МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

В.М. Бондарчук, Р.М. Головня, І.А. Сверчевська

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Навчальний посібник

Житомирська політехніка
2024

УДК 517(07)
Б81

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного університету «Житомирська політехніка» (протокол № 0 від 00 березня 2024 р.)

Рецензенти:

Михайленко В. В. – професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, д.ф.-м.н., проф.;

Сарана О.А. – доцент кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка, к.ф.-м.н., доц.;

Подчашинський Ю.О. – завідувач кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки Державного університету «Житомирська політехніка», д.т.н., проф.

Бондарчук В.М.

Б81 Інтегральне числення функцій кількох змінних. Теорія поля : навч. посібник / Бондарчук В. М., Головня Р. М., Сверчевська І.А. – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2024. – 121 с.

ISBN 978-966-683-689-5

Посібник містить теоретичний матеріал і велику кількість розв'язаних прикладів за темами «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли» та «Елементи теорії поля». Посібник призначений, у першу чергу, для забезпечення самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання. Він може використовуватись також як збірник задач під час проведення практичних занять зі студентами денної форми навчання та для виконання ними контрольних, індивідуальних домашніх або розрахунково-графічних робіт.

Іл. 46; Табл. 2; Бібліогр. 10 назв.

УДК 517(07)

Навчальне видання

БОНДАРЧУК Василь Миколайович

ГОЛОВНЯ Руслан Миколайович

СВЕРЧЕВСЬКА Ірина Анатоліївна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Навчальний посібник

Електронне видання
Комп'ютерний набір та верстка: Головня Р.М.
Державний університет «Житомирська політехніка»
вул. Чуднівська, 103, м. Житомир, 10005

ISBN 000-000-000-000-0
© Бондарчук В.М., Головня Р.М., Сверчевська І.А., 2024

Зміст

Вступ 5

1. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли

1.1. Кратні інтеграли 6

1. Зведення подвійного інтеграла до повторного 6

2. Зміна порядку інтегрування 9

3. Зведення потрійного інтеграла до повторного 12

4. Заміна змінних у кратних інтегралах 14

1.2. Криволінійні інтеграли 19

1. Криволінійний інтеграл I роду 19

2. Криволінійний інтеграл II роду 21

3. Формула Остроградського – Ґріна 23

4. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування 25

1.3. Поверхневі інтеграли 26

1. Поверхневий інтеграл I роду 26

2. Поверхневий інтеграл II роду.....27

3. Зв'язок між поверхневими інтегралами I та II роду 28

2. Застосування кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів

2.1. Геометричні застосування 31

1. Площа плоскої області 31

2. Об'єм просторової області.....33

3. Довжина кривої 36

4. Площа поверхні.....37

2.2. Фізичні застосування 39

1. Маса, статичні моменти та моменти інерції пластинки.....39

2. Маса, статичні моменти та моменти інерції тіла 40

3. Маса, статичні моменти та моменти інерції кривої.....43

4. Маса, статичні моменти та моменти інерції поверхні 44

5. Загальна схема застосувань.....46

3. Елементи теорії поля

1. Похідна скалярного поля 47
2. Градієнт 48
3. Потік векторного поля 50
4. Дивергенція векторного поля. Теорема Остроградського-Ґауса 51
5. Лінійний інтеграл. Циркуляція векторного поля 54
6. Ротор векторного поля. Теорема Стокса 56
7. Потенціальне поле 58
8. Соленоїдальне поле 60
9. Оператор набла. Диференціальні операції 2-го порядку 61

4. Завдання для індивідуальної роботи

1. Кратні інтеграли та їх застосування 62
2. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля 85

Додатки

Додаток А 114
Додаток Б 120

Список рекомендованої літератури 121

Вступ

Пропонований посібник укладено для студентів факультету комп'ютерно-інтегрованих технологій, мехатроніки та робототехніки денної та заочної форм навчання з метою забезпечення якісного засвоєння теми «Кратні та криволінійні інтеграли», передбаченої навчальною програмою дисципліни «Вища математика». Даний посібник може бути рекомендовано для використання викладачами вищої математики у якості збірника типових завдань з тем «Кратні інтеграли. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля». Дана методична розробка допоможе студентам опрацювати перелічені теми, виробити уміння та навички розв'язання задач, що у свою чергу забезпечить успішне засвоєння навчального матеріалу.

Посібник містить 30 варіантів завдань, які можна використовувати як індивідуальні домашні завдання, завдання для типового розрахунку або завдання контрольних чи самостійних робіт. У посібнику містяться основні теоретичні відомості та приклади детального розв'язання типових задач з чітким порядком дій та правильним оформленням виконаного завдання. Особливу увагу приділено переходу від декартової до полярної (у подвійному інтегралі), циліндричної або сферичної (у потрійному інтегралі) систем координат. Зазначимо, що чітко виконані рисунки областей інтегрування, допоможуть студентам у розв'язуванні запропонованих задач.

Призначення навчального посібника – допомогти студентам глибше вивчити один з найскладніших розділів курсу вищої математики.

Посібник може бути застосований і як доповнення до лекційного матеріалу, і для самостійної роботи студентів. У результаті вивчення матеріалу посібника студенти повинні знати основні поняття та формули, а також вміти застосовувати кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли при розв'язуванні прикладних задач.

1. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли

1.1. Кратні інтеграли

1. Зведення подвійного інтеграла до повторного. Виокремлюють два основні типи областей інтегрування (нижче вважатимемо, що функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ \psi_1(y), \psi_2(y)$ неперервні):

1) область правильну в напрямі осі Oy, обмежену зліва та справа відрізками прямих $x = a,\ \ x = b$ відповідно, знизу – кривою $y = \varphi_1(x)$, зверху – кривою $y = \varphi_2(x)$, (криві перетинають пряму $x = \alpha\ \ (a \le \alpha \le b)$ лише в одній точці) (рис. 1.1);

2) область правильну в напрямі осі Ox, обмежену знизу і зверху прямими $y = c,\ \ y = d$ відповідно, зліва – кривою $x = \psi_1(y)$, справа – кривою $x = \psi_2(y)$, (криві перетинають пряму $y = \beta$ $(c \le \beta \le d)$ лише в одній точці) (рис. 1.2).

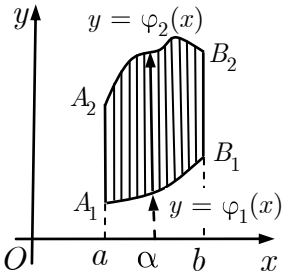


Рис. 1.1

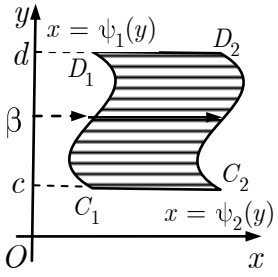


Рис. 1.2

Якщо область D не є правильною, то її розбивають на скінченне число (найменше з можливих) правильних областей $D_1, ..., D_n$, і при обчисленні подвійного інтеграла використовують його адитивність.

Подвійний інтеграл за областю D, правильною в напрямі осі Oy, обчислюють за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.1)$$

У повторному інтегралі в правій частині (1.1) інтегрування проводиться спочатку по y, при цьому x вважають сталою; межі інтегрування $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ є правими частинами рівнянь кривих, що обмежують область D знизу та зверху відповідно.

Подвійний інтеграл за областю D, правильною в напрямі осі Ox, обчислюють за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (1.2)$$

У повторному інтегралі в правій частині (1.2) інтегрування проводиться спочатку по x, при цьому y вважають сталою; межі інтегрування $\psi_1(y), \psi_2(y)$ є правими частинами рівнянь кривих, що обмежують область D зліва та справа відповідно.

1.1. Обчислити повторний інтеграл та знайти область інтегрування відповідного подвійного інтеграла:

$$1)\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^x xydy; \quad 2)\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{y^3} \frac{4}{y^5}\,dx.$$

1) Область інтегрування обмежена відрізками прямих $x=1,\ x=3$ і лініями $y=0,\ y=x$.

$$\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^x xydy = \int\limits_1^3 x\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^3dx = \frac{x^4}{8}\Big|_1^3 = 10.$$

1.2. Розставити межі інтегрування в повторному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$:

1) $D: x=1,\ x=2,\ y=2,\ y=3$;

2) $D: y^2=x,\ x=1$;

3) $D: x^2-y^2=1,\ y=-2,\ y=2,\ O\in D$.

2) Область інтегрування D, обмежена параболою $y^2 = x$ і прямою $x = 1$ (рис. 1.3), є правильною в напрямі осі Ox: фігура проектується у відрізок $-1 \le y \le 1$ і обмежена зліва ділянкою параболи $x = y^2$, а справа відрізком прямої $x = 1$.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{(1.2)}{=}$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)dx.$$

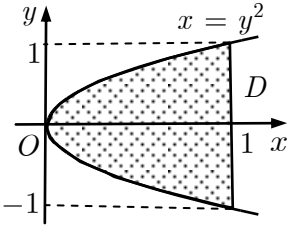


Рис. 1.3

Область D є правильною також і в напрямі осі Oy – вона проектується у відрізок $0 \le x \le 1$ і обмежена знизу параболою $y = -\sqrt{x}$, зверху параболою $y = \sqrt{x}$ (рівняння кривої $y^2 = x$ розв'язали відносно змінної y).

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{(1.1)}{=} \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

1.3. Обчислити:

1) $\iint\limits_D xdxdy,\ D: xy = 2,\ y = \dfrac{1}{2}x,\ y = 2x,\ x \ge 0;$

2) $\iint\limits_D ydxdy,\ \ D: \triangle OAB,\ O(0;0), A(1;2), B(2;1).$

1) Оскільки область інтегрування D (рис. 1.4) не є правильною, то її треба подати у вигляді об'єднання кількох (у даному випадку, двох) правильних областей: $D = D_1 \cup D_2$.

Область D_1 є правильною в напрямі осі Oy – вона проектується у відрізок $0 \le x \le 1$ осі Ox і обмежена знизу прямою

$y = \dfrac{x}{2}$ та зверху прямою $y = 2x$.

Область D_2 також є правильною в напрямі осі Oy – вона проектується у відрізок $1 \le x \le 2$ і обмежена знизу прямою $y = \dfrac{x}{2}$ зверху гіперболою $y = \dfrac{2}{x}$.

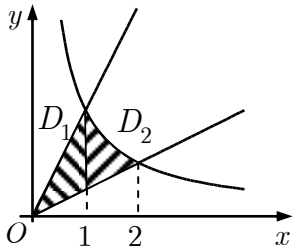


Рис. 1.4

За властивістю адитивності

$$\iint\limits_D xdxdy = \iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_2} xdxdy \overset{(1.1)}{=}$$

$$= \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{x/2}^{2x} dy + \int\limits_1^2 xdx \int\limits_{x/2}^{2/x} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 xy\,\Big|_{x/2}^{2x}\, dx + \int\limits_1^2 \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^3\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

2. Зміна порядку інтегрування. Інколи буває доцільно (для зменшення обчислень або для принципової можливості обчислення внутрішнього інтеграла) змінювати порядок інтегрування.

1.4. Обчислити інтеграли (розглянути різний порядок інтегрування):

$$1)\iint\limits_D e^{-y^2} dxdy, \quad D : \triangle OAB,\ O(0;0), A(0;1), B(1;1);$$

2) $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy,\ \ D:\Delta ABC,\ A(0;\pi), B(\pi;\pi), C(\pi;0);$

3) $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy,\ D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{6}, x=\frac{1}{3}.$

1) Область інтегрування (рис. 1.5) є правильною в напрямі осі Oy – вона проектується у відрізок $0\le x\le 1$ осі Ox і обмежена знизу прямою $y=x$, зверху прямою $y=1$.

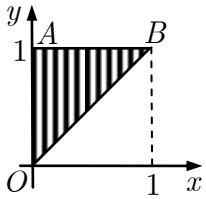


Рис. 1.5

$$\iint\limits_{\triangle OAB} e^{-y^2}dxdy \overset{(1.1)}{=} \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 e^{-y^2}dy.$$

Інтеграл $\int e^{-y^2}dy$ не виражається через елементарні функції.

Область інтегрування є правильною і в напрямі осі Oy проектується у відрізок $0\le y\le 1$, обмежена зліва прямою $y=1$ справа прямою $x=y$.

$$\iint\limits_{\triangle OAB} e^{-y^2}dxdy \overset{(1.2)}{=} \int\limits_0^1 e^{-y^2}dy\int\limits_0^y dx = \int\limits_0^1 e^{-y^2}ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-y^2}d(y^2) = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}.$$

3) Область інтегрування D (рис. 1.6) є правильною в напрямі кожної координатної осі. Запишемо повторний інтеграл, вибираючи зовнішнє інтегрування по змінній y:

$$D:\ \ln 3\le y\le \ln 4; \frac{1}{6}\le x\le \frac{1}{3}.$$

$$\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy \overset{(1.2)}{=} \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{1/6}^{1/3} 12ye^{6xy}dx = 12\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} y\,\frac{e^{6xy}}{6y}\Big|_{1/6}^{1/3} dy =$$

$$= 2\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} (e^{2y} - e^{y})dy = 2\left(\frac{e^{2y}}{2} - e^{y}\right)\Big|_{\ln 3}^{\ln 4} =$$

$$= 2\ \frac{16}{2} - \frac{9}{2} - 4 + 3\ = 5.$$

Інтегрування в іншому порядку призвело б до потреби інтегрування частинами у внутрішньому інтегралі.

1.5. Змінити порядок інтегрування:

$$1)\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} fdy;$$

$$2)\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} fdx.$$

1) Відновимо область інтегрування D (рис. 1.7) і запишемо рівняння ліній, які обмежують цю область.

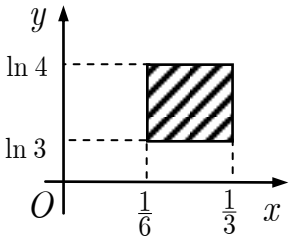


Рис. 1.6

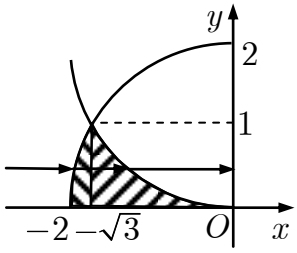


Рис. 1.7

З першого доданка:

$-2 \le x \le -\sqrt{3}; y = 0, y = \sqrt{4-x^2}.$

З другого доданка:

$-\sqrt{3} \le x \le 0; y = 0, y = 2 - \sqrt{4-x^2}.$

Точка $(-\sqrt{3};1)$ є точкою перетину кіл. Область D є правильною в напрямі осі Ox. Розв'яжемо рівняння кіл відносно x:

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x = -\sqrt{4 - y^2};$$

$$y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x = -\sqrt{4y - y^2}.$$

Розглядаємо корені зі знаком мінус, тому що абсциси всіх точок області D недодатні. Область D обмежена зліва дугою кола $x = -\sqrt{4 - y^2}$, справа дугою кола $x = -\sqrt{4y - y^2}$.

$$D : 0 \le y \le 1; -\sqrt{4 - y^2} \le x \le -\sqrt{4y - y^2}.$$

Шуканий інтеграл має вигляд

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x, y)dx.$$

3. Зведення потрійного інтеграла до повторного. Область V у просторі називають циліндричною в напрямі осі Oz, якщо вона обмежена знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею $z = z_2(x, y)$, з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz (рис. 1.8). Нехай просторова область V проектується на площину Oxy в область D_{Oxy}, яка є правильною в напрямі осі Oy. Нехай область V задана наступними нерівностями:

$$x_1 \le x \le x_2,$$

$$y_1(x) \le y \le y_2(x),$$

$$z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y).$$

Тоді потрійний інтеграл обчислюють за формулою

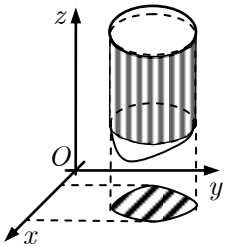


Рис. 1.8

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (1.3)$$

1.6. Обчислити $\iiint\limits_V zdxdydz$:

1) $V : z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x, y, z = 0;$

2) $V : 2x + y + z - 4 = 0,\ x, y, z = 0.$

1) Область інтегрування V циліндрична в напрямі осі Oz (рис. 1.9). Вона обмежена знизу площиною $z = 0$, зверху – параболоїдом $z = x^2 + y^2$. Для визначення меж інтегрування корисно спроектувати тіло на площину Oxy (рис. 1.10).

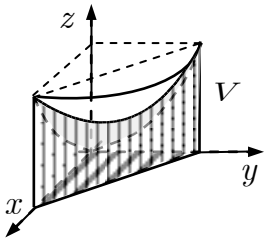


Рис. 1.9

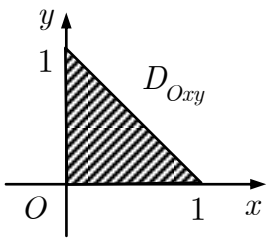


Рис. 1.10

Область V можна задати нерівностями:

$0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1 - x,\ \ 0 \le z \le x^2 + y^2.$

$$\iiint\limits_V zdxdydz \overset{(1.3)}{=} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} zdz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{x^2+y^2} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^4 y + \frac{2}{3}\, x^2 y^3 + \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^4(1-x) + \frac{2}{3}\, x^2(1-x)^3 + \frac{(1-x)^5}{5} \right) dx = \frac{7}{180}.$$

4. Заміна змінних у кратних інтегралах. Якщо неперервно диференційовні функції $x = x(u,v), y = y(u,v)$ здійснюють взаємно однозначне відображення області D площини Oxy в область Δ площини Ouv, то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv, \tag{1.4}$$

де $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ – якобіан перетворення $x = x(u,v), y = y(u,v)$.

1.7. В інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ провести вказану заміну змінних і зобразити області D та Δ:

1) $D: \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1,\ x = 0,\ y = 0,$ заміна змінних: $x = au\cos^4 v,\ y = bu\sin^4 v$;

2) $D: xy = p,\ xy = q,\ y = ax,\ y = bx\ (q < p,\ a < b)$ заміна: $xy = u,\ y = vx$.

1) Нехай $v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, тоді рівняння ліній, які обмежують область D перейдуть відповідно в рівняння:

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \Rightarrow u = 1;$$

$$x = 0 \Rightarrow (u = 0) \vee \quad v = \frac{\pi}{2} \ ;$$

$$y = 0 \Rightarrow \quad u = 0 \quad \vee (v = 0).$$

Області D та Δ зображено на рис. 1.11 та 1.12.

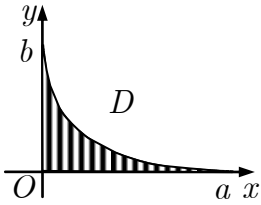


Рис. 1.11

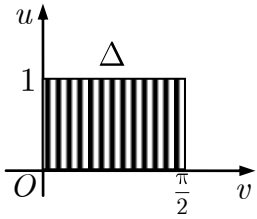


Рис. 1.12

$$J = \begin{vmatrix} a\cos^4 v & -4au\cos^3 v \sin v \\ b\sin^4 v & 4bu\sin^3 v \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= 4abu\sin^3 v\cos^5 v + 4abu\cos^3 v\sin^5 v =$$

$$= 4abu\sin^3 v\cos^3 v.$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{(1.4)}{=} 4ab\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 v\ \cos^3 v\, dv \times$$

$$\times \int\limits_0^1 f(au\cos^4 v, bu\sin^4 v)udu.$$

Після переходу в подвійному інтегралі до полярних координат (А.1)*, формула (1.4) набуде вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\ \rho\ d\varphi d\rho.$$

Якщо область Δ (рис. 1.14 та 1.15) обмежена променями, що утворюють з полярною віссю кути $\varphi_1 = \alpha, \varphi_2 = \beta$, і кривими

* Тут і далі див. дод. А.

$\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi)$ $[\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)]$, то

$$\iint\limits_{\Delta} \tilde{f}(\rho,\varphi)\rho\, d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \tilde{f}(\rho,\varphi)\rho\, d\rho.$$

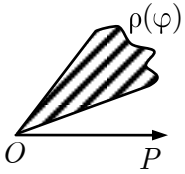


Рис. 1.13

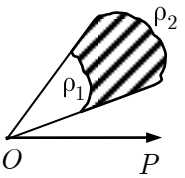


Рис. 1.14

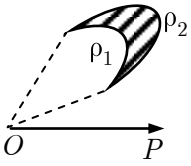


Рис. 1.15

До полярних координат (А.1) доцільно переходити, якщо:

1) область інтегрування обмежена дугами кіл та (або) відрізками прямих, які проходять через полюс (наприклад, областю інтегрування є круг, кругове кільце або круговий сектор);

2) підінтегральна функція залежить від виразу $x^2 + y^2$ (при переході до полярних координат $x^2 + y^2 = \rho^2$).

