МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

Збірник задач з аналітичної геометрії

Навчальний посібник
для проведення практичних занять з дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра»

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою

«Бакалавр» спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Електронне мережне навчальне видання

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Укладачі: Сущук-Слюсаренко В.І., старший викладач

Бухтияров Ю.В., старший викладач

. Жабіна В.В, доцент, к.т.н.

Дрозденко Л.В., асистент

Рецензент: Тарасенко-Клятченко О.В., к.т.н., доц., ФПМ, кафедра СПіСКС

Відповідальний редактор: Тарасенко-Клятченко О.В., к.т.н., доц.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

(протокол №3 від 27.01.2022 р.)

за поданням Вченої ради ФПМ (протокол №5 від 28.12.2021 р.)

Збірник задач з аналітичної геометрії: навч. посібник для проведення практичних занять з дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»/ В. І. Сущук-Слюсаренко, Ю.В. Бухтіяров, В.В.Жабіна, Л.В.Дрозденко : КПІ ім.Ігоря Сікорського.-Електронні текстові данні (1 файл: Мбайт). – Київ : КПІ ім.Ігоря Сікорського, 2021. – 135с.

Навчальний посібник розроблено для більш детального ознайомлення студентів з теоретичними відомостями та практичними прийомами аналітичної геометрії, а також як посібник для використання на практичних заняттях і для самостійної роботи студентів в процесі підготовки до самостійних і контрольних робіт тощо. Навчальний посібник містить приклади застосування методів аналітичної геометрії в різних галузях знань, подані короткі теоретичні матеріали, які стосуються теми, наведено приклади розв’язання типових задач. Велика кількість задач дозволяє сформовувати достатню кількість різних варіантів під час проведення самостійних робіт і як домашню роботу. Збірник задач призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення» факультету прикладної математики «КПІ» ім.Ігоря Сікорського.

Вступ

Навчальний посібник для самостійної та дистанційної роботи студентів з дисципліни «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» містить велику кількість задач з розділу Аналітична геометрія. Враховуючи дистанційні умови навчання, основні типові задачі в посібнику подано з поясненнями. Крім того, до посібника увійшли приклади розв'язання типових задань з розрахункової роботи. Основним об'єктом вивчення аналітичної геометрії є криві та поверхні другого порядка на основі векторної алгебри та матричного числення. Дослідження об'єктів аналітичної геометрії – це широко вживаний математичний апарат. Застосування аналітичної геометрії не вичерпується лише векторною та матричною алгебрами. Опанування методами розв'язання задач аналітичної геометрії дозволяє знайти зв'язок між віддаленими розділами математики, фізики, механіки та ін.

До методичного посібника включено як типові завдання (рівняння прямої на площині та в просторі, рівняння площин та її взаємне розташування, криві та поверхні другого порядка), так і поняття поглибленого вивчення, зокрема дослідження кривих і поверхонь.

Методичний посібник містить інформацію, яка сприяє більш детальному та поглибленому засвоєнню матеріала.

Тема 1. Аналітична геометрія на площині

Короткі теоретичні відомості і приклади

Будь-яка пряма на площині є алгебраїчною кривою першого порядку і будь-яка алгебраїчна крива першого порядку на площині є прямою.

Рівняння виду $ax+by+c=0$, $\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ називають **загальним рівнянням прямої.** Коефіцієнти a і b в загальному рівнянні прямої мають простий геометричний зміст. Це координати вектора, який перпендикулярний прямій. Такий вектор називають **вектором нормалі прямої** $\vec{n}=\left(a,b\right)$.

Нехай пряма L задана рівнянням $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$. Якщо точка $M_0(x_0;y_0)$ належить прямій L, то її координати задовольняють рівнянню, тобто $ax_0+by_0+c=0$. В будь-якій точці $M_1(x_1;y_1)$, яка не належить прямій L, значення лівої частини рівняння $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ дорівнює

$$ax_1+by_1+c=ax_1+by_1-ax_0-by_0=a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M_1}\right)\neq 0$$

Знак скалярного добутку $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_0M_1}\right)$ визначається кутом між вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ і нормальним вектором прямої $\vec{n}$. Якщо точки M_1 і M_2 розташовані по одну сторону від прямої L (рис. 2) то, підставивши їх координати в ліву частину рівняння $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$, отримаємо значення з одним знаком. Якщо така підстановка координат точок M_1 і M_2 призводить до значень із різними знаками, то ці точки лежать по різні сторони від прямої L (рис. 1).

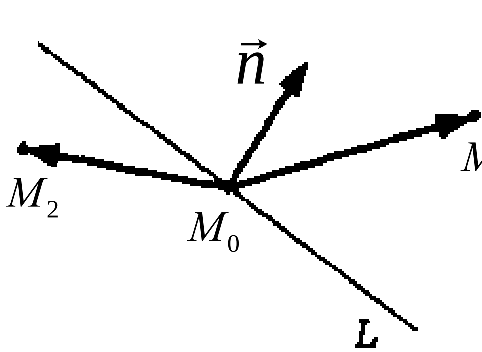


Рис. 1.

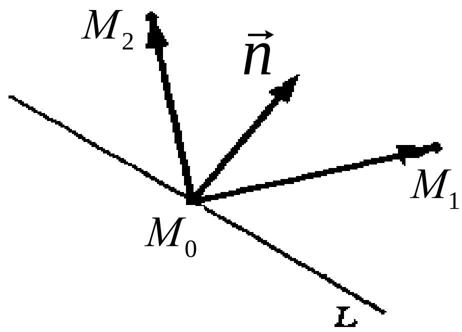


Рис. 2.

Приклад 1. З'ясувати, як по відношенню до прямої $3x-4y+5=0$ розташовані точки $A(4,4)$ і $B(6,6)$.

Розв'язання. Підставимо координати точки A в ліву частину загального рівняння прямої, отримаємо (+1), а підстановка координат точки B призводить до числа (-1). Отже, точки A та B розташовані по різні боки від даної прямої ►

Рівняння $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ дозволяє за координатами точки на прямій L і координатам вектора нормалі прямої L записати рівняння прямої без додаткових обчислень.

Приклад 2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1,4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(1,-3)$.

Розв'язання. Запшемо загальне рівняння шуканої прямої : $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0;\ 1(x+1)+(-3)(y-4)=0 \Leftrightarrow x-3y+13=0$ ►

Спеціальні види рівняння прямої

Крім загального рівняння прямої на площині часто використовують інші види рівнянь: кожному виду рівняння відповідає свій геометричний зміст коефіцієнтів. Зафіксуємо на площині прямокутну систему координат *Oxy*.

1. Рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння виду $y = kx + b$ називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**. Параметр k (*кутовий коефіцієнт*) прямої дорівнює тангенсу кута нахилу прямої. Параметр b дорівнює ординаті точки перетину прямої з віссю *Oy*.

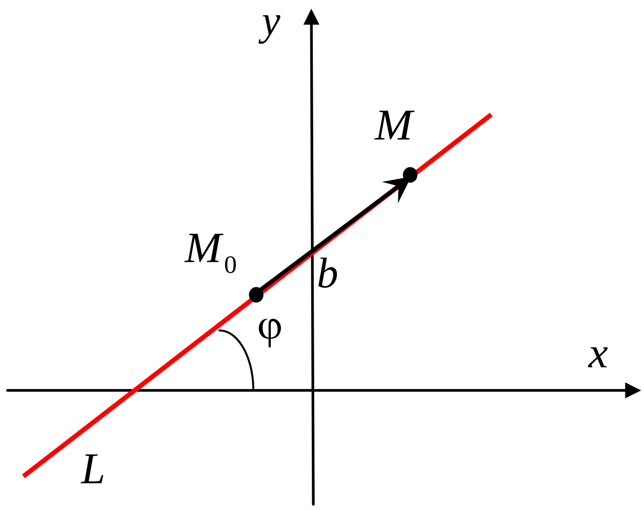


Рис. 3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Приклад 3. Записати рівняння прямої $3x + 5y - 15 = 0$ як рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання. $3x + 5y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{5}x + 3 \Rightarrow k = -\dfrac{3}{5}$ ►

2. Векторне і параметричне рівняння прямої

Визначимо пряму L на площині точкою $M_0(x_0;y_0)\in L$ і ненульовим вектором $\vec{s}=(l,m)$, який паралельний L. Такий вектор $\vec{s}$ називають **напрямним вектором** прямої L (рис.4).

