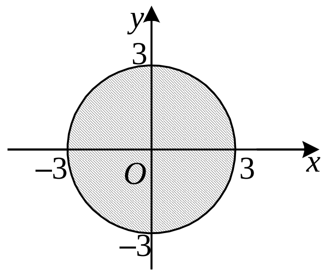

Рис.1

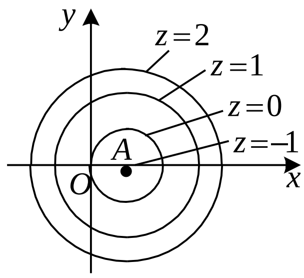

Рис.2

Введемо поняття функції n змінних $(n \geq 3)$. Розглянемо $n-$вимірний простір R^n і область $D \subset R^n$.

Означення. Нехай маємо впорядкований набір n величин $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$. Припустимо, що кожному наборові відповідає певне значення змінної z. Тоді кажуть, що на множині D задано функцію багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називають незалежними змінними, або аргументами, а $z-$залежною змінною, а f позначає закон відповідності.

Функції багатьох змінних можна задавати аналітично, за допомогою таблиць або графічно.

За **аналітичного способу задання функції** її значення визначається залежністю від аргументів функції (приклад 1). **Табличний спосіб задання функції** застосовується в економіці при оформленні звітів, складанні балансів і записів економічних показників. Цей спосіб необхідний у разі складних розрахунків на ЕОМ.

Графічний спосіб задання функції більш як двох змінних майже не застосовується через труднощі зображення графіка такої функції.

Означення. **Графіком функції** $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $(x; y; z)$ тривимірного простору, апліката z, яких пов'язана з абсцисою x і ординатою y функціональною залежністю $z = f(x, y)$.

Графіком функції двох змінних є поверхня, що задається рівнянням $z = f(x, y)$. Наприклад, графіком функції $z = ax + by + c$ є площина $ax + by - z + c = 0$, а графіком функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ –півсфера радіусом $R = 2$ із центром у початку координат. Для побудови поверхонь використовують лінії рівня.

Означення. **Лінією рівня функції** $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок площини, в яких функція набуває одного і того самого значення C, тобто $z = f(x, y) = C$, де $C = const$ називається рівнем.

Надаючи різних значень C і щоразу будуючи лінію із заданим рівнем C, дістанемо сім'ю ліній рівня, яка дає наочне уявлення про характер зміни функції $z = f(x, y)$. Якщо $n \geq 3$, то розглядають не лінії рівня, а поверхню рівня функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тобто це поверхні, на яких $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$.

Прикладами ліній рівня є паралелі й меридіани на глобусі – лінії рівня функції широти і довготи. Синоптики публікують карти із зображенням ізотерм та ізобар – лінії рівня температури. В економіці використовують ізокванти – лінії, вздовж яких виробнича функція дорівнює константі.

Приклад 2. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 2x$.

Лінії рівня визначаємо із співвідношення $x^2 + y^2 - 2x = C$, або $x^2 + y^2 - 2x + 1 = C + 1 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 + y^2 = C + 1$ – це коло з центром у точці $A(1;\,0)$ і радіусом $R = \sqrt{C+1}$, $C \geq -1$. Точка $A(1;\,0)$ – це вироджена лінія рівня, що відповідає мінімальному значенню $z = -1$. Лініями рівня є концентричні кола, радіус яких збільшується зі збільшенням значення C (рис. 2).

Приклади функції багатьох змінних, які використовуються в економічній теорії.

1. **Лінійна функція** – це функція вигляду

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b,$$ де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – деякі числа.

2. Функцію вигляду

$$z = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \ldots + a_{nn} x_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + b,$$

де a_{ij} – деякі числа, називають квадратичною формою від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. **Функція корисності** – це функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що виражає корисність від n придбаних товарів. Це суб'єктивна числова оцінка індивідом корисності u набору товарів $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Лінії рівня функції корисності називаються кривими байдужості. Розрізняють такі види функції корисності:

- $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i)$, $a_i > 0$, $x_i > c_i \geq 0$ – логарифмічна функція корисності;

- $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}$, $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $x_i > c_i \geq 0 -$ функція корисності сталої еластичності.