До узагальнених полярних координат (А.2) доцільно переходити, якщо:

1) область інтегрування обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (еліпсами $\dfrac{x^2}{a^2k^2} + \dfrac{y^2}{b^2k^2} = 1$);

2) підінтегральна функція залежить від $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (за такого переходу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \rho^2$).

1.8. Обчислити:

$$1) \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy;$$

2) $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x,\ y\geq 0$;

3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)^4 dxdy$, $D: x^2+y^2=2Rx$.

1) Область інтегрування D – еліптичний сектор, тому перейдемо до узагальненої полярної системи координат (А.2):

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ |J| = ab\rho. \end{cases}$$

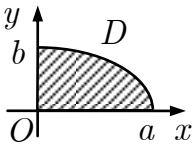


Рис. 1.16

У новій системі координат рівняння ліній приймають вигляд $\rho=1, \varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{2}$.

$$D: 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}; 0\leq\rho\leq 1.$$

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{9-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{9-\rho^2}\,ab\rho d\rho =$$

$$= -\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{9-\rho^2}\,d\ 9-\rho^2\ =$$

$$= -\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}(9-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi ab}{6}\ 27-16\sqrt{2}\ .$$

Перехід від декартових до циліндричних координат здійснюється за формулою (А.3), а саме

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\varphi d\rho dz.$$

Перехід від декартових до сферичних координат (формула (А.4))

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \qquad (1.5)$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

1.9. Обчислити:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2 \le z$;

2) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, $V: x^2+y^2=2x,\ y=z=0, z=3$.

1) Область V – куля, обмежена сферою: $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ (рис. 1.17).

Для зручності перейдемо до сферичних координат:

$$\rho^2-\rho\cos\theta=0 \Rightarrow \rho=\cos\theta.$$

$$\rho=\cos\theta\ge 0 \Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

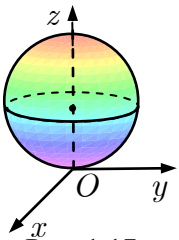


Рис. 1.17

$$V: -\pi\le\varphi\le\pi; 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}; 0\le\rho\le\cos\theta.$$

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz \overset{(1.5)}{=} \iiint\limits_{V'} \rho^3\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \int\limits_0^{\cos\theta} \rho^3 d\rho = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta d\theta = -\frac{\pi}{2}\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}.$$

1.2. Криволінійні інтеграли

1. Криволінійний інтеграл I роду. Якщо крива L у просторі задана параметрично: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)\,(t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl \overset{(A.7)}{=} \\ = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt. \tag{1.6}$$

Для плоскої кривої, заданої рівнянням $y = y(x), a \le x \le b$:

$$\int\limits_L f(x,y)dl \overset{(A.6)}{=} \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2}dx. \tag{1.7}$$

Для плоскої кривої, заданої рівнянням $\rho = \rho(\varphi)\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$ у полярних координатах

$$\int\limits_L f(x,y)dl \overset{(A.8)}{=} \\ = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2}d\varphi. \tag{1.8}$$

1.10. Обчислити:

1) $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl,\ L : AB,\ A(1;1;1), B(3;0;3)$;

2) $\int\limits_L \sqrt{1 + \dfrac{x}{R}}\, dl, L : \begin{cases} x = R\sin^2 t, y = \dfrac{R}{2}\sin 2t, \\ z = R\cos t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

3) $\int\limits_L y dl, L: y = x^3, 0 \le x \le 1;$

4) $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl, L: \begin{cases} \rho = a(1 + \cos\varphi), \\ 0 \le \varphi \le \pi; \end{cases}$

5) $\int\limits_L \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dl, L: \begin{cases} \rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

1) Рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} = t;$$

$x = 2t + 1,\ y = -t + 1,\ z = 2t + 1.$

Від точки A до точки B: $0 \le t \le 1.$

$$x'_t = 2,\ y'_t = -1,\ z'_t = 2;$$

$$dl \overset{(A.7)}{=} \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} dt = 3dt.$$

$$\int\limits_{AB} (x^2 + y^2 + z^2) dl \overset{(1.6)}{=} 3\int\limits_0^1 ((2t+1)^2 + (1-t)^2 + (2t+1)^2) dt =$$

$$= 3\int\limits_0^1 (9t^2 + 6t + 3) dt = 9.$$

3) Для кубічної параболи (рис. 1.18)

$$y'_x = 3x^2, dl \overset{(A.6)}{=} \sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

$$\int\limits_L y dl \overset{(1.7)}{=} \int\limits_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{1}{36} \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 9x^4} d(1 + 9x^4) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{54} (10\sqrt{10} - 1).$$

4) Для кардіоїди (рис. 1.19):

$$\rho'_\varphi = -a\sin\varphi;$$

$$dl \overset{(A.8)}{=} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= a\sqrt{\sin^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}\,d\varphi = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi.$$

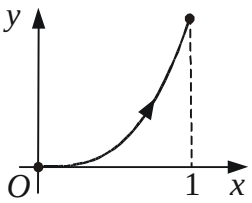


Рис. 1.18

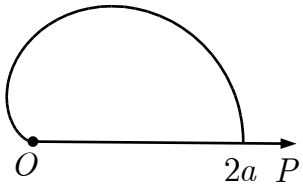


Рис. 1.19

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl \overset{(1.8)}{=} \int\limits_0^\pi a(1+\cos\varphi)2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 8a^2\int\limits_0^\pi \cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 8a^2\cdot 2\int\limits_0^\pi\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 8a^2\cdot 2\left(\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = 8a^2\,\frac{2}{1\cdot 3} = \frac{16}{3}\,a^2.$$

2. Криволінійний інтеграл II роду. Якщо криву L задано параметрично

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)\ \ (t_1 \le t \le t_2)$$

і значенню t_1 відповідає точка A, значенню t_2 – точка B, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x,y,z)y'(t) + R(x,y,z)z'(t)]dt. \tag{1.9}$$

Якщо криву L задано рівнянням $y = y(x)\ \ (a \le x \le b)$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y']dx. \quad (1.10)$$

1.11. Обчислити:

$1)\int\limits_L (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy$, L : ламана ABC, $A(1;1) \to B(3;1) \to C(3;5)$;

$2)\int\limits_L (x^2 - y^2)dx + xydy$,

$L : y = e^x$, $A(0;1) \to B(1;e)$;

$3)\int\limits_L xydx + zdy + (x^2 + y^2)dz$,

L: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

$4)\int\limits_L x^2dx + (x + z)dy + xydz$,

L: $x = \sin t, y = \sin^2 t, z = \sin^3 t \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1) Оскільки контур складається з ділянок AB та BC (рис. 1.20), то

$$\int\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}.$$

На відрізку $AB : y = 1$, $dy = 0$; на відрізку BC : $x = 3, dx = 0$, тому

$$\int\limits_{ABC} (x^3 + y)dx + (x + y^3)dy =$$

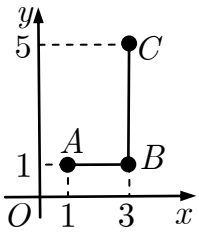


Рис. 1.20

$$= \int_1^3 (x^3+1)dx + \int_1^5 (3+y^3)dy = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Big|_1^3 + \left(3y+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_1^5 =$$
$$= 190.$$

3) $dx = -a\sin t dt, dy = a\cos t dt, dz = bdt.$

$$\int_L xydx + zdy + (x^2+y^2)dz \overset{(1.9)}{=}$$
$$= \int_0^{\pi/2} -a^3\cos t\sin^2 t + bat\cos t + a^2 b \;\; dt =$$
$$= \left(ab\cos t + abt\sin t + a^2 bt - \frac{a^3}{3}\sin^3 t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= -\frac{a^3}{3} - ab + \frac{\pi}{2}ab + \frac{a^2 b\pi}{2}.$$

3. Формула Остроградського – Ґріна. Якщо L – кусково-гладкий контур, що обмежує на площині Oxy область D, а $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні в замкненій області $\bar{D}$, то справедлива формула Остроградського – Ґріна (А.16).

1.12. Обчислити:

1) $\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy,\ L: x^2+y^2 = R^2;$

2) $\oint\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy, L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

3) $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}, L: x^2+y^2 = R^2.$

1) Функції $P(x,y) = (1-x^2)y,\ Q(x,y) = x(1+y^2)$ – неперервні та мають неперервні частинні похідні в замкненій області $\bar{D}$. Крива L – коло є гладкою кривою, отже за формулою Остроградського – Ґріна:

$$\oint_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy \overset{(A.16)}{=}$$

$$= \iint_D (1 + y^2 - (1-x^2))dxdy =$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy \overset{(A.1)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} R^4.$$

При безпосередньому обчисленні одержимо:

$$L : x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\oint_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy \overset{(1.9)}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi} ((1 - R^2\cos^2 t)R\sin t(-R\sin t) +$$

$$+R\cos t(1 + R^2\sin^2 t)R\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2\cos 2t + 2R^4\sin^2 t\cos^2 t dt) = \frac{\pi}{2} R^4.$$

3) Обчислимо інтеграл безпосередньо, параметризуючи криву:

$$L : x = R\cos t, y = R\sin t\,(0 \le t \le 2\pi);$$

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \overset{(1.9)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t} dt = 2\pi.$$

Функції $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ та $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ задовольняють умову $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$, але інтеграл по замкненому контуру не дорівнює нулеві (формула Остроградського – Ґріна не застосовна, оскільки функції не є неперервними в точці $O(0;0)$, яка лежить усередині області, обмеженої лінією L).

4. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Криволінійний інтеграл

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

де L – контур, що повністю лежить в однозв'язній області V, у якій функції P, Q і R неперервні разом зі своїми частинними похідними, не залежить від шляху інтегрування тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

У цьому випадку підінтегральна функція є повним диференціалом деякої функції

$$U(x,y,z) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt. \qquad (1.11)$$

У випадку плоскої кривої $\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt. \qquad (1.12)$$

1.13. Перевірити чи є підінтегральний вираз повним диференціалом та обчислити інтеграл:

1) $\int\limits_{(0;0;0)}^{(1;1;1)} 2xy^2z^3dx + 2x^2yz^3dy + 3x^2y^2z^2dz;$

2) $\int\limits_{(7;2;3)}^{(5;3;1)} \dfrac{xzdy + xydz - yzdx}{(x-yz)^2},\ (L: x \neq yz).$

1.3. Поверхневі інтеграли

1. Поверхневий інтеграл I роду. Якщо поверхня задана рівнянням $z = z(x, y)$, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS \overset{(A.9)}{=} \iint\limits_{D_{Oxy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy. \qquad (1.13)$$

1.14. Обчислити:

1) $\iint\limits_{\Omega: z=\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + y^2 + 3z^2)dS, \;\; 0 \le z \le 1;$

2) $\iint\limits_{\Omega: 2z=2-x^2-y^2} \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2} \right) dS, \;\; z \ge 0;$

3) $\iint\limits_{\Omega: y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}} z^2 + x^2 + y^3 \;\; dS;$

4) $\iint\limits_{\Omega: z=\sqrt{9-x^2}} z(x + y)dS, \;\; 0 \le y \le 2.$

1) Потрібно обчислити інтеграл по частині поверхні конуса (рис. 1.21), яка проектується на площину Oxy у круг

$D : x^2 + y^2 \le 1.$

$$z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$dS \overset{(A.9)}{=} \sqrt{2}dxdy.$$

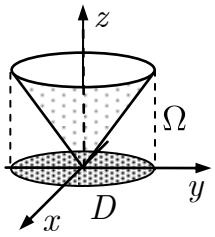


Рис. 1.21

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + 3z^2)dS \overset{(1.13)}{=} \iint\limits_{D} (x^2 + y^2 + 3(x^2 + y^2))\sqrt{2}dxdy =$$

$$= 4\sqrt{2}\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dxdy \overset{(A.1)}{=} 4\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = 2\sqrt{2}\pi.$$

2. Поверхневий інтеграл II роду. Нехай двостороння поверхня Ω орієнтована нормаллю $\mathbf{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Якщо поверхня $y = \varphi_1(x)$, однозначно проектується в область D_{Oxy}, то

$$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{Oxy}} R(x,y,z(x,y))dxdy, \tag{1.14}$$

де знак «плюс» відповідає $\cos\gamma > 0$ на вибраній стороні поверхні Ω.

1.15. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy$, де Ω – зовнішня сторона частини півсфери $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, вирізаної конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

На зовнішній стороні поверхні нормаль утворює гострий кут із віссю Oz, частина поверхні однозначно проектується в область, обмежену кривою (рис. 1.22)

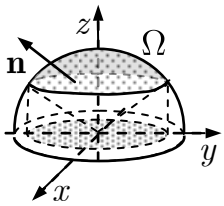


Рис. 1.22

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4-x^2-y^2};\ x^2+y^2 = 2.$$

Отже:

$$\iint\limits_{\Omega}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy \overset{(1.14)}{=} + \iint\limits_{D_{Oxy}}(5x^2+5y^2+(4-x^2-y^2))dxdy =$$

$$= 4\iint\limits_{D_{Oxy}}(1+x^2+y^2)dxdy \overset{(\text{A.1})}{=} 4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}}(1+\rho^2)\rho\, d\rho = 16\pi.$$

1.16. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, Ω – внутрішня сторона поверхні $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$, що відтинається площиною $z=0$.

1.17. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy$, Ω – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

3. Зв'язок між поверхневими інтегралами I та II роду. Поверхневі інтеграли I та II роду пов'язані формулою

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega} P dydz+Qdxdz+Rdxdy=\\&=\iint\limits_{\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,\end{aligned}\qquad(1.15)$$

де $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі, якою орієнтована поверхня.

1.18. Обчислити $\iint\limits_{\Omega}(2z-x)dydz+3zdxdy+(x+2z)dzdx$, де Ω – верхня сторона трикутника $x+4y+z=4$, $x,y,z\geq 0$.

Використаємося формулу (1.15). Нормаль до поверхні – $\mathbf{n}=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$.

$$\iint\limits_{\Omega}(2z-x)dydz+(x+2z)dzdx+3zdxdy=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\iint\limits_{\Omega}(2z-x+4(x+2z)+3z)dS=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\iint\limits_{\Omega}(13z+3x)dS\boxminus$$

Поверхня Ω (рис. 1.23) однозначно проектується на будь-яку координатну площину. Спроектуємо її на площину D_{Oxy}:

$$z = 4 - x - 4y;$$

$$z'_x = -1;\ z'_y = -4;$$

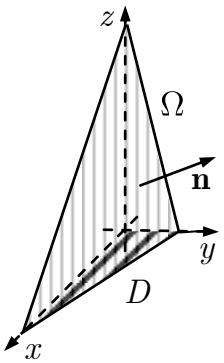


Рис. 1.23

$$dS \overset{(A.9)}{=} \sqrt{1+16+1}dxdy = 3\sqrt{2}dxdy.$$

$$\boxminus\!\!\iint\limits_{D_{xOy}} (52 - 10x - 52y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{4-4y} (52 - 10x - 52y)dx = \frac{128}{3}.$$

1.19. Обчислити інтеграли: 1) $\iint\limits_\Omega z^2 dxdy$; 2) $\iint\limits_\Omega zdxdy$, де Ω – зовнішня сторона півсфери $y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$.

Розіб'ємо поверхню Ω на частини Ω_1 та Ω_2, розташовані відповідно вище і нижче площини $z = 0$ (рис. 1.24).

$$\iint\limits_\Omega z^2 dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_1} z^2 dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} z^2 dxdy.$$

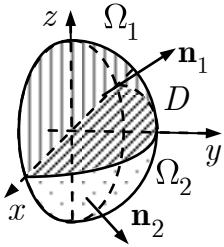


Рис. 1.24

Поверхні Ω_1 та Ω_2 проектуються на площину Oxy в одну й ту ж область D_{Oxy}. Зовнішня нормаль до Ω_1 утворює з віссю Oz гострий кут, а до Ω_2 – тупий. Отже,

$$1)\iint\limits_{\Omega_1} z^2dxdy \overset{(1.15)}{=} + \iint\limits_{D_{Oxy}} (R^2 - x^2 - y^2)dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega_2} z^2dxdy \overset{(1.15)}{=} - \iint\limits_{D_{Oxy}} (R^2 - x^2 - y^2)dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega} z^2dxdy = 0.$$

$$2)\iint\limits_{\Omega_1} zdxdy \overset{(1.15)}{=} + \iint\limits_{D_{Oxy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega_2} zdxdy \overset{(1.15)}{=} - \iint\limits_{D_{Oxy}} (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})dxdy;$$

$$\iint\limits_{\Omega} zdxdy = 2\iint\limits_{D_{Oxy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy \overset{(A.1)}{=}$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho\sqrt{R^2 - \rho^2}d\rho = \frac{2\pi}{3} R^3.$$

2. Застосування кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів

2.1. Геометричні застосування

1. Площа плоскої області. Площу плоскої області D знаходять за формулою

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

2.1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

1) $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$ $(x \geq 0)$;

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$,

$x = \sqrt{3}y$, $x = 0$;

3) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

1) $S(D) = \iint\limits_D dxdy.$

Область D (рис. 2.1) є правильною в напрямі осі Ox.

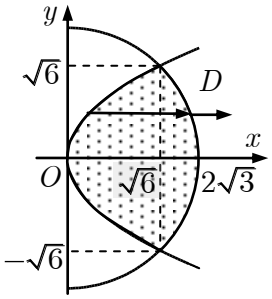


Рис. 2.1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ x\sqrt{6} = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -2\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$.

Оскільки $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}$, тоді $y_1 = -\sqrt{6}$, $y_2 = \sqrt{6}$. Область D проектується на вісь Oy у відрізок $-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$ і обмежена зліва параболою $x = \frac{1}{\sqrt{6}}y^2$, а справа – дугою кола $x = \sqrt{12 - y^2}$. Тоді

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy \int\limits_{y^2/\sqrt{6}}^{\sqrt{12-y^2}} dx = \int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\sqrt{12-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{6}} \right) dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{6}} \sqrt{12-y^2}dy - \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{6}} = \left| \begin{array}{l} y = 2\sqrt{3}\sin t \\ dy = 2\sqrt{3}\cos t dt \end{array} \begin{array}{c|c|c} y & 0 & \sqrt{6} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{12 - 12\sin^2 t} 2\sqrt{3}\cos t dt - 4 = 12\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2 t dt - 4 =$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t)dt - 4 = 6\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Big|_0^{\pi/4} - 4 = \frac{3\pi}{2} - 1.$$

2) $S(D) = \iint\limits_D dxdy.$

Область D обмежена колами $(y-4)^2 + x^2 = 16; (y-2)^2 + x^2 = 4,$ і прямими $x = 0,$ $x = \sqrt{3}y$ (рис. 2.2).

Зважаючи на форму області D, доцільно перейти до полярних координат (А.1):

$$\rho^2 - 4\rho\sin\varphi = 0 \Rightarrow$$

$\rho = 4\sin\varphi$ – рівняння меншого кола. Аналогічно $\rho = 8\sin\varphi$ – рівняння більшого кола.

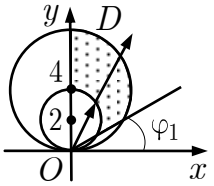


Рис. 2.2

$$\rho\sin\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6};$$

$$\rho\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, область D задається нерівностями:

$$D: \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 4\sin\varphi \le \rho \le 8\sin\varphi.$$

$$S = \iint\limits_D dxdy \overset{(\text{A}.1)}{=} \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi = 24\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi = 12\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} 1-\cos 2\varphi \;\; d\varphi =$$

$$= 12\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 4\pi + 3\sqrt{3}.$$

2. Об'єм просторової області обчислюють за формулою

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$$

2.2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2;$

2) $2x + 3y + 4z = 12, x, y, z = 0;$

3) $y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2 + y^2;$

4) $2z = x^2 + y^2, z = 2;$

5) $x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0;$

6) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2;$

7) $x^2 + z^2 \leq 2Rx, x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$

8) $x^2 + y^2 = 2az, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2;$

9) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz;$

10) $x^2 + y^2 + z^2 = 1; x^2 + y^2 = 3z^2;$

11) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2.$

1) $V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$

Тіло G обмежено поверхнями: параболічними циліндрами $\| Oz : y = 16\sqrt{2x},\ y = \sqrt{2x}$, площиною $Oxy : z = 0,$ площиною $\| Oy\ \ x + z = 2$ (рис. 2.3). Тіло G – циліндричне в напрямі осі Oz. На площину Oxy воно проектується в область D (рис. 2.4).