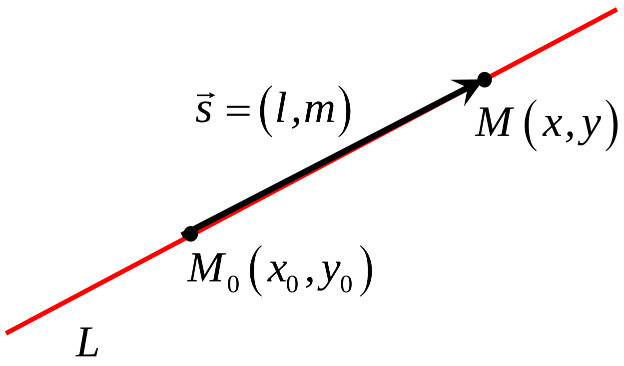


Рис. 4. Векторне і параметричне рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}.$$

Це рівняння називають **параметричними рівняннями прямої.**

Якщо рівність $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{s}$ записати через радіус-вектори $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ точок M_0 і M відповідно, то в результаті отримаємо **векторне рівняння прямої**

$$\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s} \text{ або } \vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}.$$

Приклад 4. Пряма проходить через точку $M_0(-1,4)$ паралельно вектору $\vec{s}=(-2;3)$. Написати параметричне рівняння цієї прямої.

Розв'язання. $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}; \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 4+3t \end{cases}$ ►

3. Канонічне рівняння прямої

Колінеарність векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ еквівалентна рівності відношення їх однойменних координат:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$

Це рівняння називають **канонічним рівнянням прямої**.

Приклад 5. Пряма проходить через точку $M_0\left(-2,1\right)$ паралельно прямій $3x+5y-15=0$. Скласти рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Вектор нормалі заданої прямої $\vec{n}=\left(3;5\right)$. Будь-який вектор, який ортогональний заданому буде напрямним вектором заданої прямої і шуканої, наприклад $\vec{s}=\left(-5;3\right)$. Тоді шукане рівняння: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$;

$\dfrac{x+2}{-5}=\dfrac{y-1}{3}$.▶

4. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Задамо пряму L на площині двома різними точками $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ є напрямним вектором $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1\right)$ прямої L. Підставимо координати цього вектора і координати точки $M_1(x_1;y_1)$ в канонічне рівняння прямої. Отримаємо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Це рівняння називають **рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.**

5. Рівняння прямої у відрізках

Визначимо пряму L її точками перетину з осями координат: $A(a,0)$ і $B(0,b)$, припускаючи, що ці дві точки не збігаються з початком системи координат, тобто що $a \neq 0$ і $b \neq 0$ (рис.5). Запишемо рівняння прямої L у вигляді рівняння прямої, яка проходить через дві точки A та B, де A – точка перетину з віссю Ox, а B – точка перетину прямої з віссю Oy:

$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$, звідки $-x/a+1=y/b$ або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Це рівняння прямої називають **рівнянням прямої в відрізках**.

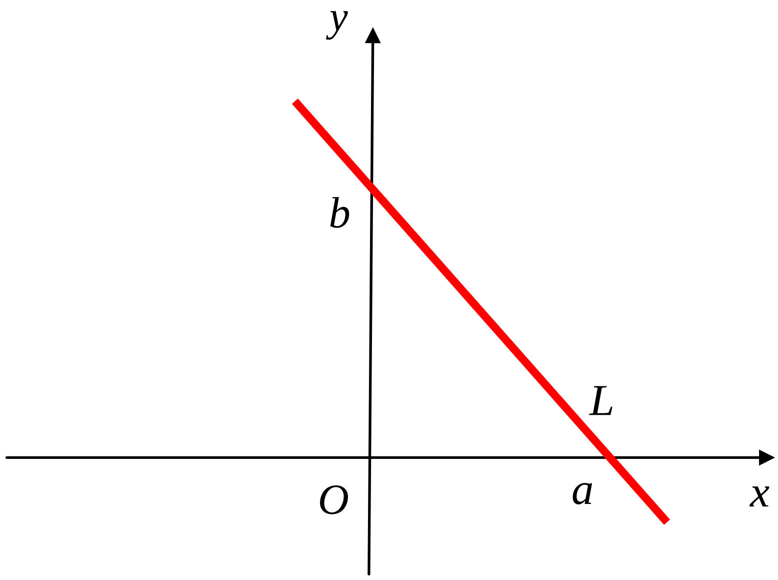


Рис. 5. Рівняння прямої у відрізках

Приклад 6. Записати рівняння прямої $3x+5y-15=0$ як рівняння у відрізках.

Розв'язання. $3x+5y-15=0 \Leftrightarrow 3x+5y=15 \Leftrightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ ►

6. Нормальне рівняння прямої.

Визначимо пряму L за допомогою одиничного вектора $\vec{n}^0$, який перпендикулярний їй, і відстані $p>0$ до прямої від початку координат. Існують два одиничних вектора, які перпендикулярні прямій L. З цих двох виберемо той, який має початок в точці O і напрямлений "у бік прямої" L (рис.6).

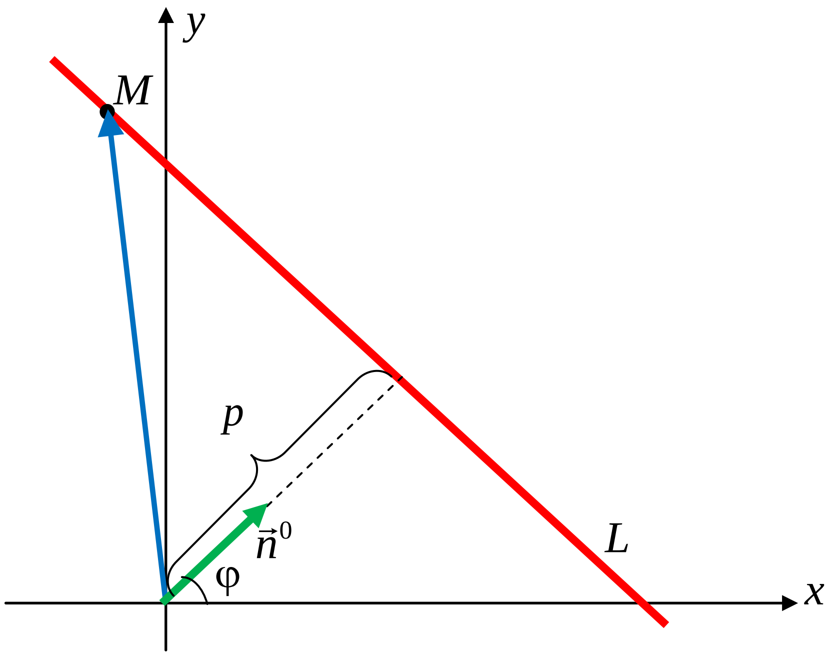


Рис. 6. Нормальне рівняння прямої

Обраний вектор $\vec{n}^0$ однозначно визначається кутом φ з віссю Ox. Координати вектора $\vec{n}^0$ обчислюються через цей кут: $\vec{n}^0=(\cos\varphi;\sin\varphi)$.

Умова, що точка $M(x,y)$ належить прямий L, еквівалентна тому, що ортогональна проекція радіус-вектора точки M на напрям вектора нормалі прямої дорівнює відстані p від точки *O* до прямої: $Пр_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM} = p$.

Проекція $Пр_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM}$ збігається зі скалярним добутком векторів $\overrightarrow{OM}$ і $\vec{n}^0$, оскільки довжина вектора нормалі $\vec{n}^0$ дорівнює одиниці, і це призводить до рівності $\left(\overrightarrow{OM},\vec{n}^0\right) = p$. Запишемо скалярний добуток $\left(\overrightarrow{OM},\vec{n}^0\right)$ в координатах: $$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Це рівняння називають **нормальним рівнянням прямої.**
Параметрами в цьому рівнянні є кут φ між вектором нормалі прямої і віссю *Ox* і відстань від початку системи координат до прямої.
Загальне рівняння прямої $ax + by + c = 0$ можна перетворити в її нормальне рівняння діленням на нормуючий множник $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, знак якого вибирається протилежним знаку *c*. За абсолютною величиною нормуючий множник є довжиною вектора $\vec{n} = (a,b)$ прямої, а вибір знака означає вибір потрібного напрямку з двох можливих. Якщо $c = 0$, то пряма проходить через початок координат $(p = 0)$. В цьому випадку знак нормуючого множника можна обирати будь-який.