4. **Виробнича функція** – це функція, що виражає результат виробничої діяльності залежно від факторів, що його зумовлюють $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Лінії рівня виробничої функції називаються ізоквантами. Для $n = 2$ трапляються такі види виробничої функції:

- $z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$, де $z = z(x_1, x_2)$ виражає вартість випуску продукції залежно від вартості основного капіталу x_1 та вартості трудових ресурсів x_2; $b_0 > 0 -$параметр продуктивності конкретної технології; $0 < b_1 < 1-$ частка капіталу в доході; $b_1 + b_2 = 1$ – функція Кобба-Дугласа;
- $z = a_0 (a_1 x_1^{-\beta} + a_2 x_2^{-\beta})^{-h/\beta}$, де $z -$суспільний продук, $x_1 -$витрати праці, $x_2 -$обсяг виробничих фондів – функція із сталою еластичністю заміщення.

2. Границя й неперервність функції двох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Нехай область визначення $D \subset R^2$. Пригадаємо, що відстань між точками $M(x; y)$ і $M_0(x_0; y_0)$ визначається рівністю $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Означення. $\delta -$**Околом точки** $M_0(x_0; y_0)$ називається множина всіх точок площини, координати яких задовольняють нерівність $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Геометрично це множина точок площини, що лежать всередині круга з центром у точці M_0 і радіусом δ. Внутрішність круга є двовимірним аналогом відкритого проміжку $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ на числовій прямій, і $\rho(M, M_0) = |x - x_0| < \delta$.

Означення. Число A називається **границею функції** $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, що для всіх точок $M(x; y)$ із $\delta -$околу точки $M_0(x_0; y_0)$ таких, що $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Використовують таке позначення границі функції: $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Це означення можна перефразувати, використовуючи геометричні терміни. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$, якщо точка $M(x; y)$ прямує до точки $M_0(x_0; y_0)$ $(M(x; y) \to M_0(x_0; y_0))$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, як тільки відстань $0 < \rho(M, M_0) < \delta$.

Зауважимо, що між поняттями границі функції однієї змінної та багатьох змінних багато спільного, але є й принципова різниця. Так, для функції однієї змінної $z = f(x)$ те, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, означає, що існують односторонні границі й вони рівні між собою, й навпаки. Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ наближення до точки $(x_0; y_0)$ можливе різними способами: і справа, і зліва, і зверху, й знизу, й під деяким кутом по прямій, і вздовж певної лінії (траєкторії). Отже, маємо істотне обмеження порівняно з рівністю двох односторонніх границь у випадку функції однієї змінної.

Теорема 1. Якщо функція $z = f(x, y) = f(M)$ має границю якщо $M \to M_0$, то ця границя єдина.

Теорема 2. Якщо функція $z = f(M)$ має границю якщо $M \to M_0$, то вона обмежена в деякому околі точки M_0.

Теорема 3. Якщо функція $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ і $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$, то

1) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B$; 2) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) g(M)) = AB$;

$$3)\ \lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}; \quad B \neq 0.$$

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Розв'язання.
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \\ x \to 0,\ y \to 0, \\ \rho \to 0 \end{array} \right| = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln(1 - \rho^2)}{\rho} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{(\ln(1 - \rho^2))'}{\rho'} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{1}{1 - \rho^2}(-2\rho)}{1} = -2 \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho}{1 - \rho^2} = 0.$$

Приклад 4. Доведемо, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

Наближатимемося до точки $(0;0)$ по прямій $y=kx$. Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{2k}{1+k^2}$, тобто значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої.