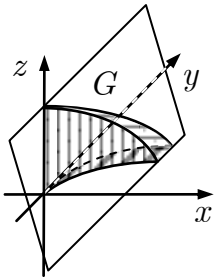


Рис. 2.3

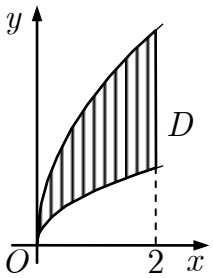


Рис. 2.4

$$V : 0 \le x \le 2; \sqrt{2x} \le y \le 16\sqrt{2x};\ 0 \le z \le 2 - x.$$

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{16\sqrt{2x}} dy \int\limits_0^{2-x} dz = 32.$$

4) $V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$

Оскільки тіло G обмежено параболоїдом $2z = x^2 + y^2$ та площиною $z - 2 = 0$ (див. рис. 2.5), то воно циліндричне в напрямі осі Oz і проектується на площину Oxy в область D (рис. 2.6), обмежену колом: $2z = x^2 + y^2,\ z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$.

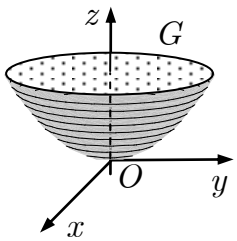


Рис. 2.5

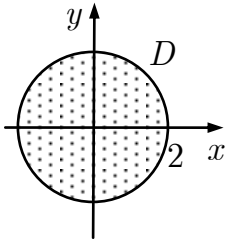


Рис. 2.6

У цьому випадку доцільно буде перейти до циліндричних координат (А.3): $z = \frac{1}{2}\rho^2$, $z = 2$, $\rho = 2$.

$$V = \iiint\limits_G dxdydz \overset{(\text{A.3})}{=} \iiint\limits_G \rho d\varphi d\rho dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2/2}^2 dz = 4\pi.$$

9) $V(G) = \iiint\limits_G dxdydz.$

1. Нехай тіло G обмежено сферами: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ та знаходиться ззовні сфери (рис. 2.7). Перейдемо до сферичних координат (А.4), тоді рівняння сфер мають наступний вигляд: $\rho = R$ та $\rho = 2R\cos\theta$. Знайдемо значення θ, при якому сфери перетинаються, розв'язавши систему рівнянь $\rho = R$, $\rho = 2R\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

$$V(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \iiint\limits_G \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_R^{2R\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{11\pi R^3}{12}.$$

2. Якщо область G знаходиться усередині обох сфер, тоді її слід розбити на дві: $G_1 : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \rho \le 2R\cos\theta$ та $G_2 : \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2R$.

$$V = \iiint\limits_G \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho =$$

$$= \iiint\limits_{G_1} \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho +$$

$$+ \iiint\limits_{G_2} \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho =$$

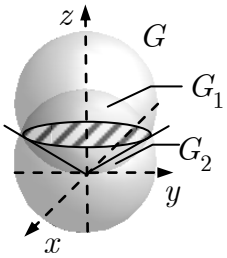


Рис. 2.7

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{R} \rho^2 d\rho + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{5\pi R^3}{12}.$$

3. Довжина кривої. Її обчислюють за формулою

$$l(L) = \int\limits_L dl.$$

2.3. Знайти довжину дуги кривої:

1) $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$;

2) $\rho = 3e^{3\varphi/4}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;

3) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = at$ $(0 \le t \le \beta)$.

1) $L(l) = \int\limits_L dl$ (рис. 2.8).

$$dl \overset{(A.6)}{=} \sqrt{1 + (\ln x\ ')^2}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx.$$

$$l = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^{-1}\ \ 1 + x^2\ \ ^{1/2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} m = -1, n = 2 & 1 + x^2 = t^2 \\ p = \frac{1}{2} & d(1+x^2) = dt^2 \\ \dfrac{m+1}{n} = 0 \in \mathbb{Z} & xdx = tdt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^{-2}\ \left(1+x^2\right)^{1/2} x dx = \int_2^4 \frac{t}{t^2-1}\, t dt = \int_2^4 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\, dt =$$

$$= \int_2^4 dt + \int_2^4 \frac{dt}{t^2-1} = \left. t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \right|_2^4 =$$

$$= \left(4 - 2 + \frac{1}{2}\ \ln\frac{3}{5} - \ln\frac{1}{3}\right) = 2 + \ln\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

2) $l = \int\limits_L dl$ (рис. 2.9).

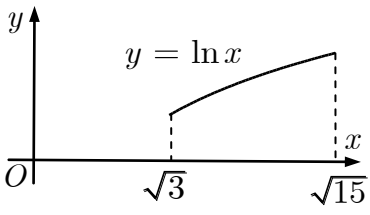


Рис. 2.8

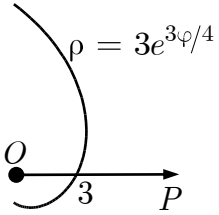


Рис. 2.9

$$dl \overset{(\text{A.8})}{=} \sqrt{\frac{81}{16}e^{3\varphi/2} + 9e^{3\varphi/2}}\, d\varphi.$$

$$l = \frac{15}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{3\varphi/4} d\varphi = \frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{3\varphi/4}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 5\ \left(e^{3\pi/8} - e^{-3\pi/8}\right) = 10\,\mathrm{sh}\,\frac{3\pi}{8}.$$

4. Площа поверхні. Знаходять її за формулою:

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dS.$$

2.4. Знайти площу поверхні Ω, вирізаної поверхнею Σ:

1) $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $\Sigma : 2z = x^2 + y^2$;

2) $\Omega : y^2 + z^2 = 2x$, $\Sigma : y^2 = x, x = 1$;

3) $\Omega : x^2 + y^2 = a^2$, $\Sigma : x^2 + z^2 = a^2$;

4) $\Omega : x^2 + y^2 = z^2$, $\Sigma : \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$.

1) $S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dS.$

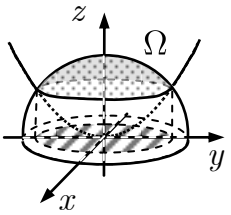


Рис. 2.10

Частина поверхні сфери, вирізана параболоїдом, проектується на площину Oxy у круг, обмежений колом:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ 2z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow z = 1, x^2 + y^2 = 2.$$

$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2};$$

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{-y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}};$$

$$dS \overset{(A.9)}{=} \sqrt{1 + \frac{x^2}{3 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{3 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

$$S(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dS \overset{(1.13)}{=} \iint\limits_{D_{Oxy}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} dxdy \overset{(A.1)}{=}$$

$$= \sqrt{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{3 - \rho^2}} = -\sqrt{3}\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{d(3 - \rho^2)}{\sqrt{3 - \rho^2}} =$$

$$= -2\sqrt{3}\pi \sqrt{3 - \rho^2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = (6 - 2\sqrt{3})\pi.$$

2.2. Фізичні застосування

1. Маса, статичні моменти та моменти інерції пластинки (дод. Б, табл. 1, 2).

2.5. Знайти масу пластинки $D: y \geq \frac{x}{4} \geq 0,\ 1 \leq \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 3,$ із густиною $\mu(x,y) = \frac{x}{y^5}$.

$$m(D) = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy = \iint\limits_D \frac{x}{y^5}\,dxdy.$$

Зважаючи на форму пластинки доцільно перейти до узагальнених полярних координат:

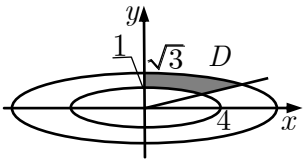


Рис. 2.11

$$x = 4\rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, |J| = 4\rho:$$

$$1 \leq \rho^2 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \rho \leq \sqrt{3}.$$

$$4\rho\cos\varphi \geq 0; 4\rho\sin\varphi \geq 4\rho\cos\varphi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\mu^*(\rho,\varphi) = \frac{4\rho\cos\varphi}{\rho^5\sin^5\varphi} = \frac{4\cos\varphi}{\rho^4\sin^5\varphi}.$$

$$D:\ \ 1 \leq \rho \leq \sqrt{3}; \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\ \ .$$

$$m = \iint\limits_D \frac{4\cos\varphi}{\rho^4\sin^5\varphi}\,4\rho\,d\rho\,d\varphi = 16\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin^5\varphi}\,d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{d\rho}{\rho^3} = 4.$$

2.6. Для круга $D = \{x^2 + y^2 \leq 2ax\}$ з густиною $\mu(x,y) = \mu_0\sqrt{x^2+y^2}$ знайти: 1) масу; 2) координати центра мас; 3) моменти інерції відносно осей Ox та Oy.

2.7. Для $D = \{x + y \geq a; a \geq x, y \geq 0\}$ з густиною $\mu(x, y) = x$ знайти: 1) масу; 2) координати центра мас; 3) моменти інерції відносно осей Ox та Oy.

2. Маса, статичні моменти та моменти інерції тіла (див. дод. Б, табл. 1, 2).

2.8. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$1)\, V : \frac{z^2}{64} \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{4};$$

$$2)\, V : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h,\ \ \mu = \mu_0 z^2.$$

$$1)\ m(V) = \iiint\limits_V \mu(x, y, z)dxdydz.$$

Тіло V обмежують поверхні: конус $z^2 = 64(x^2 + y^2)$; циліндр $x^2 + y^2 = 4$; $y = 0$, $z = 0$ – площини Oxz та Oxy (рис. 2.12). Тіло V – циліндричне в напрямі осі Oz. Оскільки проекцією на площину Oxy є півкруг (рис. 2.13), перейдемо до циліндричної системи координат:

$$\begin{cases} z^2 = 64\rho^2; \rho^2 = 4; \\ \rho \sin\varphi \geq 0, z \geq 0; \\ \mu^*(\rho, \varphi) = \frac{5}{4}\rho^2. \end{cases} \Rightarrow V : \begin{cases} z = 8\rho; z = 0; \\ \rho = 2; \\ 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ \mu^*(\rho, \varphi) = \frac{5}{4}\rho^2. \end{cases}$$

$$V = \{0 \leq z \leq 8\rho;\ 0 \leq \rho \leq 2;\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

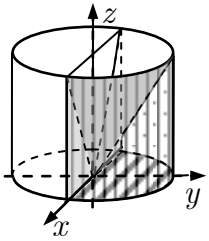


Рис. 2.12

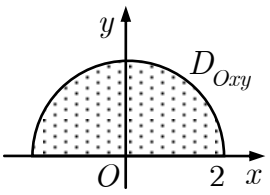


Рис. 2.13

$$m(V) = \iiint\limits_V \frac{5(x^2+y^2)}{4}\,dxdydz \overset{(\text{A.3})}{=} \frac{5}{4}\iiint\limits_V \rho^3 d\varphi d\rho dz =$$

$$= \frac{5}{4}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^3 d\rho \int\limits_0^{8\rho} dz = 64\pi.$$

2.9. Знайти координати центра мас тіла V з густиною $\mu(x,y,z)$:

1) $V : \dfrac{x}{6} \le y^2+z^2 \le 3,\ x \ge 0,\ \mu = \mu_0$;

2) – 3) $V : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x \ge 0,$

$\mu_1 = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\mu_2 = \dfrac{\mu_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

4) $V : R^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4R^2,\ y \ge 0,$

$\mu = \mu_0(x^2+y^2+z^2)$;

5) $V : x^2+y^2 \le z \le h,\ \mu = \mu_0\sqrt{h-z}$;

6) $V : x^2+y^2-z^2 \le a^2,\ 0 \le z \le h,\ \mu = \mu_0 z$;

7) $V : 0 \le z \le x^2-y^2,\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ \mu_0 = \mu_0 z$.

1) Тіло V обмежене поверхнями: параболоїдом $x = 6(y^2+z^2)$, циліндром $y^2+z^2 = 3$ та площиною Oyz (рис. 2.14).

Оскільки вісь Ox є віссю симетрії тіла, то $y_c = z_c = 0$. Абсцису x_c центра мас тіла визначають за формулою

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m},$$

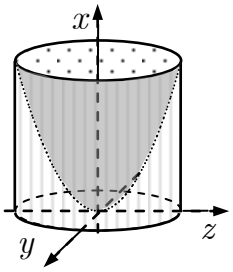


Рис. 2.14

де M_{Oyz} – статичний момент відносно площини Oyz, m – маса тіла:

$$M_{Oyz} = \iiint\limits_V x\mu dxdydz;$$

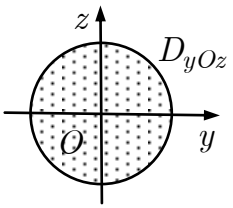


Рис. 2.15

$$m = \iiint\limits_V \mu(x, y, z)dxdydz.$$

Тіло циліндричне в напрямі осі Ox і проектується на площину Oyz у круг, тому доцільно перейти до циліндричних координат за формулами:

$$y = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,\ x = x,\ |J| = \rho.$$

$$V : x = 6\rho^2,\ \rho^2 = 3,\ x = 0.$$

$$V : x = 6\rho^2,\ \rho = \sqrt{3},\ x = 0.$$

$$V : 0 \le x \le 6\rho^2,\ 0 \le \rho \le \sqrt{3},\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$m(V) = \iiint\limits_V \mu_0 dxdydz \overset{(A.3)}{=} \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_0^{6\rho^2} dx = 27\pi\mu_0.$$

$$M_{Oyz} = \iiint\limits_V \mu_0 x dxdydz = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int\limits_0^{6\rho^2} x dx = 162\pi\mu_0.$$

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m} = \frac{162\pi\mu_0}{27\pi\mu_0} = 6.$$

Центр мас – $C(6; 0; 0)$.

3. Маса, статичні моменти та моменти інерції кривої (див. дод. Б, табл. 1, 2).

2.10. Знайти масу, розподілену з густиною μ по кривій L:

$$1)\ x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ t \in [0; 2\pi],\ \mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$2)\ xy = 1,\ 1 \le y \le 2,\ \mu = \frac{ky^3}{x^2};$$

$$3)\ y = x^4,\ 0 \le x \le 1,\ \mu = kx^5;$$

$$4)\ x = R\cos t,\ y = R\sin^2 t,$$

$$z = \frac{1}{2}R\sin 2t,\ t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \mu = k\sqrt{1 + \frac{y}{R}}.$$

$$1)\ m(L) = \int\limits_L \mu(x, y, z)dl.$$

$$dl \overset{(A.7)}{=} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt = \sqrt{2 + t^2}dt.$$

$$m(L) = \int\limits_L \mu(x, y, z)dl =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\ \sqrt{2 + t^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{2 + t^2}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}d\ 2 + t^2 \ =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ 2 + 4\pi^2\ ^{3/2} - 2\sqrt{2}\ \right).$$

2.11. Знайти координати центра мас, розподілених по плоскій кривій з густиною $\mu = 1$:

$$1)\ L: y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}, |x| \le a;$$

2) $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \ t \in [0; 2\pi]; \end{cases}$

3) $L: \rho = R, \ |\varphi| \le \varphi_0 \le 2\pi;$

4) $L: \rho = a(1 + \cos\varphi);$

5) $L: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \ y \ge 0.$

2.12. Знайти моменти інерції кривих:

1) $L: x^2 + y^2 = R^2, \ \mu = 1, \ I_x = ?$

2) $L: x^2 + y^2 = 2Rx, \ \mu = 1, \ I_y = ?$

3) $L: \begin{cases} x = a(t + \sin t), & \mu = 1, \\ y = a(1 - \cos t), \ |t| \le \pi, & I_x, \ I_y = ? \end{cases}$

4) $L: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \ \mu = 1, \ I_O = ?$

4. Маса, статичні моменти та моменти інерції поверхні (див. дод. Б, табл. 1, 2).

2.13. Знайти масу частини поверхні Ω, обмеженої поверхнею Σ з густиною μ:

1) $\Omega: z^2 = 2px, \ \Sigma: \{\beta z < y < \alpha z, \ 0 < z < \alpha \ (\alpha > \beta)\},$
$\mu = \mu_0;$

2) $-$ 4) $\Omega: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$
$\mu_1 = x^2 + y^2 + z^3, \ \mu_2 = x^2 + y^2 + z^2,$
$\mu_3 = x^2 + y^2 + z;$

5) $\Omega: 2z = 9 - x^2 - y^2, \ \Sigma: x = 0,$
$\mu = x^2 + y^2 + z - 2.$

1) $m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mu(x, y, z) dS.$

Поверхня $\Omega : x = \frac{1}{2p} z^2$ – циліндр $\| Oy$ проектується на площину Oyz (рис. 2.16):

$$dS \overset{(A.9)}{=}$$

$$= \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\, dydz =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{z^2}{p^2}}\, dydz.$$

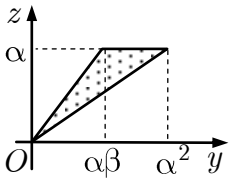


Рис. 2.16

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mu_0 dS \overset{(1.13)}{=} \mu_0 \iint\limits_{D_{Oyz}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{p}\right)^2}\, dydz =$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^{\alpha} \sqrt{1 + \frac{z^2}{p^2}}\, dz \int\limits_{\beta z}^{\alpha z} dy = \frac{\mu_0}{3p} (\alpha - \beta) \quad p^2 + \alpha^2 \ ^{3/2} - p^3 \quad .$$

2.14. Знайти координати центра мас:

$1) - 4)\, \Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$

$\mu_1 = 1, \Sigma_1 : x, y, z \geq 0;$

$\mu_2 = 1, \Sigma_2 : h \leq z \leq R;$

$\mu_3 = 1, \Sigma_3 : x,\ y,\ z \geq 0,\ x + y \leq R;$

$\mu_4 = x^2 + y^2, \Sigma_4 : z \geq 0;$

$5 - 6)\, \Omega : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \mu = 1,$

$\Sigma_1 : x^2 + y^2 \leq ax;\ \Sigma_2 : z = 0,\ \ z = h.$

5. Загальна схема застосувань.

1) За таблицями 1 або 2 додатку Б визначають потрібну формулу (маса пластинки – подвійний інтеграл від густини (подвійний інтеграл, оскільки **пластинки**; від густини, оскільки **маса**));

2) роблять рисунок об'єкта і потрібних проекцій (для потрійного та поверхневого інтегралів);

3) описують об'єкт (розбиваючи, можливо, його на частини), ураховуючи симетрію.

Для кратних інтегралів:

4) проектують об'єкт на вибрану вісь або площину, переходять за потреби до інших координат.

Для поверхневих інтегралів:

$4'$) проектують поверхню на вибрану площину, знаходять елемент поверхні.

Для криволінійних інтегралів:

$4''$) знаходять елемент дуги;

5) обчислюють інтеграл;

6) записують відповідь.

3. Елементи теорії поля

1. Похідна скалярного поля. Похідну скалярного поля $u(M)$ за напрямом l, заданого одиничним вектором $\mathbf{l^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ обчислюють за формулою (А.10). Величина $\left|\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|$ визначає швидкість зміни скалярного поля в точці M, а її знак – характер його зміни (зростання або спадання).

3.1. Знайти похідну поля:

1) $u(M) = xy^2 + z^2 - xyz$ у точці $M_0(1;1;2)$ за напрямом $\mathbf{l^0} = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{2}\right)$

2) $u(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ у точці $M_0(0;0;0)$ за напрямом $\overrightarrow{M_0M_1}$, де $M_1(3;4;0)$;

3) $u(M) = xyz$, у точці $M_0\left(1;1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ за напрямом внутрішньої нормалі до поверхні $S: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1$.

Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$,

де $\mathbf{l^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

1) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (y^2 - yz)\,|_{(1;1;2)} = -1;$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = (2xy - xz)\,|_{(1;1;2)} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = (2z - xy)\,|_{(1;1;2)} = 3.$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

3) $\mathbf{n} = (F'_x; F'_y; F'_z), \mathbf{n}^0 = \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}.$

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} - 1.$$

$$F'_x = \frac{x}{2}; F'_y = \frac{y}{2}; F'_z = 2z.$$

$$\mathbf{n}^0 = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 4z^2}}\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}; 2z\right);$$

$$\mathbf{l^0} = \mathbf{n^0}(M) = -\left(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (yz)\,|_M = \frac{1}{\sqrt{2}}; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (xz)\,|_M = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = (xy)\,|_M = 1.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_M \overset{(\text{A.10})}{=} -\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 1 = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

3.2. Знайти величину швидкості зміни скалярного поля $u(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ за напрямом вектора $\mathbf{a} = (8; -4; 8)$ у точці $M_0(1;1;1)$.

2. Градієнт. У декартовій системі координат градієнт $\operatorname{grad} u(M)$ обчислюють за формулою (А.11). Існує зв'язок між похідною за напрямом $\mathbf{l^0}$ і градієнтом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{l}^0; \ \max \frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u|.$$

3.3. Знайти $\operatorname{grad} u(M)$ у точці M_0:

1) $u(M) = 3x^2y - 3xy^3 + y^4, M_0(1;2;0)$;

2) $u(M) = xy + yz + zx, M_0(1;1;1)$;

3) $u(M) = r = |\mathbf{r}| = \left| x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \right|$.

1) $\operatorname{grad} u(M) = u'_x\big|_M\,\mathbf{i} + u'_y\big|_M\,\mathbf{j} + u'_z\big|_M\,\mathbf{k}$.

$$u'_x(M_0) = (6xy - 3y^3)\big|_{(1;2;0)} = -12;$$

$$u'_y(M_0) = (3x^2 - 9xy^2)\big|_{(1;2;0)} = -33;$$

$$u'_z(M_0) = 0;\ \operatorname{grad} u(M_0) = -12\mathbf{i} - 33\mathbf{j}.$$

3.4. Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції $u(M)$ у точці M_0:

1) $u(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, M_0(1;2;1)$;

2) $u(M) = xy + yz + zx, M_0(1;0;1)$.

1) Найбільша зміна функції відбувається у напрямі градієнта.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bigg|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bigg|_{M_0} = \frac{2}{\sqrt{6}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_0} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bigg|_{M_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathbf{k}.$$

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = 1.$$

3. Потік векторного поля. Нехай Ω двостороння поверхня $\Omega : F(M) = 0$. Вибір сторони на цій поверхні визначається одиничним вектором нормалі до поверхні:

$$\mathbf{n^0} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = \pm\frac{\operatorname{grad} F(M)}{|\operatorname{grad} F(M)|},$$

причому знак вибирається так, щоб отримати вектор нормалі до вибраної сторони поверхні. Потік векторного поля

$$\mathbf{a}(M) = (P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z))$$

крізь двосторонню поверхню Ω, орієнтовану нормаллю $\mathbf{n^0}$ обчислюють за формулою (А.14).

3.5. Знайти потік векторного поля $\mathbf{a}$ крізь частину поверхні Ω (нормаль зовнішня):

$$1)\,\mathbf{a} = (x; y; z), \Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ (0 < z < a); \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (3x; -y; -z), \Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 - z, \\ (x, y, z > 0); \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (x; 0; z), \Omega : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

$$1)\,\Pi_\Omega \overset{(\text{А.14})}{=} \iint\limits_\Omega x dydz + ydxdz + zdxdy.$$

Спроектуємо поверхню Ω (рис. 3.1) на площину Oxz (рис. 3.2). Оскільки вона проектується не однозначно, то розіб'ємо її на $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ та $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

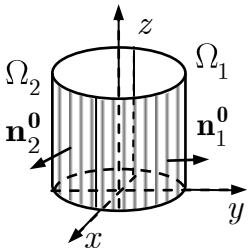


Рис. 3.1

Шуканий потік є сума потоків крізь поверхню Ω_1 та Ω_2:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2.$$

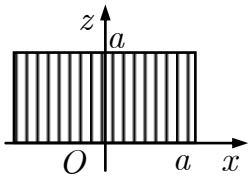


Рис. 3.2

На Ω_1 маємо:

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{a},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n^0} = \frac{1}{a}(x; y, z) \cdot (x; y; 0) = \frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{a}y^2 = a.$$

$$\Pi_1 \overset{(\text{A.12})}{=} \iint\limits_{\Omega_1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n^0} dS = a \iint\limits_{\Omega_1} dS.$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$dS \overset{(\text{A.9})}{=} \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,dxdz = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dxdz = \frac{a\,dxdz}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$\Pi_1 = a^2 \iint\limits_{D_{Oxz}} \frac{dxdz}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int\limits_0^a dz \int\limits_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi a^3.$$

$$\Pi_2 = \pi a^3;\ \Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 2\pi a^3.$$

4. Дивергенція векторного поля. Теорема Остроградського – Ґауса. В декартових координатах дивергенцію векторного поля $\mathbf{a} = (P; Q; R)$ обчислюють за формулою (А.12). Якщо P, Q, R – неперервно диференційовні в області V, обмеженій замкненою поверхнею Ω, функції, то справедлива формула Остроградського – Ґауса (А.17), де $\mathbf{n^0}$ – зовнішня нормаль.

3.6. Обчислити $\operatorname{div}\mathbf{a}$ $(\mathbf{r} = (x; y; z))$:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; 2) $\mathbf{a} = (x^2; y^2; z^2)$.

3.7. Знайти потік векторного поля $\mathbf{a}$ крізь замкнену поверхню Ω (нормаль зовнішня):

1) $\mathbf{a} = (2x, 2y, -z)$, $\Omega : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0 \le z \le H \ ; \end{cases}$

2) $\mathbf{a} = (z - y;\ x - z;\ y - x)$, $\Omega : x,\ y = 0,$
$x + y + z = 1,\ x + y - z = 1;$

3) $\mathbf{a} = (2x;\ -y;\ z)$, $\Omega : \begin{cases} 9 - z = x^2 + y^2, \\ 0 \le z \le 9; \end{cases}$

4) $\mathbf{a} = (x^3;\ y^3;\ z^3)$, $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

1) За означенням потоку

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega} 2xdydz + 2ydxdz - zdxdy.$$

Оскільки поверхня $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ замкнена, де Ω'' – поверхня конуса та Ω' – частина площини $z = H$, що вирізається конусом (рис. 3.3). Оскільки умови теореми Остроградського – Ґауса виконані, то

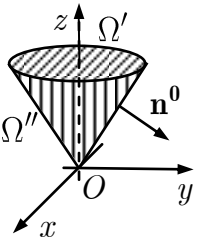


Рис. 3.3

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}\ 2x\ + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 3.$$

$$\Pi = \iiint\limits_{V} 3dxdydz = 3\iiint\limits_{V} dxdydz =$$

$$= 3V_{\text{кон.}} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi H^2 \cdot H = \pi H^3.$$

3.8. Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні Ω (нормаль внутрішня):

$$1)\,\mathbf{a} = (2x;\,2y;\,-z),\ \Omega : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0 \le z < H \ ; \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (x^3;\,y^3;\,1),\ \Omega : \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 0 \le z < H \ ; \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (x;\,y;\,z+y), \Omega : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ (y \ge 0). \end{cases}$$

1) Задача відрізняється від попередньої тим, що дана поверхня **незамкнена**, на що вказує нестрога нерівність в умові задачі. Один із способів обчислення потоку в цьому випадку, полягає в замиканні поверхні й обчисленні потоку крізь замкнену поверхню за допомогою формули Остроградського – Ґауса.

Замкнемо поверхню Ω поверхнею Ω':

$$\Omega^* = \Omega \cup \Omega'; \Pi_{\Omega} = \Pi_{\Omega^*} - \Pi_{\Omega'}.$$

З розв'язання задачі **4.7.** 1) та враховуючи, що нормаль внутрішня:

$$\Pi_{\Omega^*} = -\pi H^3;$$

$$\Pi_{\Omega'} = \iint\limits_{\Omega'} 2xdydz + 2ydxdz - zdxdy.$$

Поверхня Ω' проектується на площини Oyz та Oxz у відрізки – фігури площі нуль, а, отже, дорівнюють нулю і відповідні інтеграли.

На площину Oxy поверхня Ω' проектується в круг: $x^2 + y^2 \le H^2$.

$$\Pi_{\Omega'} = 0 + 0 + \iint\limits_{D_{xOy}} H dxdy =$$

$$= H \iint\limits_{D_{xOy}} dxdy = H \cdot S(D_{Oxy}) = \pi H^3.$$

$$\Pi_S = -\pi H^3 - \pi H^3 = -2\pi H^3.$$

5. Лінійний інтеграл. Циркуляція векторного поля. Нехай $\mathbf{a} = (P(x,y,z);\ Q(x,y,z); R(x,y,z))$ неперервне векторне поле і L – кусково-гладка орієнтована крива. ***Лінійним інтегралом векторного поля*** $\mathbf{a}$ вздовж кривої L називають

$$\int\limits_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Якщо $\mathbf{a}$ – поле сил, то лінійний інтеграл є ***роботою*** цього силового поля вздовж L. ***Циркуляцією*** C векторного поля $\mathbf{a}$ називають лінійний інтеграл цього поля вздовж замкненого шляху L (А.15).

3.9. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ у разі переміщення вздовж верхньої половини еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (y \geq 0)$ від точки $M(a;0)$ до точки $N(-a;0)$.

$A = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, де $L: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ y \geq 0$.

Параметризуємо шлях переміщення (рис. 3.4) і використаємося формулою (1.9):

$x = a\cos t,$

$y = b\sin t,$

$0 \leq t \leq \pi.$

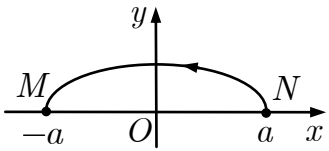


Рис. 3.4

$$A = \int_L y dx - x dy =$$

$$= \int_0^{\pi} (b \sin t \cdot (-a \sin t) - a \cos t \cdot b \cos t) dt =$$

$$= -ab \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -\pi ab.$$

3.10. Обчислити роботу силового поля $\mathbf{a} = (2a - y)\mathbf{i} + (y - a)\mathbf{j}$ вздовж першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \; z = 0.$

3.11. Довести, що робота поля магнітної напруженості $H = \frac{2y}{x^2+y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2, \; z = H$ не залежить від радіуса кола.

3.12. Знайти циркуляцію векторного поля $\mathbf{a}$ вздовж контуру L (орієнтованого проти годинникової стрілки якщо дивитися з додатного напряму осі Oz) :

1) $\mathbf{a} = x^2 y^3 \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $L : x^2 + y^2 = R^2, z = z_0$;

2) $\mathbf{a} = (y^2; z^2; x^2)$, $L : x + y + z = 3, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0$;

3) $\mathbf{a} = (y; -x; z)$, $L : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0$.

1) $C \overset{(\text{A.15})}{=} \oint_L P dx + Q dy + R dz.$

Параметризуємо рівняння кола L (рис. 3.5):

$$x = R \cos t, \; y = R \sin t, \; z = z_0, \; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$C = \int\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz \overset{(1.9)}{=}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t \cdot R^3 \sin^3 t \times$$

$$\times(-R\sin t) + R\cos t + 0)dt =$$

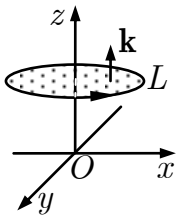


Рис. 3.5

$$= R^6 \int\limits_0^{2\pi} \sin^6 t dt - R^6 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4 t dt + R\sin t\Big|_0^{2\pi} = 4R^6 \left(\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 t dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t dt \right) = 4R^6 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \right) = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

6. Ротор векторного поля. Теорема Стокса. У декартових координатах ротор векторного поля $\mathbf{a}$ обчислюють за формулою (А.13). Якщо в області V міститься двостороння кусково-гладка поверхня Ω, обмежена додатно-орієнтованим кусково-гладким контуром L з одиничним вектором нормалі $\mathbf{n^0}$, то справедлива формула (А.18). Тобто, циркуляція дорівнює потоку ротора векторного поля $\mathbf{a}$ крізь поверхню Ω, напнуту на контур L.

3.13. Знайти ротор векторного поля $\mathbf{a}$:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; 2) $\mathbf{a} = (xy; 2x + 3y - z; x^2 + z^2)$.

3.14. Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля $\mathbf{a} = \left(\frac{y}{z}; \frac{z}{x}; \frac{x}{y}\right)$ у точці $M_0(1; 2; -2)$.

Найбільша густина циркуляції – це довжина ротора: $\max j(M) = |\operatorname{rot}\mathbf{a}|$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \overset{(A.13)}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{z} & \frac{z}{x} & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{z^2}\right) + \mathbf{k}\left(-\frac{z}{x^2}-\frac{1}{z}\right).$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}\big|_{M_0} = -\frac{5}{4}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k}.$$

$$\left|\operatorname{rot}\mathbf{a}\big|_{M_0}\right| = \sqrt{\frac{25}{16}+1+\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{141}}{4}.$$

3.15. Знайти циркуляцію векторного поля $\mathbf{a}$ вздовж контура L (див. умову задачі **3.12.**) за теоремою Стокса.

1) Оскільки виконано всі умови теореми Стокса, то $C \overset{(A.18)}{=} \iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n^0}dS.$

За поверхню, напнуту на контур, візьмемо частину площини $z = z_0$, яка обмежена контуром L, а за вектор нормалі – $\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0;0;1)$ (оскільки це забезпечує потрібний обхід контура (рис. 3.5)).

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \overset{(A.13)}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot 0 - \mathbf{j}\cdot 0 + \mathbf{k}\cdot(-3x^2y^2) = -3x^2y^2\mathbf{k}.$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = (0;0;-3x^2y^2)\cdot(0;0;1) = -3x^2y^2.$$

$$C = -3\iint\limits_{\Omega} x^2y^2dxdy = -3\iint\limits_{D_{Oxy}} x^2y^2dxdy \overset{(A.1)}{=}$$

$$= -3\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R \rho^5 d\rho = -\frac{R^6}{2}\left(\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi - \right.$$

$$\left. -\int\limits_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi\right) = -2R^6\ \ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\ \ = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

7. Потенціальне поле. Векторне поле називають ***потенціальним***, якщо існує така неперервно диференційовна функція $u(M)$ (потенціал поля), що: $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$.

Прикладами потенціального поля є: магнітне поле, створене прямолінійним провідником, гравітаційне поле, електричне поле напруженості точкового заряду тощо.

Нехай векторне поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ задано в однозв'язній області V. Поле $\mathbf{a}$ є потенціальним, тоді і лише тоді, коли $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = 0$. Циркуляція потенціального поля дорівнює нулю. У випадку потенціального поля лінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а лише від вибору початкової та кінцевої точок. Зазвичай за шлях інтегрування обирають ламану з ділянками, паралельними осям (рис. 3.6), а потенціал знаходять за формулами (2.11) та (2.12).

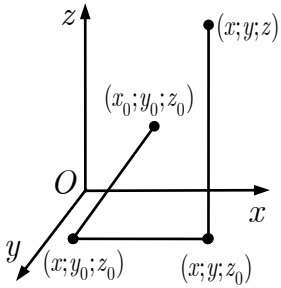


Рис. 3.6

Наступні задачі є еквівалентними:

- знаходження потенціалу,
- відновлення функції за її повним диференціалом,
- розв'язування диференціального рівняння в повних диференціалах.

3.16. Знайти функцію за її диференціалом:

$$du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy.$$

Переконаємося в тому, що du – повний диференціал:

$$P(x,y) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}, Q(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} + 1.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}.$$

Відновимо функцію $u(x,y)$:

$$u = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{2t(1-e^{y_0})}{(1+t^2)^2}\,dt + \int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{e^t}{1+x^2}+1\right)dt =$$

$$= (1-e^{y_0})\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^2} + \left(\frac{e^t}{1+x^2}+t\right)\Bigg|_{y_0}^{y} =$$

$$= -\frac{(1-e^{y_0})}{1+t^2}\Bigg|_{x_0}^{x} + \frac{e^y-e^{y_0}}{1+x^2} + y - y_0 =$$

$$= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{e^{y_0}}{1+x^2} + \frac{(1-e^{y_0})}{1+x_0^2} +$$

$$+\frac{e^y}{1+x^2} + y - \frac{e^{y_0}}{1+x^2} - y_0 = \frac{e^y}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + y + C,$$

$$C = \frac{(1-e^{y_0})}{1+x_0^2} - y_0.$$

3.17. Перевірити потенціальність і знайти потенціал поля:

1) $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

2) $\mathbf{a} = yz\cos xy\mathbf{i} + xz\cos xy\mathbf{j} + \sin xy\mathbf{k}$;

3) $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + yx\mathbf{k}$;

4) $\mathbf{a} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$;

5) $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$; 6) $\mathbf{a} = |\mathbf{r}|\,\mathbf{r}$.

Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

буде рівнянням у повних диференціалах, тоді, і лише тоді, коли $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$.

Розв'язок цього рівняння знаходять за формулою

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C.$$

3.18. Проінтегрувати диференціальне рівняння:

1) $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$;

2) $(\ln y-2x)dx+\left(\dfrac{x}{y}-2y\right)dy=0$.

1) Маємо диференціальне рівняння в повних диференціалах. Дійсно:

$$P(x,y)=x+y, Q(x,y)=x+2y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$\int\limits_{x_0}^{x}(t+y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}(x+2t)dt=0.$$

$$\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C,\ C=\frac{x_0^2}{2}+x_0y_0+y_0^2.$$

8. Соленоїдальне поле. Векторне поле $\mathbf{a}(M)$ називають ***соленоїдальним*** в області V, якщо $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=0\ \forall M\in V$.

Прикладами соленоїдальних полів є магнітне поле, створене прямолінійним провідником, уздовж якого проходить електричний струм, поле лінійних швидкостей твердого тіла, що обертається, поле лінійних швидкостей стаціонарного потоку нестисненої рідини, що немає джерел та стоків тощо.

Потік соленоїдного поля крізь замкнену поверхню дорівнює нулю.

3.19. Чи є поле соленоїдальним?

1) $\mathbf{a}=(1+2xy)\mathbf{i}-y^2z\mathbf{j}+(z^2y-2yz+1)\mathbf{k}$;

2) $\mathbf{a}=x^2yz\mathbf{i}+xy^2z\mathbf{j}-xyz^2\mathbf{k}$;

3) $\mathbf{a}=\dfrac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}+xy\mathbf{k}$;

4) $\mathbf{H}=\dfrac{2I}{|\mathbf{r}|^2}(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$.

9. Оператор набла. Диференціальні операції 2-го порядку.

Значна кількість диференціальних операцій в теорії поля спрощується при введенні ***оператора Гамільтона***, який часто називають вектором „набла" (∇) (див. А.19):

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\,.$$

Наприклад, з його допомогою можна записати першу похідну скалярного поля $\varphi(\mathbf{r})$: $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$, векторного $\mathbf{a}\ \mathbf{r}$, яке характеризується двома першими похідними: скалярною $\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla,\mathbf{a}$ та векторною $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla,\mathbf{a}$. Переваги використання оператора Гамільтона полягають у тому, що виконуючи різні дії над скалярними і векторними функціями, формально можна розглядати ∇ як звичайний вектор та застосовувати до нього правила векторної алгебри (А.20 – А.22), пам'ятаючи про те, що ∇ – це диференціальний оператор, який наділений властивостями похідної (див. А.23-А.25).

Оператор $\nabla\cdot\nabla$ позначають через Δ ("дельта") і називають ***оператором Лапласа***:

$$\nabla\cdot\nabla \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Аналогічно за допомогою оператора ∇ визначаються похідні другого порядку скалярного поля $\varphi(\mathbf{r})$: $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$ та векторного $\mathbf{a}\ \mathbf{r}$: $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$; $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

3.19. Перевірити справедливість наступних співвідношень:

1) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$; 2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{0}$;

3) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla(\nabla,\mathbf{a})$; 4) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$;

5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla,\ \nabla,\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}$.

❍1) $\operatorname{div}\ \operatorname{grad}\ \varphi = \nabla,\nabla\varphi = \nabla,\nabla\ \varphi = \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi$.

4. Завдання для індивідуальної роботи

4.1. Кратні інтеграли та їх застосування

Завдання 1. Змінити порядок інтегрування.

1.1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$. **1.2.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$.

1.3. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{3\sqrt{y}/2}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx$. **1.4.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)\,dx$.

1.5. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\frac{y}{4}+1}^{7-y} f(x,y)\,dx$. **1.6.** $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy$.