Приклад 7. Записати нормальне рівняння прямої із її загального рівняння $3x - 4y + 10 = 0$.

Розв'язання. Обчислимо нормуючий множник $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, який для даної прямої від'ємний і дорівнює $-\sqrt{3^2+4^2} = -5$. Тому нормальне рівняння прямої має вигляд:

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

В даному випадку маємо $p = 2$,

$cos\,\varphi=-3/5, sin\,\varphi=4/5, \varphi=arccos(-3/5)$ ►

Взаємне розташування двох прямих

Фіксуємо на площині прямокутну систему координат. Дві прямі на площині можуть бути паралельними, співпадати або перетинатися. Прямі, які перетинаються можуть бути перпендикулярними. Яка з цих можливостей реалізується для прямих L_1 і L_2, завжди можна з'ясувати за допомогою їх загальних рівнянь:

$$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad\qquad L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$

Для паралельності прямих L_1 і L_2 необхідно і достатньо, щоб були колінеарними їх вектори нормалі $\vec{n}_1=(a_1;b_1)$ і $\vec{n}_2=(a_2;b_2)$, а колінеарність векторів рівносильна пропорційності їх координат. Тому

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

Оскільки остання рівність перетворюється на співвідношення $a_1b_2-a_2b_1=0$, то умова паралельності двох прямих може бути записана за допомогою визначника другого порядку:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0.$$

Прямі L_1 і L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли ортогональні їх вектори нормалі. Умова ортогональності векторів нормалі $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ і $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$ еквівалентна рівності нулю їх скалярного добутку $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$, тобто $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Дві прямі L_1 і L_2, які перетинаються, утворюють два суміжних кута. Один з цих кутів збігається з кутом між векторами нормалі. А кут між двома векторами можна обчислити за допомогою скалярного добутку. Зазначимо, що косинуси двох суміжних кутів відрізняються знаками, оскільки $cos(\pi - \varphi) = -cos\,\varphi$. При цьому додатне значення косинуса відповідає гострому куту. Значення φ (меншого з кутів між прямими L_1 і L_2) обчислюється за формулою:

$$cos\,\varphi = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Приклад 8. Дослідити взаємне розташування заданих прямих на площині. Для паралельних прямих знайти відстань між ними; для прямих, які перетинаються знайти кут між ними та координати точки перетину прямих.

1) $L_1 : -2x + y - 1 = 0;\ L_2 : 2y + 1 = 0$;

2) $L_1 : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1};\ L_2 : \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{0}$.

3) $L_1 : x + y - 1 = 0;\ L_2 : 2x + 2y + 1 = 0$.

Розв'язання.

1) $\vec{n}_1 = (-2;1);\ \vec{n}_2 = (0;2) \Rightarrow$ прямі перетинаються. Нехай φ - кут між ними. Тоді,

$$cos\,\varphi=\frac{\left|\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|\left(-2\right)\cdot 0+1\cdot 2\right|}{\sqrt{\left(-2\right)^2+1^2}\sqrt{0^2+2^2}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\varphi=arccos\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

2) $\vec{s}_1=\left(-2;1\right);\ \vec{s}_2=\left(1;0\right)$ - напрямні вектори прямих, вони неколінеарні. Отже, прямі перетинаються і кут φ між прямими можна визначити, як кут між їх напрямними векторами:

$$cos\,\varphi=\frac{\left|\left(\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)\right|}{\left|\vec{s}_1\right|\left|\vec{s}_2\right|}=\frac{\left|\left(-2\right)\cdot 1+1\cdot 0\right|}{\sqrt{\left(-2\right)^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\varphi=arccos\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3) $\vec{n}_1=\left(1;1\right);\ \vec{n}_2=\left(2;2\right)$ - нормальні вектори колінеарні, отже прямі паралельні. Знайдемо будь-яку точку, яка належить, наприклад, першій прямій. Точка $M\left(0;1\right)$ задовольняє рівняння прямої. Відстань між прямими знайдемо, як відстань від точки M до другої прямої:

$$p\left(M,L_2\right)=\frac{\left|ax+by+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|2\cdot 0+2\cdot 1+1\right|}{\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ ►$$

Відстань від точки до прямої

Для обчислення відстані від даної точки M до прямої L можна використовувати різні способи. Наприклад, якщо на прямій L взяти довільну точку M_0, то можна визначити ортогональну проекцію вектора $\overrightarrow{M_0M}$ на напрям вектора нормалі прямої. Ця проекція і є шукана відстань. Інший спосіб обчислення відстані від точки до прямої базується на використанні **нормального рівняння прямої**. Нехай пряма L задана нормальним рівнянням. Якщо точка $M(x,y)$ не належить прямій L, то ортогональна проекція $Пр_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM}$ і радіус-вектора точки $M(x,y)$ на напрямок одиничного нормального вектора $\vec{n}^o$ прямої L дорівнює скалярному добутку векторів $\overrightarrow{OM}$ і $\vec{n}^o$, тобто $x\cos\varphi + y\sin\varphi$. Ця ж проекція дорівнює сумі відстані p від початку координат до прямої і деякої величини δ.

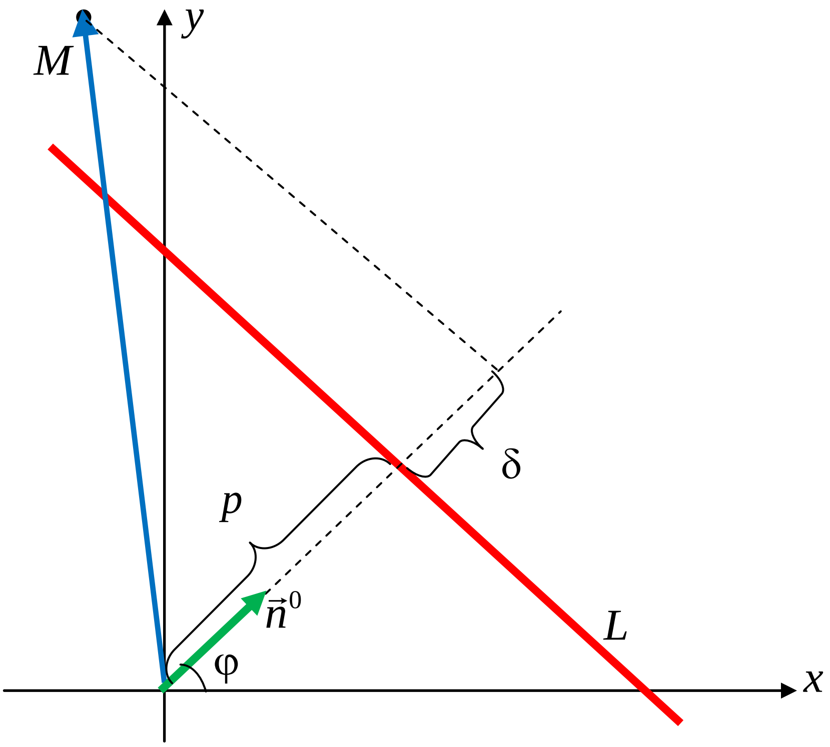


Рис.7. Відстань від точки до прямої

Величина δ за абсолютною величиною дорівнює відстані від точки M до прямої. При цьому $\delta > 0$, якщо точки M і O знаходяться по різні сторони від прямої, і $\delta < 0$, якщо ці точки розташовані по одну сторону від прямої. Величину δ називають **відхиленням точки M від прямої**. Відхилення δ для точки $M(x,y)$ від прямої L обчислюється як різниця проекції

$Пр_{\vec{n}^o}\overrightarrow{OM}$ і відстані p від початку координат до прямої, тобто,

$$\delta = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p.$$

За цією формулою можна отримати і відстань $p(M,L)$ від точки $M(x,y)$ до прямої L, заданої нормальним рівнянням:

$$p(M,L) = |\delta| = |x\cos\varphi + y\sin\varphi - p|.$$

Враховуючи наведену вище процедуру перетворення загального рівняння прямої в її нормальне рівняння, отримуємо формулу для відстані від точки $M(x,y)$ до прямої L, яка задана своїм загальним рівнянням:

$$p(M,L) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Приклад 9. Знайти рівняння висоти *AH*, медіани *AM* і бісектриси *AD* трикутника *ABC*, якщо відомі координати вершин трикутника: $A(-1,-3);\ B(7,3);\ C(3,9)$.