Наприклад, якщо $k=1 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{2k}{1+k^2} = 1$;

якщо $k=3 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{2k}{1+k^2} = 0{,}6$.

Отже, наближення до точки $(0;0)$ в різних напрямах, дістанемо різні значення границі. Це означає, що дана функція не має границі.

Означення. Функцію $z=f(x,y)$ називається **неперервною в точці** $M_0(x_0;y_0)$, якщо вона визначена в цій точці й має в ній границю, причому $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Наголосимо, що точка M може прямувати до точки M_0 довільним способом, але весь час має залишатися в області визначення функції.

Означення. Функцію $z=f(x,y)$ називається **неперервною в області** D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Означення. Точку $M_0(x_0;y_0)$ називається **точкою розриву функції** $z=f(x,y)$, якщо ця функція:

1) не визначена в точці $M_0(x_0;y_0)$;

2) визначена в цій точці $M_0(x_0;y_0)$, але: а) не має границі в цій точці, тобто $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ не існує; б) границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ існує, але $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$.

Приклад 5. Розглянемо функцію двох змінних

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & (x,y)=(0;0). \end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці $(0;0)$, оскільки не має границі в цій точці.

3. Частинні й повний прирости функції двох змінних

Нехай задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$, яка визначена в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$. Зафіксуємо змінну y так, щоб $y = y_0$, і розглянемо функцію однієї змінної $z = f(x, y)$ у точці x_0. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

який називається **частинним приростом функції** $z = f(x, y)$ **за змінною** x **у точці** $M_0(x_0; y_0)$**.**

Аналогічно, якщо зафіксувати змінну x так, щоб $x = x_0$, і розглянути функцію $z = f(x, y)$ у точці y_0, надавши приросту Δy, то функція дістане приріст

$$\Delta_x z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

який називається **частинним приростом функції** $z = f(x, y)$ **за змінною** y**.**

Якщо обом змінним надати приростів Δx, Δy, то функція дістане **повний приріст функції** $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Зауважимо, що повний приріст не дорівнює сумі частинних приростів.

Зауваження. Для функції багатьох змінних $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ відповідні частинні прирости в точці $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ позначають так: $\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, де точка $M_i(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, належить області визначення функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Сформулюємо інше означення неперервності функції в точці.

Означення. Функцію двох змінних $z = f(x, y)$ називається **неперервною в точці** $M_0(x_0; y_0)$, якщо існує границя $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

4. Диференційованість функції двох змінних. Повний диференціал функції двох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Виберемо точку $M_0(x_0; y_0)$ з області визначення функції.

Означення. Якщо існують границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = z'_x,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}=z'_y,$$

то вони називаються **частинними похідними за змінними** x **і** y **функції** $z=f(x,y)$**.**

Для частинних похідних першого порядку використовують і такі позначення:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y),\ z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y).$$

Зауважимо, що частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ можна розглядати як швидкості зміни функції відносно однієї із змінних (у напрямку відповідної осі координат).

Зауваження. При знаходженні частинних похідних від даної функції будемо керуватися таким правилом: шукаючи частинну похідну за змінною x, тобто $f'_x(x, y)$, потрібно вважати сталою змінну y, а для знаходження $f'_y(x, y)$ – змінну x. Тоді правило диференціювання функції принципово нічим не відрізняється від диференціювання функції однієї змінної.

Зауваження. Для функції багатьох змінних $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поняття частинної похідної за змінною x_i, $i=\overline{1,n}$, вводиться аналогічно: $z'_{x_i}=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$, $i=\overline{1,n}$.

Приклад 6. Нехай $z=x^3\ln y+\dfrac{y^2}{x}$. Обчислити z'_x і z'_y.

Маємо $z'_x=(x^3)'\ln y+\left(\dfrac{1}{x}\right)' y^2=3x^2\ln y-\dfrac{y^2}{x^2}$, .

Приклад 7. Нехай $z=x^y$. Обчислити z'_x і z'_y.