1.7. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2/4}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$. **1.8.** $\int\limits_{-2}^4 dy \int\limits_{y^2/2}^{y+4} f(x,y)\,dx$.

1.9. $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{y^2}^4 f(x,y)\,dx$. **1.10.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x,y)\,dx$.

1.11. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{\frac{x^2}{2}+2} f(x,y)\,dy$. **1.12.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

1.13. $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_{y}^{\frac{\pi}{2}-y^2} f(x,y)\,dx$. **1.14.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy$.

1.15. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$. **1.16.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)\,dy$.

1.17. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy$. **1.18.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

1.19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)\,dx$. **1.20.** $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-1-y}^{1+y} f(x,y)\,dx$.

1.21. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$. **1.22.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy$.

1.23. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1-y}^{2-2y} f(x,y)\,dx$. **1.24.** $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}+1}^{\frac{3y}{2}+4} f(x,y)\,dx$.

1.25. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{1+x} f(x,y)\,dy$. **1.26.** $\int\limits_{0}^{4/5} dy \int\limits_{1+y}^{3-\frac{3y}{2}} f(x,y)\,dx$.

1.27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)\,dy$. **1.28.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{y} f(x,y)\,dx$.

1.29. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2-y}^{2y+1} f(x,y)\,dx$. **1.30.** $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\,dy$.

Завдання 2. Записати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням по x та y відповідно, якщо область D обмежена лініями.

2.1. $D: y = \sqrt{4-x^2}$, $y = \sqrt{3x}$, $x \geq 0$.

2.2. D: $x^2 = 2y$, $5x - 2y - 6 = 0$.

2.3. $D: x = \sqrt{8 - y^2}\,,\ y \geq 0,\ y = x\,.$

2.4. $D: x \geq 0,\ \ y \geq 0\,,\ y \leq 1,\ y = \ln x\,.$

2.5. $D: x^2 = 2 - y\,,\ x + y = 0\,.$

2.6. $D: y = \sqrt{2 - x^2}\,,\ y = x^2.$

2.7. $D: y = x^2 - 2\,,\ y = x\,.$

2.8. $D: x \geq 0,\ y \geq 1,\ y =\leq 3,\ y = x\,.$

2.9. $D: y^2 = 2x\,,\ x^2 = 2y\,,\ x \leq 1\,.$

2.10. $D: x \geq 0,,\ y \geq x\,,\ y = \sqrt{9 - x^2}\ .$

2.11. $D: y^2 = 2 - x\,,\ y = x\,.$

2.12. $D: x = \sqrt{2 - y^2}\,,\ x = y^2,\ y \geq 0\,.$

2.13. $D: y \geq 0,\ x + 2y - 12 = 0,\ y = \lg x\,.$

2.14. $D: x \leq 0\,,\ y \geq 1,\ y \leq 3,\ y = -x\,.$

2.15. $D: y = 0\,,\ y \geq x\,,\ y = -\sqrt{2 - x^2}\ .$

2.16. $D: y \geq 0,\ x = \sqrt{y}\,,\ y = \sqrt{8 - x^2}\ .$

2.17. $D: y = -x\,,\ y^2 = x + 3\,.$

2.18. $D: y = \sqrt{4 - x^2}\,,\ x \geq 0\,,\ x = 1,\ \ y = 0\,.$

2.19. $D: x = -1\,,\ x = -2,\ \ \ y \geq 0,\ y = x^2.$

2.20. $D: y \leq 0,\ x^2 = -y\,,\ x = \sqrt{1 - y^2}\ .$

2.21. $D: y \geq 0,\ y \leq 1,\ y = x\,,\ x = -\sqrt{4 - y^2}\ .$

2.22. $D: x \leq 0\,,\ y = 1\,,\ y = 4\,,\ y = -x\,.$

2.23. $D: y = 3 - x^2,\ y = -x\,.$

2.24. $D: x = 0,\ x = -2,\ y \geq 0,\ y = x^2 + 4.$

2.25. $D: x = 0,\ y = 0,\ y = 1,\ (x-3)^2 + y^2 = 1.$

2.26. $D: x = \sqrt{9 - y^2},\ y = x,\ y \geq 0.$

2.27. $D: x + 2y - 6 = 0,\ y = x,\quad y \geq 0.$

2.28. $D: y = -x,\ 3x + y = 3,\ y = 3.$

2.29. $D: x \geq 0,\ y = 1,\ y = -1,\ y = \log_{1/2} x.$

2.30. $D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ y = 1,\ x = \sqrt{4 - y^2}.$

Завдання 3. Обчислити подвійний інтеграл по області D, обмеженій вказаними лініями.

3.1. $\iint\limits_D (x^2 + y)\,dxdy,$ $D: y = x^2,\ x = y^2.$

3.2. $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,$ $D: y = x^2,\ y = 2x.$

3.3. $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy,$ $D: y^2 = x,\ y = x.$

3.4. $\iint\limits_D x^2 y dxdy,$ $D: y = 2 - x,\ y = x,\ x \geq 0.$

3.5. $\iint\limits_D (x^3 - 2y)\,dxdy,$ $D: y = x^2 - 1,\ x \geq 0,\quad y \leq 0.$

3.6. $\iint\limits_D (y - x)\,dxdy,$ $D: y = x,\ y = x^2.$

3.7. $\iint\limits_D (1 + y)\,dxdy,$ $D: y^2 = x,\ 5y = x.$

3.8. $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy,$ $D: y = x^2 - 1,\ y = -x^2 + 1.$

3.9. $\iint\limits_D x(y-1)\,dxdy\,, \qquad D:\ y=5x,\ \ y=x,\quad x=3\,.$

3.10. $\iint\limits_D (x-2)y\,dxdy\,, \qquad D:\ y=x,\ \ y=\dfrac{1}{2}\,x,\quad x=2\,.$

3.11. $\iint\limits_D (x-y^2)\,dxdy\,, \qquad D:\ y=x^2,\ \ y=1\,.$

3.12. $\iint\limits_D x^2y\,dxdy\,, \qquad D:\ y=2x^3,\ \ y=0,\quad x=1\,.$

3.13. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy\,, \quad D:\ x=y^2,\ \ x=1\,.$

3.14. $\iint\limits_D xy\,dxdy\,, \qquad D:\ y=x^3,\ \ y=0,\quad x\le 2\,.$

3.15. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy\,,\ D:\ y=x^3,\ \ y=8,\quad y=0,\quad x=3\,.$

3.16. $\iint\limits_D x(2x+y)\,dxdy\,, \quad D:\ y=1-x^2,\ \ y\ge 0\,.$

3.17. $\iint\limits_D y(1-x)\,dxdy\,, \qquad D:\ y^3=x,\ \ y=x\,,\ x\ge 0\,.$

3.18. $\iint\limits_D xy^3\,dxdy\,, \qquad D:\ y^2=1-x,\ \ x\ge 0\,.$

3.19. $\iint\limits_D x(y+5)dxdy\,,\ D: y=x+5, x+y+5=0\,,\ x\le 0\,.$

3.20. $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy\,, \qquad D:\ y=x^2-1,\ \ y=3\,.$

3.21. $\iint\limits_D (x+1)\,y^2dxdy\,, \quad D:\ y=3x^2,\ \ y=3\,.$

3.22. $\iint\limits_D xy^2\,dxdy\,, \qquad D:\ y=x,\ \ y=0,\ \ x=1.$

3.23. $\iint\limits_D (x^3 + y)\,dxdy\,,\ D:\ x+y=1, x+y=2,$ $x \le 1, x \ge 0\,.$

3.24. $\iint\limits_D xy^3\,dxdy\,, \qquad D:\ y=x^3,\ \ y \ge 0,\ \ y=4x\,.$

3.25. $\iint\limits_D (x^3 + 3y)\,dxdy\,,\ D:\ x+y=1, y=x^2-1,\ x \ge 0\,.$

3.26. $\iint\limits_D xy\,dxdy\,,\ \ D:\ y=\sqrt{x},\ \ y=0,\ \ x+y=2\,.$

3.27. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\,dxdy\,,\ D:\ y=x,\ \ xy=1,\ y=2\,.$

3.28. $\iint\limits_D y(1+x^2)\,dxdy\,,\quad D:\ y=x^3,\ \ y=3x\,.$

3.29. $\iint\limits_D y^2(1+2x)\,dxdy\,,\ D:\ x=2-y^2,\ \ x=0\,.$

3.30. $\iint\limits_D e^y\,dxdy\,,\ \ D:\ y=\ln x,\ \ y=0,\quad x=2\,.$

<u>Завдання 4</u>. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярної системи координат.

4.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\ dy\,.$

4.2. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ .$

4.3. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\,.$

4.4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\ dy\,.$

4.5. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\,.$

4.6. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\ dy\,.$

4.7. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\ dy\,.$

4.8. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2+y^2)\ dy\,.$

4.9. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)\ dy\,.$

4.10. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\ dy\,.$

4.11. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\ dy\,.$

4.12. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)\ dy\,.$

4.13. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}\,.$

4.14. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

4.15. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy$.

4.16. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$.

4.17. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$.

4.18. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy$.

4.19. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ctg}\sqrt{x^2+y^2}}$.

4.20. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\ dy$.

4.21. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)\ dy$.

4.22. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)\ dy$.

4.23. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\ dy$.

4.24. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{x^2+y^2}\ dy$.

4.25. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\ dy\,.$

4.26. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\ dy\,.$

4.27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\,.$

4.28. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\ dy\,.$

4.29. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)\ dy\,.$

4.30. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\,.$

<u>Завдання 5</u>. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу плоскої області D, обмеженої даними лініями.

5.1. $D\colon\ y^2 = 4x,\ x+y=3,\ y\geq 0\,.$

5.2. $D\colon\ y = 6x^2,\ x+y=2,\ x\geq 0\,.$

5.3. $D\colon\ y^2 = x+2,\ x=2\,.$

5.4. $D\colon\ x=-2y^2,\ x=1-3y^2,\ y\geq 0,\ x\leq 0\,.$

5.5. $D\colon\ y=\frac{8}{x^2+4},\ x^2=4y\,.$

5.6. $D\colon\ y=x^2+1,\ x+y=3\,.$

5.7. $D\colon\ y^2 = 4x\,,\ x^2 = 4y\,.$

5.8. $D\colon\ y = \cos x\,,\ y \le x + 1,\quad y \ge 0\,.$

5.9. $D\colon\ x = \sqrt{4 - y^2}\,,\ y = \sqrt{3x}\,,\ x \ge 0\,.$

5.10. $D\colon\ y = x^2 + 2\,,\ x \ge 0,\quad x = 2\,,\ y = x\,.$

5.11. $D\colon\ y = 4x^2\,,\ 9y = x^2\,,\ y \le 2\,.$

5.12. $D\colon\ y = x^2\,,\ y = -x\,.$

5.13. $D\colon\ x = y^2\,,\ x = \dfrac{3}{4}\,y^2 + 1\,.$

5.14. $D\colon\ y = \sqrt{2 - x^2}\,,\ y = x^2\,.$

5.15. $D\colon\ y = x^2 + 4x\,,\ y = x + 4\,.$

5.16. $D\colon\ 2y = \sqrt{x}\,,\ x + y = 5\,,\ x \ge 0\,.$

5.17. $D\colon\ y = 2^x\,,\ y = 2x - x^2\,,\ x = 2,\quad x = 0\,.$

5.18. $D\colon\ y = -2x^2 + 2\,,\ y \ge -6\,.$

5.19. $D\colon\ y^2 = 4x\,,\ x = \dfrac{8}{y^2 + 4}\,.$

5.20. $D\colon\ y = 4 - x^2\,,\ y = x^2 - 2x\,.$

5.21. $D\colon\ x = y^2 + 1,\ x + y = 3\,.$

5.22. $D\colon\ x^2 = 3y\,,\ y^2 = 3x\,.$

5.23. $D\colon\ x = \cos y\,,\ x \le y + 1\,,\ x \ge 0\,.$

5.24. $D\colon\ x = 4 - y^2\,,\ x - y + 2 = 0\,.$

5.25. $D\colon\ x = y^2\,,\ x = \sqrt{2 - y^2}\,.$

5.26. $D\colon\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1\,,\ y \le \dfrac{1}{2}\,x\,,\ y \ge 0\,.$

5.27. $D\colon\ y^2 = 4 - x\,,\ y = x + 2,\quad y = 2\,,\ y = -2\,.$

5.28. $D\colon\ y = x^2\,,\ y = \dfrac{3}{4}\,x^2 + 1\,.$

5.29. $D\colon\ x = y^2\,,\ y^2 = 4 - x\,.$

5.30. $D\colon\ xy = 1\,,\ x^2 = y\,,\ y = 2\,,\ x = 0\,.$

Завдання 6. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу плоскої фігури, перейшовши до полярної системи координат.

6.1. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(4x^2 + y^2)\,.$

6.2. $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2\,.$

6.3. $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2(4x^2 + 3y^2)\,.$

6.4. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(3x^2 + 2y^2)\,.$

6.5. $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)^3\,.$

6.6. $\rho = a\sin^2 2\varphi\,.$

6.7. $\rho = a\sin^2\varphi\,.$

6.8. $\rho = a(1 - \cos\varphi)\,.$

6.9. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(2x^2 + 3y^2)\,.$

6.10. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(5x^2 + 3y^2)\,.$

6.11. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(7x^2 + 5y^2)\,.$

6.12. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy\,.$

6.13. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2\,.$

6.14. $(x^2 + y^2)^3 = a^4y^2\,.$

6.15. $(x^2 + y^2)^3 = a^4x^2\,.$

6.16. $\rho = a\cos^2\varphi\,.$

6.17. $\rho^2 = a^2(1 + \sin^2 \varphi)$.

6.18. $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^4$.

6.19. $(x^2 + y^2)^2 = 4(3x^2 + 4y^2)$.

6.20. $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$.

6.21. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$.

6.22. $(x^2 + y^2)^3 = 2ay^3$.

6.23. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$.

6.24. $\rho = a \sin 2\varphi$.

6.25. $\rho = a \cos 5\varphi$.

6.26. $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$.

6.27. $\rho = 2a(2 + \cos \varphi)$.

6.28. $\rho^2 = a^2 \cos 3\varphi$.

6.29. $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

6.30. $\rho = a \sin 3\varphi$.

Завдання 7. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла об'єм тіла V, обмеженого поверхнями.

7.1. V: $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.2. V: $z = 2 - (x^2 + y^2)$, $x + 2y = 1$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

7.3. V: $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y - 7 = 0$, $z \geq 0$.

7.4. V: $z = 2x^2 + 3y^2$, $y = x^2$, $y = x$, $z \geq 0$.

7.5. V: $z = 2x^2 + y^2$, $y = x$, $y = 3x$, $x = 2$, $z \geq 0$.

7.6. V: $z = x, y = 4$, $x = \sqrt{25 - y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.7. V: $z = \sqrt{x}$, $y = x$, $x + y = 2$, $z \geq 0$.

7.8. V: $y = 1 - x^2$, $x + y + z = 3$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.9. V: $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.10. V: $z = 4 - x^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.11. V: $2x + 3y - 12 = 0$, $2z = y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.12. V: $z = 10 + x^2 + 2y^2$, $y = x$, $x = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.13. V: $z = x^2$, $x + y = 6$, $y = 2x$, $x \geq 0, z \geq 0$.

7.14. V: $z = 3x^2 + 2y^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = 1$, $z \geq 0$.

7.15. V: $3y = \sqrt{x}$, $y \leq x$, $x + y + z = 10$, $y = 1$, $z = 0$.

7.16. V: $y^2 = 1 - x$, $x + y + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$.

7.17. V: $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 3x + 2y + 6$, $z = 0$.

7.18. V: $x^2 = 1 - y$, $x + y + z = 3$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.19. V: $x = y^2$, $x = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$.

7.20. V: $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.21. V: $y = x^2$, $y = 4$, $z = 2x + 5y + 10$, $z \geq 0$.

7.22. V: $y = 2x$, $x + y + z = 2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

7.23. V: $y = 1 - z^2$, $y = x$, $y = -x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

7.24. V: $x^2 + y^2 = 4y$, $z^2 = 4 - y$, $z \geq 0$.

7.25. V: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

7.26. V: $y = x^2$, $z = 0$, $y + z = 2$.

7.27. V: $z^2 = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z \geq 0$.

7.28. V: $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $x \geq 0$, $y = 1$, $z \geq 0$.

7.29. V: $z = y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

7.30. V: $y^2 = x$, $x = 3$, $z = x$, $z \geq 0$.

Завдання 8. Розставити межі інтегрування в потрійному інтегралі $\iiint\limits_V f(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$, якщо тіло V обмежене заданими поверхнями.

8.1. V: $x = 2$, $y = 4x$, $y = 3\sqrt{x}$, $z \geq 0$, $z = 4$.

8.2. V: $x = 1$, $y = 3x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = 2(x^2 + y^2)$.

8.3. V: $x = 1$, $y = 4x$, $z \geq 0$, $z = \sqrt{3y}$.

8.4. V: $x = 3$, $y = x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = 3x^2 + y^2$.

8.5. V: $y = 2x$, $y = 2$, $z \geq 0$, $z = 2\sqrt{x}$.

8.6. V: $x = 0$, $y = x$, $y = 5$, $z \geq 0$, $z = 2x^2 + y^2$.

8.7. V: $x \geq 0$, $y = 2x$, $y = 1$, $z \geq 0$, $x + y + z = 3$.

8.8. V: $x \geq 0$, $y = 3x$, $y = 3$, $z \geq 0$, $x = 3\sqrt{z}$.

8.9. V: $x = 5$, $y = x\,/\,5$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = x^2 + 5y^2$.

8.10. V: $x = 2$, $y = 4x$, $z \geq 0$, $y = 2\sqrt{z}$.

8.11. V: $x = 3$, $y = \dfrac{1}{3}x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

8.12. V: $x = 4$, $y = x\,/\,4$, $z \geq 0$, $z = 4y^2$.

8.13. V: $x \geq 0$, $y = 3x$, $y = 3$, $z \geq 0$, $z = 2(x^2 + y^2)$.

8.14. V: $x \geq 0$, $y = 4x$, $y = 8$, $z \geq 0$, $z = 3x^2 + y^2$.

8.15. V: $x \geq 0$, $y = 5x$, $y = 10$, $z \geq 0$, $z = x^2 + y^2$.

8.16. V: $y = x$, $y = -x$, $y = 2$, $z \geq 0$, $z = 3(x^2 + y^2)$.

8.17. V: $x = 1$, $y = 2x$, $y = 3x$, $z \geq 0$, $z = 2x^2 + y^2$.

8.18. $V\colon\ y = x,\ y = -2x,\ \ y = 1,\ z \geq 0,\quad z = x^2 + 4y^2\,.$

8.19. $V\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\quad x + y = 1,\quad z = 3x^2 + 2y^2\,.$

8.20. $V\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ 3x + 2y = 6,\quad z = x^2 + y^2\,.$

8.21. $V\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ x + y = 2, z = 4 - x^2 - y^2\,.$

8.22. $V\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ x + y = 3, z = 9 - x^2 - y^2\,.$

8.23. $V\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ 3x + 4y = 12,$

$z = 16 - x^2 - y^2\,.$

8.24. $V\colon\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ \ y = x,\ y = 3,\quad z = 18 - x^2 - y^2\,.$

8.25. $V\colon\ x = 2,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ y = 3x,\quad z = 4(x^2 + y^2)\,.$

8.26. $V\colon\ x \geq 0,\ y = 2x,\ \ y = 4,\ z \geq 0,\quad z = 10 - x^2 - y^2\,.$

8.27. $V\colon\ x = 3,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ y = 2x,\quad z = 4\sqrt{y}\,.$

8.28. $V\colon\ x \geq 0,\qquad y \geq 0,\ \ z \geq 0,\qquad 2x + 3y = 6,$

$z = 3 + x^2 + y^2\,.$

8.29. $V\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ x + y = 4, z = 16 - x^2 - y^2\,.$

8.30. $V\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ 5x + y = 5,\ z = x^2 + y^2\,.$

Завдання 9. Обчислити потрійний інтеграл в сферичних або циліндричних координатах.