Розв'язання. Під зазначеними рівняннями маються на увазі рівняння прямих *AH, AM* і *AL* трикутника. Щоб знайти рівняння прямої *AM*, скористаємося тим, що медіана ділить протилежну сторону трикутника навпіл. Знайшовши координати $M(x_1,y_1)$ середини сторони *BC* : $x_1 = \frac{7+3}{2} = 5;\ y_1 = \frac{3+9}{2} = 6$, записуємо координати вектора $\overrightarrow{AM} = (6;9)$ як напрямного вектора прямої. Канонічне рівняння *AM*: $\frac{x+1}{6} = \frac{y+3}{9}$.

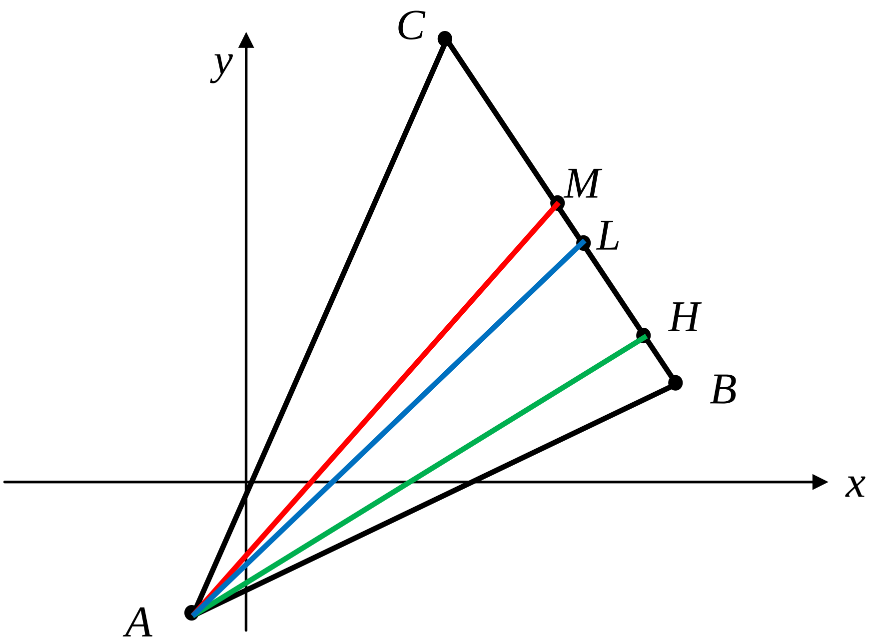


Рис. 8. Ілюстрація до прикладу 9

Загальне рівняння медіани:

$$3x-2y-3=0\ .$$

Щоб знайти рівняння висоти AH скористаємося тим, що висота перпендикулярна протилежній стороні трикутника. Отже, вектор $\overrightarrow{BC}=\left(3-7;9-3\right)=\left(-4;6\right)$ перпендикулярний висоті AH. За вектор нормалі прямої AH можна взяти вектор $\vec{n}_{AH}=\left(-2;3\right)$. Підставимо координати точки A і вектора нормалі прямої AH в загальне рівняння:
$-2\left(x+1\right)+3\left(y+3\right)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-7=0$.

Щоб знайти рівняння бісектриси AD скористаємося тим, що бісектриса AD належить множині тих точок $N\left(x,y\right)$, які рівновіддалені від прямих AB і AC. Рівняння цієї множини має вигляд: $p\left(N,AB\right)=p\left(N,AC\right)$

Воно задає дві прямі, які проходять через точку A і ділять кути між прямими AB і AC навпіл. Скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві точки, знайдемо загальні рівняння прямих AB і AC:

$$AB:\ \frac{x+1}{7+1}=\frac{y+3}{3+3};\ \ AC:\ \frac{x+1}{3+1}=\frac{y+3}{9+3}.$$

Після перетворень отримаємо загальні рівняння:

$AB:\ 3x-4y-9=0;\quad AC:\ 3x-y=0.$

Рівняння бісектриси, як геометричного місця точок, які рівновіддалені від сторін кута, запишемо у вигляді:

$$\frac{|3x-4y-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3x-y|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

Перетворимо його, розкривши модулі:

$$3x-4y-9=\pm\left(5\frac{3x-y}{\sqrt{10}}\right)$$

В результаті отримаємо загальні рівняння двох прямих

$$\left(3\mp\frac{15}{\sqrt{10}}\right)x-\left(4\mp\frac{5}{\sqrt{10}}\right)y-9=0.$$

Щоб вибрати з них рівняння потрібної бісектриси, враховуємо, що вершини *B* і *C* трикутника розташовані по різні сторони від шуканої прямої і тому підстановки їх координат в ліву частину загального рівняння прямої AL повинні давати значення із різними знаками. Вибираємо рівняння, відповідне верхньому знаку, тобто

$$\left(3+\frac{15}{\sqrt{10}}\right)x-\left(4-\frac{5}{\sqrt{10}}\right)y-9=0$$

Підстановка координат точки *B* в ліву частину цього рівняння дає додатне значення, оскільки $\left(3+15/\sqrt{10}\right)7+\left(-4+5/\sqrt{10}\right)3-9=125/\sqrt{10}>0$;

для координат точки *C*: $\left(3+15/\sqrt{10}\right)3+\left(-4+5/\sqrt{10}\right)9-9=\dfrac{90}{\sqrt{10}}-36<0.$

Отже, вершини *B* і *C* розташовані по різні сторони від прямої *AL* з обраним рівнянням, а це і буде загальне рівнянням бісектриси

$$AL: \left(3+\frac{15}{\sqrt{10}}\right)x-\left(4-\frac{5}{\sqrt{10}}\right)y-9=0 \blacktriangleright$$

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 10. В прямокутній декартовій системі координат задано рівняння прямих $A_1x+B_1y+C_1=0 \ і \ A_2x+B_2y+C_2=0$ і точка $M(x_0,y_0)$. Записати рівняння бісектриси того кута між заданими прямими в якому лежить точка $M(x_0,y_0)$.

Розв'язання. Нехай точка $P(x,y)$ — довільна точка шуканої бісектриси, яка лежить в середині потрібного кута. За означенням бісектриси, як геометричного місця точок, які рівновіддалені від сторін кута, можемо записати:

$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$. Оскільки точки M і P лежать в середині одного кута, то вони розташовані з однієї сторони як відносно першої прямої, так і відносно другої прямої. Тому числа $A_1x+B_1y+C_1 \ і \ A_1x_0+B_1y_0+C_1$ мають однакові знаки; числа $A_2x+B_2y+C_2 \ і \ A_2x_0+B_2y_0+C_2$ також мають однакові знаки. Тоді

рівняння шуканої бісектриси буде $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$,

якщо числа $A_1x_0+B_1y_0+C_1 \ і \ A_2x_0+B_2y_0+C_2$ одного знака, і $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, якщо ці числа протилежних знаків.

Висновки: шукане рівняння бісектриси:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

або $$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Приклад 11. (розрахункова робота). Задано координати вершин трикутника $ABC: A(-2,6);\ B(8,11);\ C(2,-2)$.

Знайти:

1) Канонічне та загальне рівняння сторони AB; рівняння прямої у відрізках, рівняння з кутовим коефіцієнтом та загальне рівняння сторони BC; нормальне та загальне рівняння сторони AC; довжини всіх сторін трикутника.
2) Внутрішні кути трикутника ABC.
3) Рівняння медіани AM, бісектриси AL та висоти AH.
4) Площу трикутника ABC.

Розв'язання.