Одержимо $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$.

Означення. Функцію $z=f(x,y)$ називається **диференційовною в точці** $M_0(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (1)$$

де $A, B-$деякі числа; $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y)-$нескінченно малі функції при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Теорема **(необхідна умова диференційовності функції).** Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x, z'_y, причому $z'_x(x_0, y_0) = A$ і $z'_y(x_0, y_0) = B$, де A і B – коефіцієнти в рівності (1) .

Зауваження. Якщо частинні похідні функції двох змінних у даній точці не існують, то така функція не диференційовна в цій точці.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0; y_0)$, то вона неперервна в цій точці.

Зауважимо, що з неперервності функції двох змінних або з існування її частинних похідних у точці не випливає диференційовність функції в цій точці.

Теорема **(достатня умова диференційовності функції).** Якщо функція $z = f(x, y)$ має існують частинні похідні в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$ в ці похідні неперервні в даній точці, то функція диференційовна в цій точці **.**

Означення. **Повним диференціалом функції** $z = f(x, y)$ **у точці** $M_0(x_0; y_0)$ називають головна, лінійна відносно приростів Δx і Δy, частина повного приросту функції $z = f(x, y)$ в рівності (1) і позначається dz або $df(x, y)$.

Оскільки $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то повний диференціал функції $z = f(x, y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Приклад 8. Нехай $z = \dfrac{xy}{x - y}$. Обчислити dz.

Маємо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = -\dfrac{y^2}{(x-y)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x(x-y) + xy}{(x-y)^2} = \dfrac{x^2}{(x-y)^2}$.

Тоді $dz = -\dfrac{y^2}{(x-y)^2} dx + \dfrac{x^2}{(x-y)^2} dy = \dfrac{-y^2 dx + x^2 dy}{(x-y)^2}$.

5. Похідна за напрямком. Градієнт функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в околі точки $M(x; y)$. Відомо, що $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ виражають швидкість зростання функції в додатному напряму осей Ox і Oy. Для функції $z = f(x, y)$ поставимо питання про швидкість її зростання в точці в довільному напрямі.

Розглянемо напрям, що задається одиничним вектором $\vec{l} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$, де $|\vec{l}| = 1$. На прямій, що проходить через точку M, виберемо точку $M_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ і знайдемо довжину відрізка MM_1: $\Delta\vec{l} = MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (рис. 3). Тоді функція $z = f(x, y)$ отримає приріст

$$\Delta_{\vec{l}}\, z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f(x+\Delta\vec{l}\cos\alpha, y+\Delta\vec{l}\cos\beta) - f(x, y),$$

який називається приростом функції z у даному напрямі вектора $\vec{l}$.

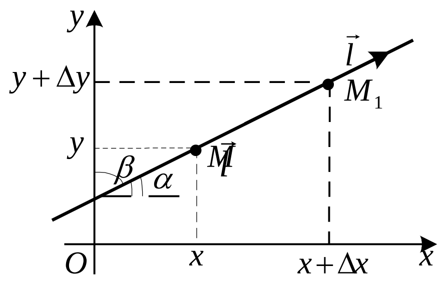

Рис. 3

***Означення*. Похідною функції $z'_{\vec{l}}$ за напрямом вектора $\vec{l}$ функції двох змінних $z = f(x, y)$ у точці $M(x;\ y)$** називається границя відношення приросту в цьому напрямі до величини переміщення $\Delta\vec{l}$ при $\Delta\vec{l} \to 0$, якщо вона існує, і позначають $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}} = z'_{\vec{l}} = \lim\limits_{\Delta\vec{l}\to 0} \dfrac{\Delta_{\vec{l}}\, z}{\Delta\vec{l}}$.