9.1. $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz\,,\quad V\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,$

$x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,.$

9.2. $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz\,,\ V\colon\ z \geq 0,\quad z = 2,\quad y \geq \pm x\,,$

$z^2 = 4(x^2 + y^2)\,.$

9.3. $\iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz\,,\ V:1\le x^2+y^2\le 36,\ y\ge x,\ x\ge 0,$ $z\ge 0,\ z=4\,.$

9.4. $\iiint\limits_V y\ dx\,dy\,dz\,,\ V\colon x^2+y^2+z^2=32,\ y^2=x^2+z^2,$ $y\ge 0\,.$

9.5. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz\,,\ V:x^2+y^2+z^2=8,\ x^2=y^2+z^2,$ $x\ge 0\,.$

9.6. $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz\,,\qquad V:4\le x^2+y^2+z^2\le 16,$ $y\le\sqrt{3}\cdot x,\ y\ge 0,\ z\ge 0\,.$

9.7. $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz\,,\ V:z=\sqrt{8-x^2-y^2}\,,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\,,$ $y\ge 0\,.$

9.8. $\iiint\limits_V \frac{y^2dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2},\quad V:x\ge 0,\ z\ge 0,\ y\ge\sqrt{3}\cdot x\,,$ $4\le x^2+y^2+z^2\le 36\,.$

9.9. $\iiint\limits_V \frac{z\,y^2dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\qquad V:y\ge 0,\ y\le\sqrt{3}\cdot x\,,$ $z=3(x^2+y^2),\ z=3\,.$

9.10. $\iiint\limits_V \frac{x^2dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\quad V\colon x^2+y^2+z^2=16,$ $z\ge 0\,.$

9.11. $\iiint\limits_V \dfrac{xz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V:\ z=2(x^2+y^2)$, $y\geq 0$, $y\leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,x$, $z=18$.

9.12. $\iiint\limits_V \dfrac{xy\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $V\colon\ z=x^2+y^2$, $y\geq 0$, $y\leq x$, $z=4$.

9.13. $\iiint\limits_V \dfrac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V:\ x^2+y^2=4y$, $y+z=4$, $z\geq 0$.

9.14. $\iiint\limits_V \dfrac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V\colon\ x^2+y^2=2x$, $x+z=2$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

9.15. $\iiint\limits_V \dfrac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V:\ x^2+y^2=16y$, $y+z=16$, $x\geq 0$, $z\geq 0$.

9.16. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, $V:\ x^2+y^2=2x$, $x+z=2$, $z\geq 0$.

9.17. $\iiint\limits_V xy\ dx\,dy\,dz$, $V:\ 2\leq x^2+y^2+z^2\leq 8$, $z^2=x^2+y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

9.18. $\iiint\limits_V \dfrac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V:\ x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $x\geq 0$, $z\geq 0$, $z=6$.

9.19. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz\,,\ V\colon x^2+y^2+z^2=36\,,$

$y\ge 0\,,\ z\ge 0\,,\ y\le -x\,.$

9.20. $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad V:\ x^2+y^2=2x\,,\quad x^2+y^2=4x\,,$

$z\ge 0\,,\ z=4\,,\ y\ge 0\,,\ y\le x\,.$

9.21. $\iiint\limits_V \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\ V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 9,$

$y\ge 0\,,\ y\le \frac{x}{\sqrt{3}}\,,\ z\ge 0\,.$

9.22. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz\,,\ V\colon x^2-2x+y^2=0\,,\ y\ge 0\,,$

$z\ge 0\,,\ x+z=2\,.$

9.23. $\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz\,,\ V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\ge 0\,,$

$y\le x\,,\ z\ge 0\,.$

9.24. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ V:\ x^2+y^2=4y\,,\ z\ge 0\,,\ y+z=4\,.$

9.25. $\iiint\limits_V \frac{y\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\ V:\ 4\le x^2+y^2+z^2\le 16\,,$

$y\le \sqrt{3}\,x\,,\ y\ge 0\,,\ z\ge 0\,.$

9.26. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz\,,\quad V:\ x^2+y^2=2x\,,\quad y\ge 0\,,$

$z\ge 0\,,\ z=3\,.$

9.27. $\iiint\limits_V \frac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\ V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\,,$

$x\ge 0\,,\ y\le x\,,\ y\ge 0\,,\ z\ge 0\,.$

9.28. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, $V:\ x^2 = 2(y^2+z^2),\ x=4,\ x\geq 0$.

9.29. $\iiint\limits_V \dfrac{x\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V: 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $y \leq x$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

9.30. $\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$, $V:\ z = \sqrt{18-x^2-y^2}$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x \geq 0$.

<u>Завдання 10</u>. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями. Зробити рисунок.

10.1. $V:\ z^2 = 4-x$, $x^2+y^2 = 4x$.

10.2. $V:\ z = 4-y^2$, $x^2+y^2 = 4$, $z \geq 0$.

10.3. $V:\ x^2+y^2 = 1$, $z = 2-x-y$, $z \geq 0$.

10.4. $V:\ z = y^2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $x+y = 2$.

10.5. $V:\ y \geq 0$, $z \geq 0$, $z = x$, $x = \sqrt{9-y^2}$, $x = \sqrt{25-y^2}$.

10.6. $V:\ x^2+y^2 = 4$, $z = 4-x-y$, $z \geq 0$.

10.7. $V:\ z \geq 0$, $z = x^2$, $x-2y+2 = 0$, $x+y = 7$.

10.8. $V:\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ z = y$, $x = 4$, $y = \sqrt{25-x^2}$.

10.9. $V:\ z \geq 0,\ z = 4-x$, $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$.

10.10. $V:\ y \geq 0, z \geq 0$, $2x-y = 0$, $x+y = 9$, $z = x^2$.

10.11. $V:\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x = 4$, $y = 2x,\ z = x^2$.

10.12. $V:\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ y = 2x$, $y = 3$, $z = \sqrt{y}$.

10.13. $V:\ y \geq 0, z \geq 0,\ \ x = 3,\ \ y = 2x,\ z = y^2.$

10.14. $V:\ z \geq 0, y^2 = 2 - x,\ \ z = 3x.$

10.15. $V:\ z \geq 0, y = \sqrt{9 - x^2},\ \ z = 2y.$

10.16. $V:\ x \geq 0, y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ x + y = 2,\ z = x^2 + y^2.$

10.17. $V:\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 5 - x - y.$

10.18. $V:\ z \geq 0,\ z = x,\ x = \sqrt{4 - y^2}.$

10.19. $V:\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y = 2,\ z = x^2.$

10.20. $V:\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y = 4,\ z = x,\ x = \sqrt{25 - y^2}.$

10.21. $V:\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = y^2.$

10.22. $V:\ x \geq 0,\ z \geq 0,\ y \geq x,\ z = 1 - x^2 - y^2.$

10.23. $V:\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ z = x^2 + y^2.$

10.24. $V:\ z \geq 0,\ y = 2,\ y = x,\ z = x^2.$

10.25. $V:\ z \geq 0,\ y + z = 2,\ x^2 + y^2 = 4.$

10.26. $V:\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x - y = 0,\ 2x + y = 2,\ 4z = y^2.$

10.27. $V:\ x \geq 0, y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ 2x + y = 2,\ z = y^2.$

10.28. $V:\ z \geq 0, x = y^2,\ x = 2y^2 + 1,\ z = 1 - y^2.$

10.29. $V:\ x \geq 0, y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ y = 3 - x,\ z = 9 - x^2.$

10.30. $V:\ x \geq 0,\ \ z \geq 0,\ x + y = 4,\ z = 4\sqrt{y}.$

Завдання 11. Обчислити масу неоднорідної пластини D, обмеженої лініями, якщо поверхнева густина в кожній її точці $\mu = \mu(x, y)$.

11.1. $D:\ y^2 = x,\ x = 3,\ \mu = x.$

11.2. $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=1,\ \mu=x^2.$

11.3. $D:\ x=0,\ y=0,\ 2x+3y=6,\ \mu=\dfrac{y^2}{2}.$

11.4. $D:\ x^2+y^2=4x,\ \mu=4-x.$

11.5. $D:\ x=0, y=1,\ y=x,\ \mu=x^2+2y^2.$

11.6. $D:\ x^2+y^2=1,\ \mu=2-x-y.$

11.7. $D:\ x^2+y^2=4y,\ \mu=\sqrt{4-y}.$

11.8. $D:\ y=x,\ y=-x,\ y=1,\ \mu=\sqrt{1-y}.$

11.9. $D:\ x=0,\ y=2x,\ x+y=2,\ \mu=2-x-y.$

11.10. $D:\ x=1,\ x=y^2,\ \mu=4-x-y.$

11.11. $D:\ y=0,\ x^2=1-y,\ \mu=3-x-y.$

11.12. $D:\ y=x^2,\ x=y^2,\ \mu=3x+2y+6.$

11.13. $D:\ y=x^2,\ y=4,\ \mu=2x+5y+10.$

11.14. $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=1,\ \mu=2x^2+y^2.$

11.15. $D:\ x=0,\ y^2=1-x,\ \mu=2-x-y.$

11.16. $D:\ y=\sqrt{x},\ y=x,\ \mu=2-x-y.$

11.17. $D:\ y=x^2-1,\ y=1,\ \mu=3x^2+2y^2+1.$

11.18. $D:\ x=1,\ y=0,\ y=x,\ \mu=x^2+2y^2+10.$

11.19. $D:\ y=0,\ y=2x,\ x+y=6,\ \mu=x^2.$

11.20. $D:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2=4,\ \mu=4-x^2.$

11.21. $D:\ y=x^2,\ y=2,\ \mu=2-y.$

11.22. $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=1,\ \mu=x^2+y^2.$

11.23. $D:\ y = x^2 + 1,\ x + y = 3,\ \mu = 4x + 5y + 2.$

11.24. $D:\ y = x^2 - 1,\ x + y = 1,\ \mu = 2x + 5y + 8.$

11.25. $D:\ x = 0,\ y = 0,\ y = 4,\ x = \sqrt{25 - y^2},\ \mu = x.$

11.26. $D:\ x = 2,\ y = x,\ y = 3x,\ \mu = 2x^2 + y^2.$

11.27. $D:\ y = x,\ y = x^2,\ \mu = 2x + 3y.$

11.28. $D:\ x = 0,\ x + 2y + 2 = 0,\ x + y = 1,\ \mu = x^2.$

11.29. $D:\ x = 0,\ y = 0,\ x + 2y = 1,\ \mu = 2 - \ x^2 + y^2\ .$

11.30. $D:\ x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2,\ \mu = x^2 + y^2.$

Завдання 12. Обчислити координати центра мас однорідного тіла V, обмеженого поверхнями.

12.1. $V:\ x = 6(y^2 + z^2),\ y^2 + z^2 = 3,\ x = 0.$

12.2. $V:\ y = 3\sqrt{x^2 + z^2},\ x^2 + z^2 = 36,\ y = 0.$

12.3. $V:\ x = 7(y^2 + z^2),\ x = 28.$

12.4. $V:\ z = 2\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 8.$

12.5. $V:\ z = 5(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 2,\ z = 0.$

12.6. $V:\ x = 6\sqrt{y^2 + z^2},\ y^2 + z^2 = 9,\ x = 0.$

12.7. $V:\ z = 8(x^2 + y^2),\ z = 32.$

12.8. $V:\ y = 3\sqrt{x^2 + z^2},\ y = 9.$

12.9. $V:\ 9y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 = 4,\ y = 0.$

12.10. $V:\ 3z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 0.$

12.11. $V:\ x^2 + z^2 = 6y,\ y = 8.$

12.12. $V:\ 8x = \sqrt{y^2 + z^2}\,,\ x = \dfrac{1}{2}.$

12.13. $V:\ 2x = y^2 + z^2\,,\ y^2 + z^2 = 4\,,\ x = 0\,.$

12.14. $V:\ 4y = \sqrt{x^2 + z^2}\,,\ x^2 + z^2 = 16\,,\ y = 0\,.$

12.15. $V:\ y^2 + z^2 = 8x\,,\ x = 2\,.$

12.16. $V:\ z = 9\sqrt{x^2 + y^2}\,,\ z = 36\,.$

12.17. $V:\ z = 3(x^2 + y^2)\,,\ x^2 + y^2 = 9\,,\ z = 0\,.$

12.18. $V:\ x = 2\sqrt{y^2 + z^2}\,,\ y^2 + z^2 = 4\,,\ x = 0\,.$

12.19. $V:\ x^2 + z^2 = 4y\,,\ y = 9\,.$

12.20. $V:\ x = 5\sqrt{y^2 + z^2}\,,\ x = 20\,.$

12.21. $V:\ y = x^2 + z^2\,,\ x^2 + z^2 = 10\,,\ y = 0\,.$

12.22. $V:\ y = 3\sqrt{x^2 + z^2}\,,\ x^2 + z^2 = 16\,,\ y = 0\,.$

12.23. $V:\ y^2 + z^2 = 3x\,,\ x = 9\,.$

12.24. $V:\ y = \sqrt{x^2 + z^2}\,,\ y = 4\,.$

12.25. $V:\ x = y^2 + z^2\,,\ y^2 + z^2 = 9\,,\ x = 0\,.$

12.26. $V:\ x = 0, y = 0\,,\ z = 0\,,\ x + y + z = 3\,.$

12.27. $V:\ z = 2\sqrt{x^2 + y^2}\,,\ x^2 + y^2 = 9\,,\ z = 0\,.$

12.28. $V:\ x^2 + y^2 = 2z\,,\ z = 3\,.$

12.29. $V:\ z = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ z = 4\,.$

12.30. $V:\ z = x^2 + y^2\,,\ x^2 + y^2 = 4\,,\ z = 0\,.$

4.2. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля

Завдання 13. Обчислити криволінійні інтеграли.

13.1. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1;\ 1)$ до точки $B(1;\ 1)$.

13.2. $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} - дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2;\ 0)$ до точки $B(0;\ 2)$.

13.3. $\int\limits_{L_{OA}} (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, де L_{OA} - дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 1)$.

13.4. $\oint\limits_{L} (x + 2y)dx + (x - y)dy$, де L - коло $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ в додатному напрямі.

13.5. $\oint\limits_{L} (x^2y - x)dx + (y^2x - 2y)dy$, де L - дуга еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ в додатному напрямі обходу.

13.6. $\oint\limits_{L} (xy - 1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} - дуга еліпса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ від точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 2)$.

13.7. $\int\limits_{L_{OAB}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OBA} - ламана лінія OBA з координатами $O(0;\ 0)$; $B(2;\ 0)$; $A(2;\ 1)$.

13.8. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - y^2)\,dx + xy\,dy$, де L_{AB} - відрізок прямої AB; $A(1;\ 1)$; $B(3;\ 4)$.

13.9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x\,dy$, де L_{AB} - відрізок прямої AB; $A(2\pi;\ -2\pi)$; $B(-2\pi;\ 2\pi)$.

13.10. $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, де L_{AB} - відрізок прямої AB; $A(1;\ 2)$; $B(3;\ 6)$.

13.11. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$, де L_{BA} - дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

13.12. $\int\limits_{L_{ABC}} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, де L_{ABC} - ламана лінія ABC; $A(1;\ 2)$; $B(3;\ 2)$; $C(3;\ 5)$.

13.13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx + yz^2dy - x^2zdz$, де L_{OB} - відрізок прямої OB; $O(0;\ 0;\ 0)$; $B(-2;\ 4;\ 5)$.

13.14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx + xdy$, де L_{OA} - дуга кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$; $O(R;\ 0)$; $A(0;\ R)$.

13.15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y^2 = x$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(1;\ 1)$.

13.16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, де L_{AB} - відрізок прямої AB; $A(1;\ 1;\ 1)$; $B(2;\ 3;\ 4)$.

13.17. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2y\,dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ від точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 2)$.

13.18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx + \ y - x\ \ dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

13.19. $\int\limits_{L_{OB}} (xy - y^2)dx + xdy$, де L_{OB} - дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

13.20. $\int\limits_{L_{AB}} xdy - ydx$, де L_{BA} - дуга астроїди $y = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2;\ 0)$ до точки $B(0;\ 2)$.

13.21. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - x)dx + \dfrac{1}{2}x^2dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 2)$.

13.22. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} - відрізок прямої AB; $A(1;\ 0)$; $B(0;\ 2)$.

13.23. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, де L_{AB} - дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$; $A(1;\ 0;\ 0)$; $B(1;\ 0;\ 4\pi)$.

13.24. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}\,dx + xdy$, де L_{AB} - дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(e;\ 1)$.

13.25. $\oint\limits_{L} ydx - xdy$, де L - дуга еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, що пробігає в додатному напрямі.

13.26. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y = \frac{1}{4}x^2$ від точки $O(0;\ 0)$ до точки $A(2;\ 1)$.

13.27. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)\,dy$, де L_{AB} - ламана лінія $y = |x|$ від точки $A(-1;\ 1)$ до точки $B(2;\ 2)$.

13.28. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, де L_{OA} - відрізок прямої, який з'єднує точки $O(0;\ 0;\ 0)$ і $A(2;\ 1;\ -1)$.

13.29. $\oint\limits_{L} xdy - ydx$, де L - контур трикутника з вершинами $A(-1;\ 0)$,; $B(1;\ 0)$; $C(0;\ 1)$ при додатному напрямі обходу.

13.30. $\int\limits_{L_{ACB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)\,dy$, де L_{ACB} - ламана ACB; $A(2;\ 0)$; $C(5;\ 0)$; $B(5;\ 0)$.

<u>Завдання 14</u>. Обчислити криволінійні інтеграли.

14.1. $\int\limits_{L} (2z - \sqrt{x^2 + y^2})dl$, де L - дуга кривої $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

14.2. $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dl$, де L - коло $x^2 + y^2 = 4$.

14.3. $\int\limits_{L_{OB}} \dfrac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L_{OB} - відрізок прямої, який з'єднує точки $O(0;\ 0)$ та $B(2;\ 2)$.

14.4. $\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})\, dl$, де L_{AB} - відрізок прямої AB, $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$.

14.5. $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{\sqrt{5}(x - y)}$, де L_{AB} - відрізок прямої AB, що знаходиться між точками $A(0;\ 4)$ та $B(4;\ 0)$.

14.6. $\int\limits_L \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dl$, де L - дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi\,/\,2$.

14.7. $\int\limits_{L_{AB}} y dl$, де L_{AB} - дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, що знаходиться між точками $A(1;\ 0)$ та $B(0;\ 1)$.

14.8. $\int\limits_{L_{OB}} y dl$, де L_{OB} - дуга параболи $y^2 = \dfrac{2}{3}x$ між точками $O(0;\ 0)$ та $B(\sqrt{35}\ /\ 6;\ \sqrt{35}\ /\ 3)$.

14.9. $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)\, dl$, де L - дуга кривої $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t\sqrt{3}$, $0 \le t \le 2\pi$.

14.10. $\int\limits_L \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dl$, де L - дуга кардіоїди $\rho = 1+\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

14.11. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, де L - перша арка циклоїди $x = 2(t-\sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$.

14.12. $\int\limits_{L_{OA}} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L_{OA} - відрізок прямої, який з'єднує точки $O(0;\ 0)$ та $A(1;\ 2)$.

14.13. $\int\limits_L \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dl$, де L - дуга кривої $\rho = \sin\varphi$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

14.14. $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами $O(0;\ 0)$, $A(4;\ 0)$, $B(4;\ 2)$, $C(0;\ 2)$.

14.15. $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)\,dl$, де L_{ABO} - контур трикутника з вершинами $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $O(0;\ 0)$.

14.16. $\int\limits_L \dfrac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2t$.

14.17. $\int\limits_{L_{OAB}} (x+y)\,dl$, де L_{OAB} - контур трикутника з вершинами $O(0;\ 0)$, $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$.

14.18. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L - дуга лемніскати Бернуллі $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

14.19. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L - коло $x^2+y^2=2y$.

14.20. $\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами $O(0;\ 0)$, $A(5;\ 0)$, $B(5;\ 3)$, $C(0;\ 3)$.

14.21. $\oint\limits_L (x^2+y^2)\,dl$, де L - коло $x^2+y^2=4x$.

14.22. $\int\limits_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})\,dl$, де L_{AB} - дуга астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ між точками $A(1;\ 0)$ і $B(0;\ 1)$.

14.23. $\int\limits_L xy\,dl$, де L - контур квадрата зі сторонами $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

14.24. $\int\limits_L y^2\,dl$, де L - перша арка циклоїди $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

14.25. $\int\limits_{L_{ABCD}} xy\,dl$, де L_{ABCD} - контур прямокутника з вершинами $A(2;\ 0)$, $B(4;\ 0)$, $C(4;\ 3)$, $D(2;\ 3)$.