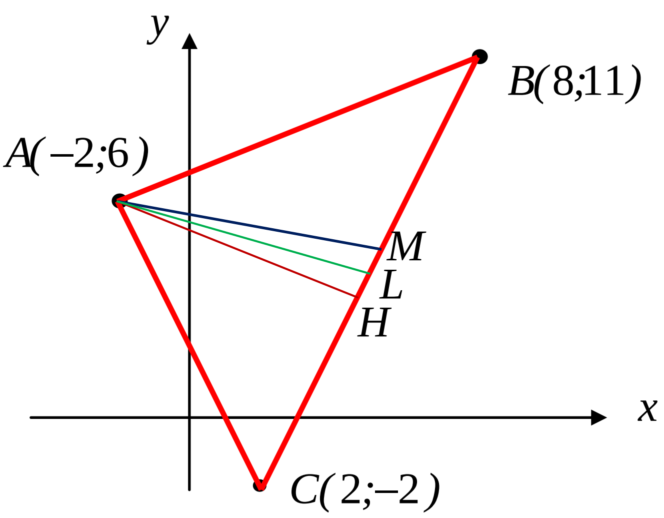
1) **Сторона *AB***: напрямний вектор $\overrightarrow{AB}=(10;5)$. Канонічне рівняння: $\frac{x+2}{10}=\frac{y-6}{5}$. Загальне рівняння:

$$5x+10=10y-60;\ 5x-10y+70=0;$$
$$x-2y+14=0.$$

Довжина сторони *AB*: $|AB|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$ (од.)

Сторона *BC*: напрямний вектор $\overrightarrow{BC}=(-6;-13)$; кутовий коефіцієнт: $k=\frac{-13}{-6}$. Шукане рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y=\frac{13}{6}x+b$.

.



Підставимо у рівняння координати точки C: $-2=\frac{13}{6}\cdot 2+b \Rightarrow b=-\frac{19}{3} \Rightarrow y=\frac{13}{6}x-\frac{19}{3}$. Помножимо обидві частини рівняння на (-6) і перенесемо всі доданки в ліву частину: $13x-6y-38=0$. Це загальне рівняння сторони BC.

Довжина сторони BC: $|BC|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{6^2+13^2}=\sqrt{205}$ (од.)

Сторона AC: напрямний вектор $\overrightarrow{AC}=(4;-8)$; запишемо будь-який вектор, який перпендикулярний напрямному: $\vec{n}_{AC}=(2;1),\left(\vec{n}_{AC}\perp\overrightarrow{AC}\right)$, шукане загальне рівняння набуде вигляду: $2(x-2)+(y+2)=0 \Rightarrow 2x+y-2=0$. Помножимо обидві частини на нормуючий множник $+\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=+\frac{1}{\sqrt{5}}$ отримаємо нормальне рівняння:

$x\frac{2}{\sqrt{5}}+y\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}=0$. Довжина сторони AC: $|AC|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

2) Кути трикутника шукатимемо, використавши скалярний добуток векторів, утворених сторонами трикутника.

Кут *A*: $cos\,A=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{10\cdot4+5\cdot(-8)}{5\sqrt{5}\cdot4\sqrt{5}}=0\Rightarrow\angle A=90^0$.

Кут *B*:

$$cos\,B=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-10\cdot(-6)-5\cdot(-13)}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{205}}=\frac{5}{\sqrt{41}}\Rightarrow\angle B=arccos\frac{5}{\sqrt{41}}.$$

Кут *C*: оскільки трикутник прямокутний, то $\angle C=\dfrac{\pi}{2}-arccos\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

3) **Рівняння медіани *AM***: знайдемо координати точки M - середини відрізка BC: $x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{8+2}{2}=5;\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{11-2}{2}=4{,}5$.

Напрямний вектор $\overrightarrow{AM}=(7;-1{,}5)$. Канонічне рівняння медіани: $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y-6}{-1{,}5}$.

Рівняння висоти *AH* знайдемо, як рівняння прямої, яка перпендикулярна BC і проходить через точку A: вектором нормалі прямої (AH) може бути напрямний вектор прямої (BC). Тоді загальне рівняння висоти: $-6(x+2)-13(y-6)=0\Rightarrow-6x-13y+66=0\Rightarrow6x+13y-66=0$.

Рівняння бісектриси *AL*: шукатимемо, як рівняння геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута: $\dfrac{|x-2y+14|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2x+y-2|}{\sqrt{5}}$. Для розкриття модулів візьмемо будь-яку точку в середині того самого кута A, нехай це буде точка P(0;5). Підставимо координати цієї точки в рівняння сторін. $0-2\cdot5+14=4>0$ і $2\cdot0+5-2=3>0$. Отже, шукане рівняння бісектриси набуває вигляду:

$$\frac{x-2y+14}{\sqrt{5}}=\frac{2x+y-2}{\sqrt{5}}\Rightarrow x-2y+14=2x+y-2\Rightarrow x+3y-16=0.$$

4) **Площу трикутника *ABC*** знайдемо використавши векторний добуток. Для цього запишемо вектори $\overrightarrow{AB}=(10;5;0)$ і $\overrightarrow{AC}=(4;-8;0)$, як вектори простору R^3. Їх векторний добуток $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 10 & 5 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix}=-100k$. Площа трикутника дорівнюватиме половині довжини цього вектора: $S_{\Delta ABC}=50$ (кв.од.).

Відповідь: 1) Рінняння: AB: $x-2y+14=0$.; BC: $13x-6y-38=0$.; AC: $x\frac{2}{\sqrt{5}}+y\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}=0$.

Довжини: $|AB|=5\sqrt{5}$; $|BC|=\sqrt{205}$; $|AC|=4\sqrt{5}$.

2) $\angle A=90^0$; $\angle B=\arccos\frac{5}{\sqrt{41}}$; $\angle C=\frac{\pi}{2}-arccos\frac{5}{\sqrt{41}}$.

3) Медіана AM: $\frac{x+2}{7}=\frac{y-6}{-1{,}5}$; висота AH: $6x+13y-66=0$; бісектриса AL: $x+3y-16=0$.

4) $S_{\Delta ABC}=50$ (од.кв.)►

Приклад 12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2{,}1)$:

1) паралельну осі Oy;

2) яка утворює з віссю Ox кут $\frac{3}{4}\pi$;

3) перпендикулярно вектору $\vec{a}=(4;2)$;

4) паралельно бісектрисі першого координатного кута;

5) перпендикулярно прямій $6x - y + 2 = 0$;

6) такої, що відтинає на осі Oy відрізок довжиною 5.

Розв'язання.

1) $x = -2$ (чорна лінія на рисунку).

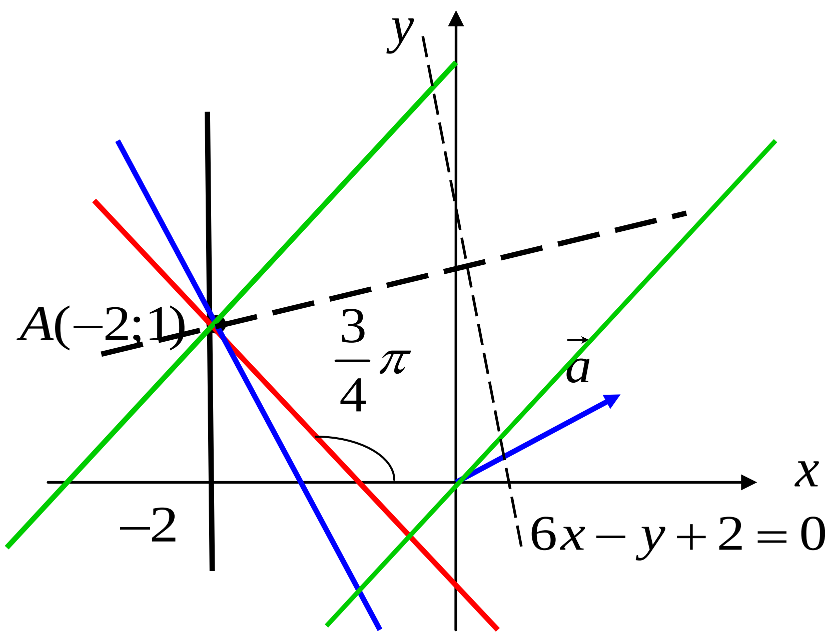
2) $tg\frac{3}{4}\pi = -1; \ \ y = -x + b \to 1 = -(-2) + b \to b = -1$.

$y = -x - 1$ (червона лінія на рисунку)

3) $4x + 2y + C = 0 \to 4(-2) + 2 \cdot 1 + C = 0 \to C = 6$

$4x + 2y + 6 = 0 \ \ \textit{або} \ \ 2x + y + 3 = 0$ (синя лінія на рисунку)

4) Рівняння бісектриси: $y = x$. Напрямний вектор прямої може бути $\vec{b} = (1;1)$. Тоді $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{1} \to x - y + 3 = 0$(зелена лінія на рисунку).