Зауваження. Похідна $z'_{\vec{l}}$ характеризує швидкість зміни функції за напрямком вектора $\vec{l}$.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x;\ y)$, то її приріст можна записати у вигляді

$$\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + o(\Delta\vec{l}) = z'_x \Delta\vec{l}\cos\alpha + z'_y \Delta\vec{l}\cos\beta + o(\Delta\vec{l}).$$

Поділивши останню рівність на $\Delta\vec{l}$, дістанемо $\dfrac{\Delta z}{\Delta\vec{l}} = z'_x\cos\alpha + z'_y\cos\beta + \dfrac{o(\Delta\vec{l})}{\Delta\vec{l}}$. Тоді при $\Delta\vec{l} \to 0$ матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \qquad (2)$$

Виникає важливе запитання: в якому напряму похідна функції буде найбільшою? Для відповіді на запитання, введемо поняття вектор-градієнта.

***Означення*. Градієнтом функції $z = f(x, y)$ в точці** $M_0(x_0;\ y_0)$ називається вектор, координати якого дорівнюють частинним похідним функції в цій точці:

$$\nabla z = grad\ z = \left\{\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right\} \text{ або } \nabla z = grad\ z = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\vec{j}.$$

Оскільки одиничний вектор $\vec{l}$ має координати $\{\cos\alpha; \cos\beta\}$, то похідна за напрямом вектора $\vec{l}$ визначається так:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \vec{l}\ grad\ z,$$

тобто є скалярним добутком векторів $\vec{l}$ і $grad\ z$.

Оскільки $|\vec{l}\,| = 1$, то похідна за напрямом вектора $\vec{l}$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \vec{l}\ grad\ z = |\vec{l}\,|\,|grad\ z|\cos\varphi = |grad\ z|\cos\varphi,$$

де $\varphi -$кут між векторами $\vec{l}$ і $grad\ z$. Скалярний добуток двох векторів є максимальним, якщо вектори одинаково напрямлені, тобто кут між ними $\varphi = 0$.

Отже, градієнт функції вказує напрям найшвидшого зростання функції в даній точці. Похідна за напрямом градієнта має найбільше значення, тобто $\vec{l} = grad\ z$, яке дорівнює

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = |grad\ z| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,. \qquad (3)$$

Приклад 9. Знайти $grad\ z$ і похідну функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(3; 4)$

а) за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(11; 10)$; б) за напрямом градієнта .

а) Обчислимо $z'_x|_M = \left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_M = \frac{6}{25}$, $z'_y|_M = \left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_M = \frac{8}{25}$. Маємо $grad\ z = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}$.

Знаходимо координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN} = (8; 6)$: $|\vec{l}\,| = 10$,

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}\,|} = 0{,}8,\ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}\,|} = 0{,}6.$$

Похідна за напрямом вектора $\vec{l}$ обчислюється за формулою (2)

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{6}{25}0{,}8 + \frac{8}{25}0{,}6 = \frac{48}{125}.$$

б) Похідна за напрямом градієнта $\vec{l} = grad\ z = \left(\frac{6}{25}; \frac{8}{25}\right)$ має найбільше значення, яке отримаємо за формулою (3)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = |grad\ z| = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}.$$

Контрольні запитання

1. Що таке функція двох (багатьох змінних)?
2. Які існують способи задання функції багатьох змінних?
3. Які лінії називаються лініями рівня функції двох змінних?
4. Дайте означення границі функції двох змінних?
5. Сформулюйте означення неперервності в точці функції двох змінних?
6. Що таке частинний і повний прирости функції двох змінних?
7. Сформулюйте означення частинних похідних функції двох змінних?
8. Які похідні називаються мішаними?
9. Яку функцію двох змінних називають диференційованою?
10. Якщо функція диференційована в точці, то чи буде вона неперервною в цій точці?
11. Якщо функція неперервна в точці, то чи буде вона диференційовною в цій точці?
12. Сформулюйте достатню умову диференційовності функції?
13. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?
14. За якою формулою обчислюється повний диференціал функції?

15 Як знайти похідну за напрямком даного вектора?

16. Що таке градієнт функції? Що він характеризує?