14.26. $\int\limits_L y\,dl$, де L - дуга параболи $y^2=2x$, обмежена параболою $x^2=2y$.

14.27. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} - відрізок прямої, що знаходиться між точками $A(4;\ 0)$ та $B(6;\ 1)$.

14.28. $\int\limits_{L} (x^2+y^2)^2\, dl$, де L - перша чверть кола $\rho = 2$.

14.29. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де L_{AB} - відрізок прямої, який з'єднує точки $A(1;\ 1;\ 1)$ та $B(2;\ 2;\ 2)$.

14.30. $\oint\limits_{L} (x-y)\, dl$, де L - коло $x^2+y^2=2x$.

<u>Завдання 15</u>. Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x;\ y)$. Знайти $u(x;\ y)$.

15.1. $(2x-3y^2+1)\,dx + (2-6xy)\,dy$.

15.2. $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2} - 5\right)dy$.

15.3. $-\left(\frac{1}{2}\cos 2y + y\sin 2x\right)dx + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)\,dy$.

15.4. $(y^2e^{xy^2}+3)dx + (2xye^{xy^2}-1)dy$.

15.5. $\left(\frac{1}{x+y} + \cos x\cos y - 3x^2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - \sin x\sin y + 4y\right)dy$.

15.6. $\left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right)dy$.

15.7. $(e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} + \sin y)dy$.

15.8. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+2x\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+6y\right)dy\,.$

15.9. $(e^{xy}+xye^{xy}+2)dx+(x^2e^{xy}+1)dy\,.$

15.10. $(ye^{xy}+y^2)dx+(xe^{xy}+2xy)dy\,.$

15.11. $(y\cos(xy)+2x-3y)dx+(x\cos(xy)-3x+4y)dy\,.$

15.12. $(y\sin(x+y)+xy\cos(x+y)-9x^2)dx+$
$+(x\sin(x+y)+xy\cos(x+y)+2y)dy\,.$

15.13. $(5y+\cos x+6xy^2)dx+(5x+6x^2y)dy\,.$

15.14. $(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy\,.$

15.15. $(1+\cos(xy))ydx+(1+\cos(xy))xdy\,.$

15.16. $(y-\sin x)dx+(x-2y\cos y^2)dy\,.$

15.17. $\left(\sin 2x-\dfrac{1}{x^2y}\right)dx-\dfrac{1}{xy^2}\,dy\,.$

15.18. $\dfrac{x+y}{xy}\,dx+\dfrac{y-x}{y^2}\,dy\,.$

15.19. $(20x^3-21x^2y+2y)dx+(3+2x-7x^3)dy\,.$

15.20. $(ye^{xy}-2\sin x)dx+(xe^{xy}+\cos y)dy\,.$

15.21. $y(e^{xy}+5)dx+x(e^{xy}+5)dy\,.$

15.22. $\left(x-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}-y\right)dy\,.$

15.23. $\dfrac{x\ln y+y}{x}\,dx+\dfrac{y\ln x+x}{y}\,dy\,.$

15.24. $e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy\,.$

15.25. $(3x^2-2xy+y)dx+(x-x^2-3y^2-4y)dy\,.$

15.26. $(2xe^{x^2-y^2}-\sin x)dx+(\sin y-2ye^{x^2-y^2})dy\,.$

15.27. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+x^2\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y\right)dy$.

15.28. $\dfrac{1-y}{x^2y}\,dx+\dfrac{1-2x}{xy^2}\,dy$.

15.29. $\left(\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{y}{x-1}^2-2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{y-1}^2+2y\right)dy$.

15.30. $(3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy$.

Завдання 16. Розв'язати задачі.

16.1. Знайти довжину дуги лінії $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in\left[0;\,1\right]$.

16.2. Обчислити момент інерції відносно осей координат відрізка однорідної прямої $2x+y=1$, що знаходиться між цими осями.

16.3. Знайти координати центра мас чверті однорідного кола $x^2+y^2=a^2$, що лежить в першому квадранті.

16.4. Обчислити масу дуги кривої $y=\ln x$, закріпленої між точками, де $x=\sqrt{3}$ та $x=\sqrt{8}$, якщо густина дуги в кожній точці рівна квадрату абсциси цієї точки.

16.5. Обчислити момент інерції відносно осі Oy, дуги напівкубічної параболи $y^2=x^3$, що знаходиться між точками, де $x=0$ та $x=4/3$.

16.6. Обчислити момент інерції відносно початку координат контуру квадрата зі сторонами $x=\pm a$, $y=\pm b$. Щільність квадрата стала.

16.7. Обчислити довжину дуги кривої $x=2-\dfrac{t^2}{4}$, $y=\dfrac{y^6}{6}$, обмеженої точками перетину її з осями координат.

16.8. Обчислити координати центра мас однорідного півкола $x^2 + y^2 = 4$, симетричного відносно осі Ox.

16.9. Знайти площу фігури, обмежену параболою $x = y^2$ та прямою $x = 1$.

16.10. Обчислити роботу сили $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j}$ при переміщенні точки масою m із т. $A(0;\ 0)$ в т. $B(1;\ 1)$ по прямій $y = z$, що лежить в площині yOz.

16.11. Знайти масу чверті еліпса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, розташованого в першому квадранті xOy, якщо лінійна густина маси $\mu = y$.

16.12. Обчислити статистичний момент інерції відносно осей координат дуги астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, яка знаходиться в першому квадранті.

16.13. Обчислити роботу сили $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ при переміщенні матеріальної точки по параболі $y = -6x^2$ від т. $(0;\ 0)$ до т. $(1;\ -6)$.

16.14. Обчислити масу еліпса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, якщо лінійна щільність в кожній точці рівна $2|y|$.

16.15. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

16.16. Обчислити площу фігури обмежену кривою $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, якщо $t \in \left[0;\ 2\pi\right]$.

16.17. Обчислити масу відрізка прямої $y = 2 - x$, закріпленого між координатними осями, якщо лінійна густина в кожній

її точці пропорційна квадрату абсциси цієї точки, а в точці $(2;\ 0)$ рівна 4.

16.18. Знайти статистичний момент відносно осі Oy однорідної дуги першої вітки лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

16.19. Обчислити площу фігури, обмежену кривою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0;\ 2\pi\right]$.

16.20. Обчислити масу дуги кривої $\rho = 3\sin\varphi$, $\varphi \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$, якщо густина в кожній її точці пропорційна відстані до полюса і при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ рівна 3.

16.21. Обчислити масу дуги еліпса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, що лежить в першому квадранті, якщо лінійна густина в кожній його точці рівна добутку координат цієї точки.

16.22. Обчислити роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ від т. $(0;\ 0)$ до т. $(2;\ 2)$.

16.23. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.

16.24. Обчислити роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж дуги кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, по ходу годинникової стрілки.

16.25. Обчислити момент інерції відносно осей координат однорідного відрізка прямої $y = 2x$, закріпленого між точками $(1;\ 2)$ а $(2;\ 4)$.

16.26. Обчислити момент інерції відносно координатних осей чверті кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, що лежить в першому квадранті.

16.27. Обчислити статистичний момент відносно осі Ox однорідної кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

16.28. Обчислити роботу сили $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{j}$ при переміщенні точкової маси m вздовж дуги еліпса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

16.29. Обчислити момент інерції відносно осей координат однорідного відрізка прямої $4x + 2y = 3$, що лежить між точками $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ та $\left(2; -\dfrac{5}{2}\right)$.

16.30. Обчислити масу еліпса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Якщо його лінійна щільність в кожній точці рівна $|y|$.

<u>Завдання 17</u>. Дана функція $u(M) = u(x;\ y;\ z)$ і точки M_1 та M_2. Обчислити: 1) похідну цієї функції в т. M_1 в напрямі вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) градієнт функції $u(x;y;z)$ в точці M_1.

17.1. $u(M) = x^2y + z^2x$, $M_1(1;-1;2)$, $M_2(3;4;-1)$.

17.2. $u(M) = 5xy^3z^2$, $M_1(2;1;-1)$, $M_2(4;-3;0)$.

17.3. $u(M) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M_1(-1;2;1)$, $M_2(3;1;-1)$.

17.4. $u(M) = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_1(0;0;0)$, $M_2(3;-4;2)$.

17.5. $u(M) = \ln(xy + yz + xz)$, $M_1(-2;3;-1)$, $M_2(2;1;-3)$.

17.6. $u(M) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, $M_1(1;1;1)$, $M_2(3;\ 2;\ 1)$.

17.7. $u(M) = x^2y + xz^2 - 2$, $M_1(1;\ 1;\ -1)$, $M_2(2;\ -1;\ 3)$.

17.8. $u(M) = xe^y + ye^x - z^2$, $M_1(3;\ 0;\ 2)$, $M_2(4;\ 1;\ 3)$.

17.9. $u(M) = 3xy^2 + z^2 - xyz$, $M_1(1;1;2)$, $M_2(3;-1;4)$.

17.10. $u(M) = 5x^2yz + xyz^2 + yz^2,\ M_1(1;1;1),\ M_2(9;-3;9).$

17.11. $u(M) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2},\ M_1(1;\ 2;\ 2),\ M_2(-3;2;-1).$

17.12. $u(M) = y^2z - 2xyz + z^2,\ M_1(3;1;-1),\ M_2(-2;1;4).$

17.13. $u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz,\ M_1(1;-1;2),\ M_2(5;-1;4).$

17.14. $u(M) = \ln(1 + x + y^2 + z^2),\ M_1(1;1;1),\ M_2(3;-5;1).$

17.15. $u(M) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5,\ M_1(1;2;1),\ M_2(-3;-2;6).$

17.16. $u(M) = \ln(x^3 + y^3 + z + 1),\ M_1(1;3;0),\ M_2(-4;1;3).$

17.17. $u(M) = x - 2y + e^z,\ M_1(-4;-5;0),\ M_2(2;\ 3;\ 4).$

17.18. $u(M) = x^y - 3xyz,\ M_1(2;\ 2;\ -4),\ M_2(1;\ 0;\ -3).$

17.19. $u(M) = 3x^2yz^3,\ M_1(-2;\ -3;\ 1),\ M_2(5;\ -2;\ 0).$

17.20. $u(M) = e^{xy+z^2},\ M_1(-5;\ 0;\ 2),\ M_2(2;\ 4;\ -3).$

17.21. $u(M) = x^{yz},\ M_1(3;\ 1;\ 4),\ M_2(1;-1;-1).$

17.22. $u(M) = x^2 + y^2 + z^2,\ M_1(1;2;-1),\ M_2(0;-1;3).$

17.23. $u(M) = (x - y)^z,\ M_1(1;\ 5;\ 0),\ M_2(3;\ 7;\ -2).$

17.24. $u(M) = x^2y + y^2z - 3z,\ M_1(0;-2;-1),\ M_2(12;-5;0).$

17.25. $u(M) = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1},\ M_1(-1;2;-2),\ M_2(2;0;1).$

17.26. $u(M) = \ln(1 + x^2 - y^2 + z^2),\ M_1(1;1;1),\ M_2(5;-4;8).$

17.27. $u(M) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x},\ M_1(-1;1;1),\ M_2(2;3;4).$

17.28. $u(M) = x^3 + xy^2 - 6xyz,\quad M_1(1;3;-5),\ M_2(4;2;-2).$

17.29. $u(M) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z} - \dfrac{x}{z},\ M_1(2;2;2),\ M_2(-3;4;1).$

17.30. $u(M) = e^{x-yz},\ M_1(1;0;3),\ M_2(2;-4;5).$

<u>Завдання 18</u>. Обчислити поверхневі інтеграли I роду по поверхні S, де S - частина площини (p), обмежена координатними площинами.

18.1. $\iint\limits_S (2x + 3y + 2z)dS,$ $(p)\colon\ x + 3y + z = 3.$

18.2. $\iint\limits_S (2 + y - 7x + 9z)dS,$ $(p)\colon\ 2x - y - 2z = -2.$

18.3. $\iint\limits_S (6x + y + 4z)dS,$ $(p)\colon\ 3x + 3y + z = 3.$

18.4. $\iint\limits_S (x + 2y + 3z)dS,$ $(p)\colon\ x + y + z = 2.$

18.5. $\iint\limits_S (3x - 2y + 6z)dS,$ $(p)\colon\ 2x + y + 2z = 2.$

18.6. $\iint\limits_S (2x + 5y - z)dS,$ $(p)\colon\ x + 2y + z = 2.$

18.7. $\iint\limits_S (5x - 8y - z)dS,$ $(p)\colon\ 2x - 3y + z = 6.$

18.8. $\iint\limits_S (3y - x - z)dS,\ (p)\colon\ x - y + z = 2.$

18.9. $\iint\limits_S (3y - 2x - 2z)dS,$ $(p)\colon\ 2x - y - 2z = -2.$

18.10. $\iint\limits_S (2x - 3y + z)dS,$ $(p)\colon\ x + 2y + z = 2.$

18.11. $\iint\limits_S (5x + y - z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + 2y + 2z = 2\,.$

18.12. $\iint\limits_S (3x + 2y + 2z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 3x + 2y + 2z = 6\,.$

18.13. $\iint\limits_S (2x + 3y - z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 2x + y + z = 2\,.$

18.14. $\iint\limits_S (9x + 2y + z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 2x + y + z = 4\,.$

18.15. $\iint\limits_S (3x + 8y + 8z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + 4y + 2z = 8\,.$

18.16. $\iint\limits_S (4y - x + 4z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x - 2y + 2z = 2\,.$

18.17. $\iint\limits_S (7x + y + 2z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 3x - 2y + 2z = 6\,.$

18.18. $\iint\limits_S (2x + 3y + z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 2x + 3y + z = 6\,.$

18.19. $\iint\limits_S (4x - y + z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x - y + z = 2\,.$

18.20. $\iint\limits_S (6x - y + 8z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + y + 2z = 2\,.$

18.21. $\iint\limits_S (4x - 4y - z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + 2y - z = 4\,.$

18.22. $\iint\limits_S (2x + 5y + z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + y + 2z = 2\,.$

18.23. $\iint\limits_S (4x - y + 4z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 2x + 2y + z = 4\,.$

18.24. $\iint\limits_S (5x + 2y + 2z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + 2y + z = 2\,.$

18.25. $\iint\limits_S (2x + 5y + 10z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 2x + y + 3z = 6\,.$

18.26. $\iint\limits_S (2x + 15y + z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + 2y + 2z = 2\,.$

18.27. $\iint\limits_S (3x + 10y - z)dS\,, \qquad (p)\colon\ x + 3y + 2z = 6\,.$

18.28. $\iint\limits_S (2x + 3y + z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 2x + 2y + z = 2\,.$

18.29. $\iint\limits_S (5x - y + 5z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 3x + 2y + z = 6\,.$

18.30. $\iint\limits_S (x + 3y + 2z)dS\,, \qquad (p)\colon\ 2x + y + 2z = 2\,.$

Завдання 19. Обчислити поверхневі інтеграли II роду.

19.1. $\iint\limits_S (y^2 + z^2)dy\,dz$, де S - частина поверхні параболоїда $x = 9 - y^2 - z^2$, обмежена площиною $x = 0$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює гострий кут з ортом $\mathbf{i}$).

19.2. $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона поверхні еліпсоїда $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

19.3. $\iint\limits_S z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz$, де S - зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

19.4. $\iint\limits_S (z + 1)dx\,dy$, де S - зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

19.5. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + xz\,dx\,dz + xy\,dx\,dy$, де S - верхня сторона площини $x + y + z = 4$, обмежена координатними площинами.

19.6. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2 dx\,dz + z^2\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, яка лежить в першому октанті.

19.7. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19.8. $\iint\limits_S xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz$, де S - верхня площина $x + y + z = 1$, обмежена координатними площинами.

19.9. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz$, де S - зовнішня поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 1$, обмежена площинами $z = 0$, $z = 5$.

19.10. $\iint\limits_S y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dx\,dz$, де S - частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 1$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.11. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)z\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

19.12. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + x^2 dx\,dy$, де S - частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, яка лежить між площинами $z = 0$, $z = 1$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.13. $\iint\limits_S (2y^2 - z)dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмежена площиною $z = 2$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.14. $\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, де S - частина поверхні гіперболоїда $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, обмежена площиною $z = 0$, $z = \sqrt{3}$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.15. $\iint\limits_S xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz + xz\,dx\,dy$, де S - зовнішня частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка лежить в першому .

19.16. $\iint\limits_S x^2 dy\,dz + z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмежена площиною $z = 4$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.17. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, обмежена площинами $z = 0$, $z = 3$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює гострий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.18. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz - z^2\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z = 3 - x^2 - y^2$, обмежена площиною $z = 0$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює гострий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.19. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz - x^2\,dx\,dz - y^2\,dx\,dy$, де S - частина поверхні конуса $x^2 + y^2 = y^2$, обмежена площинами $y = 0$, $y = 1$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{j}$).

19.20. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + 2y^2\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмежена площиною $z = 1$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює гострий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.21. $\iint\limits_S 2x\,dy\,dz + (1 - z)dx\,dy$, де S - внутрішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = 4$, обмежена площинами $z = 0$, $z = 1$.

19.22. $\iint\limits_S 2x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона замкненої поверхні, утвореної параболоїдом $3z = x^2 + y^2$ та сферою $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

19.23. $\iint\limits_S 4x\,dy\,dz + 2y\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

19.24. $\iint\limits_S (x + z)dy\,dz + (z + y)dx\,dy$, де S - зовнішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, обмежена площинами $z = 0$, $z = 2$.

19.25. $\iint\limits_S 3x\,dy\,dz - y\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $9 - z = x^2 + y^2$, обмежена площиною $z = 0$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює гострий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.26. $\iint\limits_S (y-x)dy\,dz + (z-y)dx\,dz + (x-z)dx\,dy$, де S - внутрішня сторона замкненої поверхні, утвореної конусом $x^2 = y^2 + z^2$ і площиною $x = 1$.

19.27. $\iint\limits_S 3x^2\,dy\,dz - y^2\,dx\,dz - z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $1 - z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює гострий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.28. $\iint\limits_S (1+2x^2)dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, де S - частина поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, обмежена площинами $z = 0$, $z = 4$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.29. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + z^2\,dx\,dz + y\,dx\,dy$, де S - частина поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 4 - z$, обмежена площиною $z = 0$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює гострий кут з ортом $\mathbf{k}$).

19.30. $\iint\limits_S (y^2+z^2)dy\,dz - y^2\,dx\,dz + 2yz^2\,dx\,dy$, де S - частина поверхні $x^2 + z^2 = y^2$, обмежена площинами $y = 0$ і $y = 1$ (нормальний вектор $\mathbf{n}$ утворює тупий кут з ортом $\mathbf{k}$).

<u>Завдання 20</u>. Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити потік векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, утвореною площиною (p) і координатними площинами.

20.1. $\mathbf{a}(M) = 3x\,\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (x-z)\mathbf{k}$,

$(p) : x + 3y + z = 3$.

20.2. $\mathbf{a}(M) = (3x-1)\mathbf{i} + (y-x+z)\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 2x - y - 2z = 2\,.$

20.3. $\mathbf{a}(M) = x\,\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 3x + 3y + z = 3\,.$

20.4. $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x+2y+z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + y - z = 2\,.$

20.5. $\mathbf{a}(M) = (y+2z)\mathbf{i} + (x+2z)\mathbf{j} + (x-2y)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 2x + y + 2z = 2\,.$

20.6. $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + (x+y-z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + 2y + z = 2\,.$

20.7. $\mathbf{a}(M) = (3x-y)\mathbf{i} + (2y+z)\mathbf{j} + (2z-x)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 2x - 3y + z = 6\,.$

20.8. $\mathbf{a}(M) = (2y+z)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x - y + z = 2\,.$

20.9. $\mathbf{a}(M) = (x+y)\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + (y-z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 2x - y - 2z = -2\,.$

20.10. $\mathbf{a}(M) = (x+y-z)\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + (x+2z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + 2y + z = 2\,.$

20.11. $\mathbf{a}(M) = (y-z)\mathbf{i} + (2x+y)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 2x + y + z = 2\,.$

20.12. $\mathbf{a}(M) = x\,\mathbf{i} + (y-2z)\mathbf{j} + (2x-y+2z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + 2y + 2z = 2\,.$

20.13. $\mathbf{a}(M) = (x + 2z)\mathbf{i} + (y - 3z)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : 3x + 2y + 2z = 6\,.$

20.14. $\mathbf{a}(M) = 4x\,\mathbf{i} + (x - y - z)\mathbf{j} + (3y + 2z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 2x + y + z = 4\,.$

20.15. $\mathbf{a}(M) = (2z - x)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : x + 4y + 2z = 8\,.$

20.16. $\mathbf{a}(M) = 4z\,\mathbf{i} + (x - y - z)\mathbf{j} + (3y + z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : x - 2y + 2z = 2\,.$

20.17. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + 2(z + x)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 3x - 2y + 2z = 6\,.$

20.18. $\mathbf{a}(M) = (x + y + z)\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + (y - 7z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 2x + 3y + z = 6\,.$

20.19. $\mathbf{a}(M) = (2x - z)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + (x + 2z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : x - y + z = 2\,.$

20.20. $\mathbf{a}(M) = (2y - z)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : x + 2y + 2z = 4\,.$

20.21. $\mathbf{a}(M) = (2z - x)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (3x + z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : x + y + 2z = 2\,.$

20.22. $\mathbf{a}(M) = (x + z)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : x + y + 2z = 2\,.$

20.23. $\mathbf{a}(M) = (x + z)\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + (2x - y)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 2x + 2y + z = 4\,.$

20.24. $\mathbf{a}(M) = (3x + y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,

$(p) : x + 2y + z = 2$.