5) Вектор $\vec{c} = (6;-1)$ може бути напрямним вектором шуканої

6) прямої, тоді $\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{-1}\to x+6y-4=0$ (пунктирна лінія на рисунку)

7) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{5}=1\to\dfrac{-2}{a}+\dfrac{1}{5}=1\to a=-2.5$ або

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{5}=1\to\frac{-2}{a}-\frac{1}{5}=1\to a=-2.5;$$

$$\frac{x}{-5/3}-\frac{y}{5}=1\to 3x+y+5=0$$

►

Приклад 13. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M=(2;1)$ під кутом $\dfrac{\pi}{4}$ до прямої $2x+3y+4=0$.

Розв'зання. Запишемо шукане рівняння прямої, як рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$. Кутовий коефіцієнт знайдемо з умови, що кут між прямими $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$: кутовий коефіцієнт заданої прямої $k_1=-\dfrac{2}{3}$; позначимо кутовий коефіцієнт шуканої прямої через k_2. Тоді,

$$tg\alpha=\frac{|k_2-k_1|}{|1+k_1k_2|};\ tg\frac{\pi}{4}=\frac{\left|k_2-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|}{\left|1+\left(-\frac{2}{3}\right)k_2\right|}=1$$

Розв'яжемо це рівняння відносно k_2: $k_{21}=\dfrac{1}{5};k_{22}=-5$. Отже, задача має два розв'язки. Використаємо координати точки $M=(2;1)$ для знаходження невідомого b в рівняннях $y=\frac{1}{5}x+b;\ y=-5x+b$:

$y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5};\ y=-5x+11$ ►

Приклад 14. Написати рівняння прямої, яка паралельна двом заданим прямим $L_1: x+2y-1=0;\ L_2: x+2y+2=0$ і проходить посередині між ними.

Розв'зання. 1 спосіб. Вектори нормалей всіх трьох прямих однакові $\vec{n}=(1;2)$. Отже, достатньо знайти точку, яка належить шуканій прямій. Знайдемо будь-які дві точки $M_1\in L_1;\ M_2\in L_2$. $M_1(1;0)\in L_1;\ M_2(-2;0)\in L_2$. Тоді координати точки, яка лежатиме на середині відрізка M_1M_2 будуть координатами точки M, яка належить шуканій прямій: $x_M=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2};\ y_M=\frac{0+0}{2}=0$. Шукане рівняння:

$x+2y+0{,}5=0$.

2 спосіб. Будь-яка точка шуканої прямої рівновіддалена від двох заданих прямих: $p(M,L_1)=p(M,L_2)$. Запишемо нормальні рівняння заданих прямих: $L_1:\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0;\ L_2:-\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}=0.$

Оскільки вектори нормалей протилежно направлені, то початок координат лежить між заданими прямими. Тоді, модулі відстаней розкриються із знаком + і ріняння набуде такого самого вигляду: $x+2y+0{,}5=0$.

Тема 1. Завдання для самостійного опрацювання

1.1. Пряма L задана точкою $M_0(-1;2)$ і вектором нормалі $\vec{n}=(2;2)$. Написати рівняння прямої, привести його до нормального виду, знайти відстань від початку координат до прямої, зробити рисунок.

1.2. Пряма L задана точкою $M_0(1;1)$ і вектором нормалі $\vec{n}=(2;-1)$. Написати рівняння прямої, привести його до нормального виду, знайти відстань від початку координат до прямої, зробити рисунок.

1.3. Пряма L задана точкою $M_0(-1;2)$ і напрямним вектором $\vec{s}=(3;-1)$. Написати рівняння прямої, привести його до нормального виду, знайти відстань від початку координат до прямої, зробити рисунок.

1.4. Пряма L задана точкою $M_0(1;1)$ і напрямним вектором $\vec{s}=(0;-1)$. Написати рівняння прямої, привести його до нормального виду, знайти відстань від початку координат до прямої, зробити рисунок.

1.5. Пряма L задана двома своїми точками $M_1(1;2)$ і $M_2(-1;0)$. Написати рівняння прямої, привести його до нормального виду, знайти відстань від початку координат до прямої, зробити рисунок.

1.6. Пряма L задана двома своїми точками $M_1(2;2)$ і $M_2(0;2)$. Обчислити відстань прямої, привести його до нормального виду, знайти відстань від початку координат до прямої, зробити рисунок.

1.7. Дано $L: -2x+y-1=0$ і точка $M(-1;2)\notin L$. Знайти:

а) відстань $p(M,L)$ від точки до заданої прямої;

б) написати рівняння прямої L_1, яка проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої;

в) написати рівняння прямої L_2, яка проходить через точку M паралельно до заданої прямої. Зробити рисунок.

1.8. Дано $L: 2y+1=0$ і точка $M(1;0) \notin L$. Знайти:

а) відстань $p(M,L)$ від точки до заданої прямої;

б) написати рівняння прямої L_1, яка проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої;

в) написати рівняння прямої L_2, яка проходить через точку M паралельно до заданої прямої. Зробити рисунок.

1.9. Дано $L: x+y+1=0$ і точка $M(0;-1) \notin L$. Знайти:

а) відстань $p(M,L)$ від точки до заданої прямої;

б) написати рівняння прямої L_1, яка проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої;

в) написати рівняння прямої L_2, яка проходить через точку M паралельно до заданої прямої. Зробити рисунок.

1.10. Дослідити взаємне розташування прямих $L_1: -2x+y-1=0$ і $L_2: 2y+1=0$. Якщо вони перетинаються – знайти косинус кута між ними і координати точки перетину. Якщо вони паралельні – знайти відстань між ними. Зробити рисунок.

1.11. Дослідити взаємне розташування прямих $L_1: x+y-1=0$ і $L_2: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}$. Якщо вони перетинаються – знайти косинус кута між ними і координати точки перетину. Якщо вони паралельні – знайти відстань між ними. Зробити рисунок.

1.12. Дослідити взаємне розташування прямих $L_1: -x+2y+1=0$ і

$L_2 : 2x - 4y - 2 = 0$. Якщо вони перетинаються – знайти косинус кута між ними і координати точки перетину. Якщо вони паралельні – знайти відстань між ними. Зробити рисунок.

1.13. Показати, що точка $M(-1;2)$ належить прямій $L : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 6t \end{cases}$.

Знайти значення параметра t, яке відповідає цій точці. Зробити рисунок.

1.14. Обчислити відстань від точки $M(1;1)$ до прямої $L : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$.

Зробити рисунок.

1.15. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;4)$ і такої, що знаходиться на відстані $p = 1$ від точки $A(0;3)$. Зробити рисунок.

1.16. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;2)$ і такої, що відстань від неї до точки $A(-2;-5)$ вдвічі більша за відстань до точки $B(1;8)$. Зробити рисунок.

1.17. Знайти рівняння прямої, яка проходить на відстані $\sqrt{10}$ від точки $A(5;4)$ перпендикулярно прямій $2x + 6y - 3 = 0$. Зробити рисунок.

1.18. Знайти рівняння прямої, яка відтинає на осі абсцис від початку координат відрізок довжиною 2 і такої, що утворює з прямою $2x - y + 3 = 0$ кут в 45°. Зробити рисунок.

1.19. Знайти значення параметра λ при яких прямі $4x + \lambda y - 20 = 0$ і $2x - y + 3 = 0$ перетинаються під кутом 45°. Зробити рисунок.

1.20. В рівнобедреному трикутнику ABC задані вершина $C(4;3)$, рівняння основи (AC): $2x-y-5=0$ і рівняння бічної сторони (AB): $x-y=0$. Написати рівняння сторони BC. Зробити рисунок.

1.21. Шукана пряма розташована на відстані $\sqrt{34}$ від точки $A(-1;2)$ і складає з віссю *Ox* кут вдвічи більший кута, який складає з віссю *Ox* пряма $2x-6y+5=0$. Зробити рисунок.

1.22. Скласти рівняння прямої,яка проходить через точку $M(8;6)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 12 од.кв. Зробити рисунок.

1.23. Написати рівняння прямої, яка паралельна двом заданим прямим L_1, L_2 і такої, що проходит посередині між ними: $L_1: 3x-2y-1=0; L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{3}$. Зробити рисунок.

1.24. Написати рівняння прямої, яка паралельна двом заданим прямим L_1, L_2 і такої, що проходит посередині між ними:

$L_1: 3x-15y-1=0; L_2: \dfrac{x+\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{1}$. Зробити рисунок.

1.25. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;1)$ під кутом $\dfrac{\pi}{4}$ до прямої $L: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2-\dfrac{2}{3}t \end{cases}$. Зробити рисунок.

1.26. Задано координати двох протилежних вершин квадрата: $A(1;3)$ і $C(-1;1)$. Знайти координати двох інших вершин і написати рівняння сторін квадрата. Зробити рисунок.

1.27. Відоме рівняння однієї сторони квадрата $x+3y-3=0$ і точка перетину діагоналей $N(-2;0)$. Написати рівняння сторін решти сторін квадрата. Зробити рисунок.

1.28. Точка $A(5;-4)$ є вершиною квадрата. - рівняння діагоналі цього квадрата. Знайти рівняння сторін і другої діагоналі квадрата. Зробити рисунок.

1.29. Знайти рівняння сторін трикутника ABC, якщо відома його вершина $A(1;3)$ і рівняння двох медіан: $x-2y+1=0$ і $y-1=0$. Зробити рисунок.

1.30. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2;3)$ і рівновіддалена від точок $M_1(5;-1)$ і $M_2(3;7)$. Зробити рисунок.

1.31. Дослідити, чи лежать точка $M_0(1;-2)$ і початок координат в одному куті, в суміжних кутах або вертикальних кутах, які утворені перетином двох прямих: $L_1: 2x-y-5=0;\ \ L_2: 3x+y+10=0$. Зробити рисунок.

1.32. Дослідити, чи лежать точка $M_0(1;-2)$ і початок координат в одному куті, в суміжних кутах або вертикальних кутах, які утворені перетином двох прямих: $L_1: x-2y-1=0;\ \ L_2: 3x-y-2=0$. Зробити рисунок

1.33. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо відомі координати однієї вершини $B(2;6)$ і рівняння висоти $x-7y+15=0$ та бісектриси $7x+y+5=0$, які проведені з однієї вершини. Зробити рисунок.

1.34. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо відомі координати однієї вершини $B(2;-7)$ і рівняння висоти $3x+y+11=0$ та медіани $x+2y+7=0$, які проведені з різних вершин. Зробити рисунок.

1.35. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо відомі координати однієї вершини $A(3;-1)$ і рівняння бісектриси $x-4y+10=0$ та медіани

$6x+10y-59=0$, які проведені з різних вершин. Зробити рисунок.

1.36. Задані рівняння $5x+4y=0$ та $3x-y=0$ медіан трикутника і координати $(-5;2)$ однієї з вершин. Знайти рівняння сторін трикутника. Зробити рисунок.

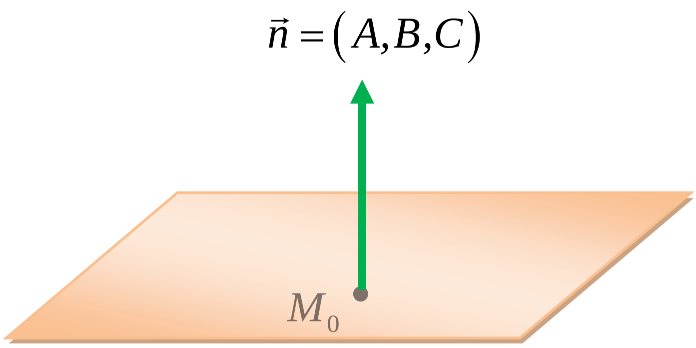
1.37. Задані рівняння $y+4=0$ та $7x+4y+5=0$ бісектрис внутрішніх кутів трикутника і рівняння $4x+3y=0$ сторони, яка поєднує вершини, з яких виходять задані бісектриси. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника. Зробити рисунок.

Тема 2. Пряма і площина у просторі

Короткі теоретичні відомості і приклади

Рівняння першого порядку з трьома невідомими має вигляд $Ax+By+Cz+D=0$, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C повинен бути відмінний від нуля. Воно задає в просторі в прямокутній системі координат $Oxyz$ алгебраїчну поверхню першого порядку. Будь-яка площина в просторі є поверхнею першого порядку і будь-яка поверхня першого порядку в просторі є площиною. Рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ називають **загальним рівнянням площини.** Коефіцієнти A, B, C — це координати вектора $\vec{n}$, який перпендикулярний площині. Його називають **нормальним вектором площини.**

За умови відомих координат точки M_0, яка належить площині, і ненульового вектора, перпендикулярного їй, рівняння площини записується без будь-яких додаткових обчислень.



Приклад 15. Знайти загальне рівняння площини, яка перпендикулярна радіус-вектору точки $A(2,5,7)$ та проходить через точку $M_0(3,-4,1)$.

Розв'язання. Оскільки ненульовий вектор $\overrightarrow{OA} = (2,5,7)$ перпендикулярний шуканій площини, то її рівняння має вигляд

$2(x-3)+5(y+4)+7(z-1)=0$, або $2x+5y+7z+7=0$.►

Спеціальні види рівняння площини

1. Векторне рівняння площини

Нехай $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ — радіус-вектори точок M_0 та M відповідно. Тоді $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, і умову того, що точка M належить площині, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно ненульовому вектору $\vec{n}$ (рис. 9), можна записати за допомогою скалярного добутку у вигляді співвідношення: $\left(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0\right) = 0$, яке називають **векторним рівнянням площини**.

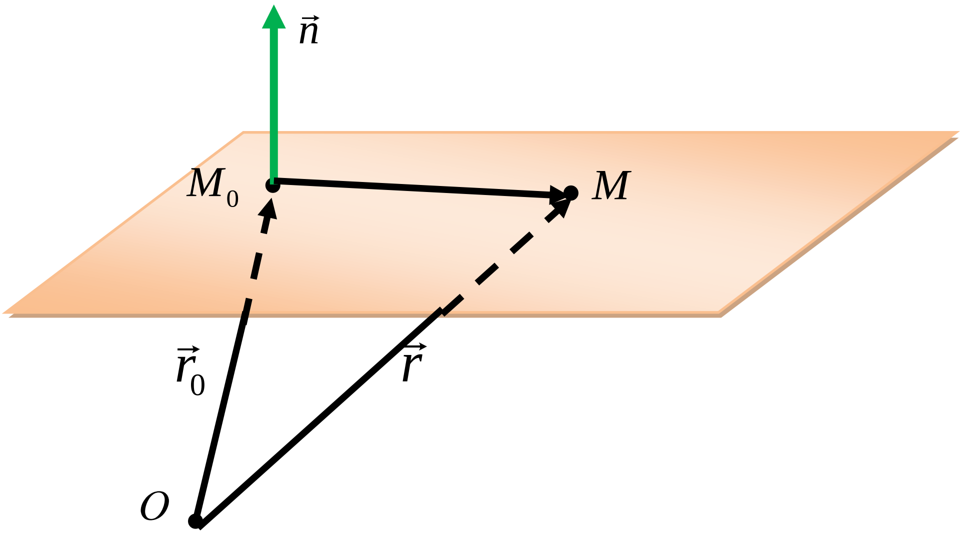


Рис. 9. Векторне рівняння площини

2. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Припустимо, що три точки M_1, M_2, M_3 не лежать на одній прямій. Тоді існує єдина площина π, якій ці точки належать. Знайдемо рівняння цієї площини. Нехай M – довільна точка на площині.

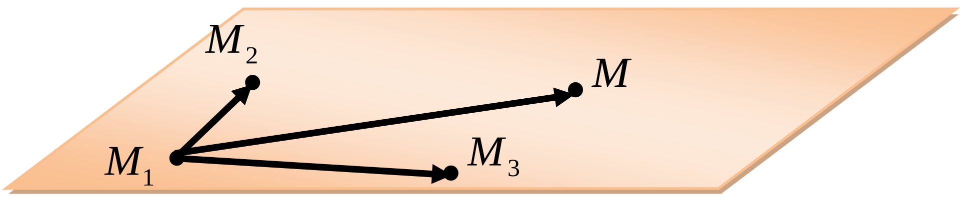


Рис. 10. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ компланарні. Критерієм компланарності трьох векторів є рівність нулю їх змішаного добутку. Якщо $(x_i; y_i; z_i)$ - координати точок M_i, $i=1,2,3$, а $(x;y;z)$ — координати точки M, то $\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1)$ і умова рівності нулю змішаного добутку цих векторів має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник, отримаємо лінійне щодо x, y, z рівняння, яке є **загальним рівнянням шуканої площини**.