20.25. $\mathbf{a}(M) = (y + z)\mathbf{i} + (2x - z)\mathbf{j} + (y + 3z)\mathbf{k}$,

$(p) : 2x + y + 3z = 6$.

20.26. $\mathbf{a}(M) = (y + z)\mathbf{i} + (x + 6y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,

$(p) : x + 2y + 2z = 2$.

20.27. $\mathbf{a}(M) = (2y - z)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,

$(p) : x + 3y + 2z = 6$.

20.28. $\mathbf{a}(M) = (y + z)\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + (y - 2z)\mathbf{k}$,

$(p) : 2x + 2y + z = 2$.

20.29. $\mathbf{a}(M) = (x + z)\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + (2x - y)\mathbf{k}$,

$(p) : 3x + 2y + z = 6$.

20.30. $\mathbf{a}(M) = z\,\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,

$(p) : 2x + y + 2z = 2$.

Завдання 21. Використовуючи формулу Стокса, обчислити циркуляцію векторного поля $\mathbf{a}(M)$ по контуру трикутника, отриманого внаслідок перетину площини $(p) : Ax + By + Cz + D = 0$ з координатними осями, при додатному напрямі обходу відносно нормального вектора $\mathbf{n}(A,\ B,\ C)$ цієї площини.

21.1. $\mathbf{a}(M) = z\,\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,

$(p) : 2x + y + 2z = 2$.

21.2. $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + (2x-y)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 3x + 2y + z = 6\,.$

21.3. $\mathbf{a}(M) = (y+z)\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + (y-2z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 2x + 2y + z = 2\,.$

21.4. $\mathbf{a}(M) = (2y-z)\mathbf{i} + (x+2y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + 3y + 2z = 6\,.$

21.5. $\mathbf{a}(M) = (y+z)\mathbf{i} + (x+6y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + 2y + 2z = 2\,.$

21.6. $\mathbf{a}(M) = (y+z)\mathbf{i} + (2x-z)\mathbf{j} + (y+3z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, 2x + y + 3z = 6\,.$

21.7. $\mathbf{a}(M) = (3x+y)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + 2y + z = 2\,.$

21.8. $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + (2x-y)\mathbf{k}\,,$

$p\;\;:\, 2x + 2y + z = 4\,.$

21.9. $\mathbf{a}(M) = (x+z)\mathbf{i} + (x+3y)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,,$

$p\;\;:\, x + y + 2z = 2\,.$

21.10. $\mathbf{a}(M) = (2y-z)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + 2y + 2z = 4\,.$

21.11. $\mathbf{a}(M) = (2z-x)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + (3x+z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x + y + 2z = 2\,.$

21.12. $\mathbf{a}(M) = (2x-z)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j} + (x+2z)\mathbf{k}\,,$

$(p)\,:\, x - y + z = 2\,.$

21.13. $\mathbf{a}(M) = (x + y + z)\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + (y - 7z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 2x + 3y + z = 6\,.$

21.14. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + 2(z + x)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 3x - 2y + 2z = 6\,.$

21.15. $\mathbf{a}(M) = 4z\,\mathbf{i} + (x - y - z)\mathbf{j} + (3y + z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : x - 2y + 2z = 2\,.$

21.16. $\mathbf{a}(M) = (2z - x)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : x + 4y + 2z = 8\,.$

21.17. $\mathbf{a}(M) = 4x\,\mathbf{i} + (x - y - z)\mathbf{j} + (3y + 2z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 2x + y + z = 4\,.$

21.18. $\mathbf{a}(M) = (x + 2z)\mathbf{i} + (y - 3z)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : 3x + 2y + 2z = 6\,.$

21.19. $\mathbf{a}(M) = x\,\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (2x - y + 2z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : x + 2y + 2z = 2\,.$

21.20. $\mathbf{a}(M) = (y - z)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : 2x + y + z = 2\,.$

21.21. $\mathbf{a}(M) = (x + y - z)\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + (x + 2z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : x + 2y + z = 2\,.$

21.22. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + (y - z)\mathbf{k}\,,$

$(p) : 2x - y - 2z = -2\,.$

21.23. $\mathbf{a}(M) = (2y + z)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} - 2z\,\mathbf{k}\,,$

$(p) : x - y + z = 2\,.$

21.24. $\mathbf{a}(M) = (3x - y)\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (2z - x)\mathbf{k}$,

$(p) : 2x - 3y + z = 6$.

21.25. $\mathbf{a}(M) = (x + z)\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + (x + y - z)\mathbf{k}$,

$(p) : x + 2y + z = 2$.

21.26. $\mathbf{a}(M) = (y + 2z)\mathbf{i} + (x + 2z)\mathbf{j} + (x - 2y)\mathbf{k}$,

$(p) : 2x + y + 2z = 2$.

21.27. $\mathbf{a}(M) = (x + z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x + 2y + z)\mathbf{k}$,

$(p) : x + y - z = 2$.

21.28. $\mathbf{a}(M) = x\,\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k}$,

$(p) : 3x + 3y + z = 3$.

21.29. $\mathbf{a}(M) = (3x - 1)\mathbf{i} + (y - x + z)\mathbf{j} + 4z\,\mathbf{k}$,

$(p) : 2x - y - 2z = 2$.

21.30. $\mathbf{a}(M) = 3x\,\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$,

$(p) : x + 3y + z = 3$.

Завдання 22. Перевірити чи буде векторне поле $\mathbf{a}(M)$: соленоїдним, потенціальним, гармонійним.

22.1. $\mathbf{a}(M) = (\alpha - \beta)x\,\mathbf{i} + (\gamma - \alpha)y\,\mathbf{j} + (\beta - \gamma)z\,\mathbf{k}$, де α, β, γ - const.

22.2. $\mathbf{a}(M) = x^2y\mathbf{i} - 2xy^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$.

22.3. $\mathbf{a}(M) = (yz - 2x)\mathbf{i} + (xz + 2y)\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$.

22.4. $\mathbf{a}(M) = (x^2 - z^2)\,\mathbf{i} - 3xy\,\mathbf{j} + (y^2 + z^2)\mathbf{k}$.

22.5. $\mathbf{a}(M) = 2xyz\mathbf{i} - y(yz + 1)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

22.6. $\mathbf{a}(M) = (2x - 3y)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}\,.$

22.7. $\mathbf{a}(M) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + (z^2 - x^2)\mathbf{k}\,.$

22.8. $\mathbf{a}(M) = yz\,\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}\,.$

22.9. $\mathbf{a}(M) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}\,.$

22.10. $\mathbf{a}(M) = 3x^2y\,\mathbf{i} - 2xy^2\mathbf{j} - 2xyz\,\mathbf{k}\,.$

22.11. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} - 2(y + z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}\,.$

22.12. $\mathbf{a}(M) = (yz - 2x)\mathbf{i} + (xz + zy)\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}\,.$

22.13. $\mathbf{a}(M) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}\,.$

22.14. $\mathbf{a}(M) = 6xy\,\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,.$

22.15. $\mathbf{a}(M) = (2x - yz)\mathbf{i} + (2x - xy)\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}\,.$

22.16. $\mathbf{a}(M) = (y - z)\mathbf{i} + 3xyz\,\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}\,.$

22.17. $\mathbf{a}(M) = (y - z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}\,.$

22.18. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} - 3(y + z)\mathbf{k}\,.$

22.19. $\mathbf{a}(M) = z^2\mathbf{i} + (xz + y)\mathbf{j} + x^2y\,\mathbf{k}\,.$

22.20. $\mathbf{a}(M) = xy(3x - 4y)\mathbf{i} + x^2(x - 4y)\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}\,.$

22.21. $\mathbf{a}(M) = 6x^2\mathbf{i} + 3\cos(3x + 2z)\mathbf{j} + \cos(3y + 2z)\mathbf{k}\,.$

22.22. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + 2(x + z)\mathbf{k}\,.$

22.23. $\mathbf{a}(M) = 3(x - z)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}\,.$

22.24. $\mathbf{a}(M) = (2x - yz)\mathbf{i} + (xz - 2y)\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}\,.$

22.25. $\mathbf{a}(M) = 3x^2\mathbf{i} + 4(x - y)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}\,.$

22.26. $\mathbf{a}(M) = x^2z\,\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}\,.$

22.27. $\mathbf{a}(M) = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}\,.$

22.28. $\mathbf{a}(M) = \dfrac{x}{y}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{z}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{x}\,\mathbf{k}\,.$

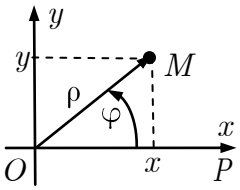
22.29. $\mathbf{a}(M) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}\,.$

22.30. $\mathbf{a}(M) = (y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}\,.$

Додатки

Додаток А. Основні формули

Перехід до полярних координат



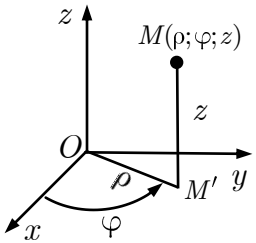
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ |J| = \rho. \end{cases} \qquad \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2} \tag{A.1}$$

$(\rho \geq 0, \varphi \in [-\pi; \pi])$

Перехід до узагальнених полярних координат

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2} \qquad \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \\ |J| = ab\rho \end{cases} \tag{A.2}$$

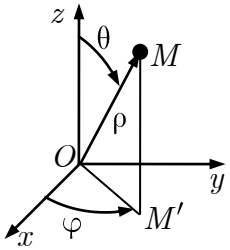
Перехід до циліндричних координат



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \\ |J| = \rho. \end{cases} \qquad \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2} \tag{A.3}$$

$(\rho \geq 0, \varphi \in [-\pi; \pi])$

Перехід до сферичних координат



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta, \\ |J| = \rho^2\sin\theta. \end{cases} \qquad \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2} \tag{A.4}$$

$(\rho \geq 0, \varphi \in [-\pi;\pi],\ \theta \in [0;\pi])$

Перехід до узагальнених сферичних координат

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2} \qquad \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c\rho\cos\theta, \\ |J| = abc\rho^2\sin\theta. \end{cases} \tag{A.5}$$

Диференціал дуги

$$L : y = y(x); dl = \sqrt{1 + {y'}^2}dx; \tag{A.6}$$

$$L : x = x(t), y = y(t), z = z(t); \qquad dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt; \tag{A.7}$$

$$L : \rho = \rho(\varphi); dl = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\varphi. \tag{A.8}$$

Диференціал поверхні

$$\Omega : z = z(x,y); dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy. \tag{A.9}$$

Похідна за напрямком

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad \mathbf{l^0} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma). \tag{A.10}$$

Градієнт

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{A.11}$$

Дивергенція векторного поля $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = (P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z))$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{A.12}$$

Ротор векторного поля $\mathbf{a}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{A.13}$$

Потік векторного поля $\mathbf{a}$

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n^0} dS = \iint\limits_{\Omega} P dydz + Q dxdz + R dxdy. \tag{A.14}$$

Циркуляція векторного поля $\mathbf{a}$

$$C = \oint\limits_{L} P dx + Q dy + R dz. \tag{A.15}$$

Формула Остроградського — Ґріна

$$\oint\limits_{L} P dx + Q dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{A.16}$$

Формула Остроградського — Ґауса

$$\oiint\limits_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n^0} dS = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \mathbf{a} dxdydz = \\ = \oiint\limits_{\Omega} P dydz + Q dxdz + R dxdy. \tag{A.17}$$

Формула Стокса

$$\oint\limits_{L} P dx + Q dy + R dz = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n^0} dS. \tag{A.18}$$

Диференціальні операції

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{k};$$
$$\nabla U = \operatorname{grad} U; \nabla \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{a}; \nabla \times \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{a}; \tag{A.19}$$
$$\nabla \cdot \nabla \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \nabla \times \nabla = 0;$$

$$\nabla\ (\varphi + \phi\ ) = \nabla\varphi + \nabla\phi \text{ або}$$
$$\operatorname{grad}(\varphi + \phi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\phi \tag{A.20}$$

$$\nabla, \vec{a} + \vec{b}\ =\ \nabla, \vec{a}\ +\ \nabla, \vec{b}\ \text{ або}$$
$$\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b} \tag{A.21}$$

$$\left[\nabla, \vec{a} + \vec{b}\right] = \nabla, \vec{a}\ + \left[\nabla, \vec{b}\right] \text{ або}$$
$$\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{rot}\vec{b} \tag{A.22}$$

$$\nabla\ \varphi\phi\ = \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi \text{ або}$$
$$\operatorname{grad}(\varphi\phi) = \phi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\phi \tag{A.23}$$

$$\nabla, \varphi\vec{a}\ =\ \vec{a}, \nabla\varphi\ + \varphi\ \nabla, \vec{a}\ \text{ або}$$
$$\operatorname{div}\varphi\vec{a}\ =\ \vec{a}, \operatorname{grad}\varphi\ + \varphi \operatorname{div}\vec{a} \tag{A.24}$$

$$\nabla, \varphi\vec{a}\ = \varphi\ \nabla, \vec{a}\ +\ \nabla\varphi, \vec{a}\ \text{ або}$$
$$\operatorname{rot}\ \varphi\vec{a}\ = \varphi \operatorname{rot}\vec{a} +\ \operatorname{grad}\varphi, \vec{a} \tag{A.25}$$

Додаток Б. ***Таблиця 1.*** **Застосування інтегралів (за геометричними об'єктами)**

Об'єкт	**Тип інтеграла**	**Геометричне застосування** 1	**Фізичне застосування** 2
Область на площині	Подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$	Площа області D $S(D)=\iint\limits_D dxdy$	Маса пластинки D $m(D)=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$
Просторова область	Потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$	Об'єм тіла G $V(G)=\iiint\limits_G dxdydz$	Маса тіла G $m(G)=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz$
Крива	Криволінійний інтеграл I роду $\int\limits_L f(x,y,z)dl$	Довжина кривої L $l(L)=\int\limits_L dl$	Маса кривої L $m(L)=\int\limits_L \mu(x,y,z)dl$
Крива	Криволінійний інтеграл II роду $\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$	Площа плоскої фігури $S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$	Робота змінної сили $\mathbf{F}=(P;Q;R)$ $A=\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$
Поверхня	Поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_\Omega f(x,y,z)dS$	Площа поверхні Ω $S(\Omega)=\iint\limits_\Omega dS$	Маса поверхні Ω $m(\Omega)=\iint\limits_\Omega \mu(x,y,z)d\Omega$
Поверхня	Поверхневий інтеграл II роду $\iint\limits_\Omega Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$	Об'єм тіла $V=$ $\frac{1}{3}\oiint\limits_\Omega xdydz+ydxdz+zdxdy$	Потік поля $a=(P;Q;R)$ крізь Ω $\Pi_\Omega=\iint\limits_\Omega Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$

Таблиця 2. **Застосування інтегралів (до геометрії мас)**

Об'єкт	Статичні моменти, координати центра мас	Моменти інерції
Область на площині	$M_{\begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix}} = \iint\limits_D \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \mu(x,y)dxdy$ $x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}$	$I_{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}} = \iint\limits_D \begin{Bmatrix} y^2 \\ x^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y)dxdy$ $I_O = I_x + I_y = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy$
Просторова область	$M_{\begin{Bmatrix} Oxy \\ Oyz \\ Oxz \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_V \begin{Bmatrix} z \\ x \\ y \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz$ $x_c = \frac{M_{Oyz}}{m}, y_c = \frac{M_{Oxz}}{m}, z_c = \frac{M_{Oxy}}{m}$	$I_{\begin{Bmatrix} Oxy \\ Oyz \\ Oxz \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_V \begin{Bmatrix} z^2 \\ x^2 \\ y^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz$ $I_{\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}} = \iiint\limits_V \begin{Bmatrix} y^2+z^2 \\ x^2+z^2 \\ x^2+y^2 \end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dxdydz$ $I_O = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$
Крива	$M_y = \int\limits_L x\mu(x,y)dl, M_x = \int\limits_L y\mu(x,y)dl$ $x_c = \frac{M_y}{m}, y_c = \frac{M_x}{m}$	$I_y = \int\limits_L x^2\mu(x,y)dl, I_x = \int\limits_L y^2\mu(x,y)dl$ $I_O = \int\limits_L (x^2+y^2)\mu(x,y)dl$

Таблиця 2. (продовження)

Об'єкт	Статичні моменти, координати центра мас	Моменти інерції
Поверхня	$M_{\begin{Bmatrix}Oxy\\Oyz\\Oxz\end{Bmatrix}} = \iint\limits_{\Omega} \begin{Bmatrix}z\\x\\y\end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dS$ $x_o = \frac{M_{Oyz}}{m}, y_o = \frac{M_{Oxz}}{m}, z_o = \frac{M_{Oxy}}{m}$	$I_{\begin{Bmatrix}Oxy\\Oyz\\Oxz\end{Bmatrix}} = \iint\limits_{\Omega} \begin{Bmatrix}z^2\\x^2\\y^2\end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dS$ $I_{\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}} = \iint\limits_{\Omega} \begin{Bmatrix}y^2+z^2\\x^2+z^2\\x^2+y^2\end{Bmatrix} \mu(x,y,z)dS$ $I_O = \iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS$

Примітка: 1) $\mu = \mu(x,y,z)$ — густина; 2) x_o, y_o, z_o — координати центра мас; 3) I_O — момент інерції відносно початку координат; 4) I_x, I_y, I_z — моменти інерції відносно осі; 5) $I_{Oxy}, I_{Oyz}, I_{Oxz}$ — моменти інерції відносно координатних площин; 6) у формулі для моментів з фігурними дужками, вираз під інтегралом треба вибирати відповідно до індексу моменту.

Список рекомендованої літератури

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. посіб. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.
2. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: У 2 ч. — К.: Техніка, 2000. — Ч. 1. — 591 с.; Ч. 2. — 791 с.
3. Вища математика: Зб. задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.
4. Беспальчук В. І., Головня Р. М., Івахненкова В. В. та інші. Збірник задач з математики: у 3-х ч. – Ч. 3. – Житомир: ЖДТУ, 2002. – 156 с.
5. Шкіль М.І. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник – Либідь, 1994. − Кн.3.
6. Лісова Т.В. Інтегральне числення функцій багатьох змінних: Навч.-метод. посібник – Ніжин: Ред.-видав. Відділ НДПУ, 2000.
7. Вища математика. Основні розділи: підручник / За ред. Г.Л.Кулініча – К.: Либідь, 1995.-Кн.1.
8. Грималюк В.П. Вища математика, ч.2 / В.П. Грималюк, М.М. Кухарчук, В.В. Ясинський − К.: «Віпол», 2004.
9. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Теорія поля. Диференціальні рівняння: Метод. вказівки до виконання типової розрахункової роботи для студентів І курсу технічних факультетів: Л. Б. Федорова, Н. Р. Коновалова, І. В. Алєксєєва та ін. — К.: ІВЦ „Політехніка”, 2003. — 45 с.
10. Михайленко В. В., Добряков Л. Д., Головня Р.М. Вища математика. Книга 2. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних: Навч. посібн. – Житомир: ЖДТУ, 2012. – 576 с.