3. Рівняння площини у відрізках

Розглянемо окремий випадок площини, яка проходить через три точки. Точки $M_1(a;0;0), M_2(0;b;0), M_3(0;0;c)$, $(abc \neq 0)$, не лежать на одній прямій і задають площину, яка відсікає на осях координат відрізки ненульової довжини (рис. 11). Під "довжинами відрізків" розуміють значення ненульових координат радіус-векторів точок M_i, i = 1,2,3. Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2} = (-a;b;0)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-a;0;c)$, $\overrightarrow{M_1M} = (x-a;y;z)$, то

рівняння площини набуде вигляду:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник, знайдемо: $bc(x-a) + acy + abz = 0$,

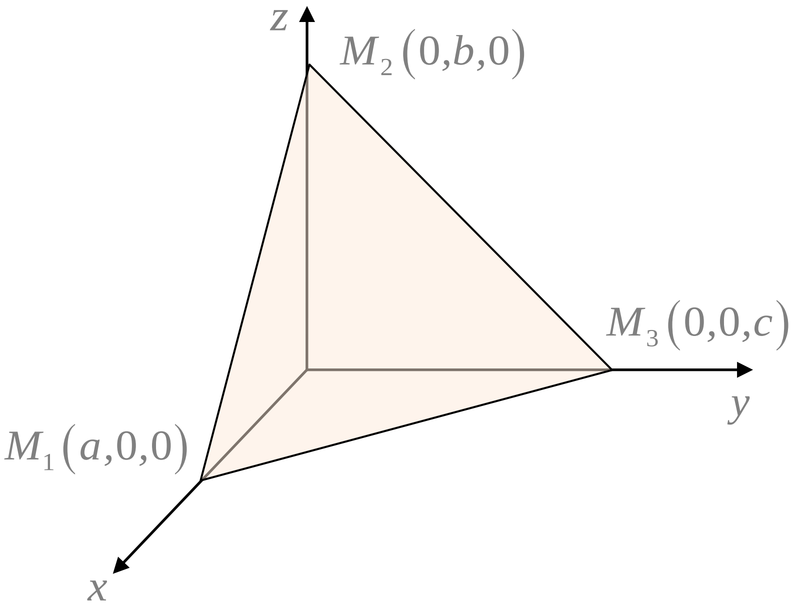


Рис. 11. Рівняння площини у відрізках

розділимо отримане рівняння на abc і перенесемо вільний член в праву частину: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Це рівняння називають **рівнянням площини у відрізках**.

Приклад 16. Знайти загальне рівняння площини, яка проходить через точку з координатами (1; 1, 2) і відсікає від осей координат відрізки однакової довжини.

Розв’язання. Рівняння площини у відрізках за умови, що вона відсікає від осей координат відрізки рівної довжини, скажімо $a \neq 0$, має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1.$$

Цьому рівнянню повинні задовольняти координати (1; 1, 2) відомої точки на площині, тобто виконується рівність $4/a=1$. Тому $a=4$ і шукане рівняння: $x+y+z-4=0$ ▶

4. Нормальне рівняння площини

Розглянемо деяку площину π в просторі. Зафіксуємо для неї одиничний нормальний вектор $\vec{n}^0$, напрямлений з початку координат в бік площини, і позначимо через ρ відстань від початку *O* системи координат до площини π (рис. 12). Якщо площина проходить через початок системи координат, то $\rho=0$, а в якості напрямку для нормального вектора $\vec{n}^0$ можна вибрати будь-яке з двох можливих. Якщо точка *M* належить площині π,

то це еквівалентно тому, що ортогональна проекція вектора $\overrightarrow{OM}$ на напрямок вектора $\vec{n}^0$ дорівнює ρ, тобто виконана умова $\left(\vec{n}^0,\overrightarrow{OM}\right)=np_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM}=\rho$, оскільки довжина вектора $\vec{n}^0$ дорівнює одиниці. Позначимо координати точки M через (*x*; *y*; *z*) і нехай $\vec{n}^0=\left(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\right)$. Скалярний добуток у рівності

$\left(\vec{n},\overrightarrow{OM}\right)=\rho$ в координатній формі задає **нормальне рівняння площини:** $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0$.

Загальне рівняння площини в просторі можна перетворити в її нормальне рівняння діленням на нормуючий множник. Для рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ нормуючим множником є число $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, знак якого вибирається протилежним знаку D. За абсолютною величиною нормуючий множник є довжиною нормального вектора $\vec{n} = (A,B,C)$ площини, а знак відповідає потрібному напрямку одиничного нормального вектора площини. Якщо площина проходить через початок системи координат, тобто D = 0, то знак нормуючого множника можна вибрати будь-яким.

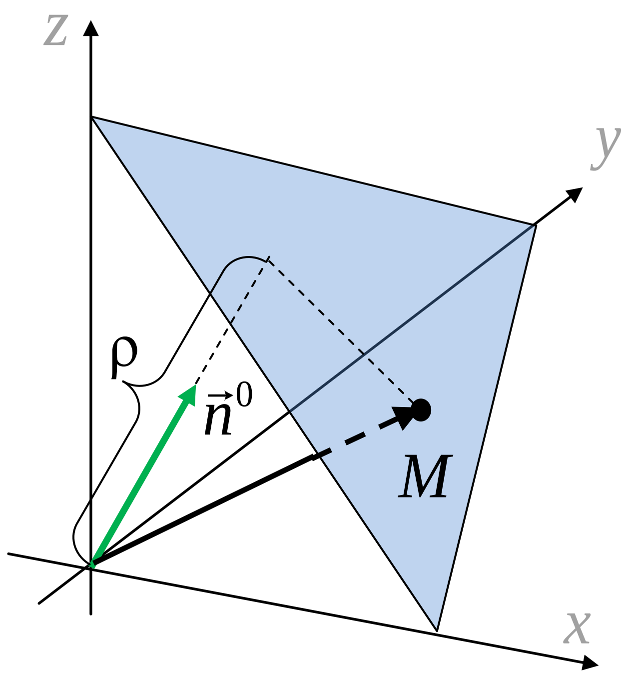


Рис. 12. Нормальне рівняння площини.

Приклад 17. Написати нормальне рівняння площини $x - y + 5z + 1 = 0$.

Розв'язання. Нормуючий множник $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Для заданої площини $\mu = \dfrac{1}{-\sqrt{1^2+1^2+5^2}} = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$. Шукане рівняння $-\dfrac{x}{3\sqrt{3}} + \dfrac{y}{3\sqrt{3}} - \dfrac{5z}{3\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = 0$ ►

Рівняння прямої в просторі

1. Загальне рівняння прямої в просторі

Пряму в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин. Дві площини:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad ,$$

які непаралельні, перетинаються по прямій. Точка *M* (*x;y;z*) належить цій прямій тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють систему:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Це **загальне рівняння прямої.**

2. Векторне рівняння прямої

Пряму *L* в просторі можна задати будь-якою її точкою M_0 і паралельним їй ненульовим вектором $\vec{s}$.Будь-який ненульовий вектор, паралельний прямій, **називають напрямним вектором прямої.** Якщо точка *M* належить прямій *L*, то це еквівалентно тому, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарен вектору $\vec{s}$ (рис.13). З колінеарності слідує, що $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. Оскільки $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$, де $\vec{r}$ і $\vec{r}_0$ - радіус-вектори точок M і M_0 відповідно, то умову $M \in L$ можна записати у вигляді рівняння

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

яке називають **векторним рівнянням прямої** в просторі.

3. Параметричне рівняння прямої в просторі

Припустимо, що відомі координати (l,m,n) напрямного вектора $\vec{s}$ прямої L і точки $M_0(x_0;y_0;z_0) \in L$ в прямокутній системі координат. Позначимо через (x,y,z) координати довільної точки *M*. Критерієм приналежності точки *M* прямій *L* є умова колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ і $\vec{s}$ (рис. 13), що рівносильно пропорційності їх координат. Позначимо через t коефіцієнт пропорційності, отримаємо : $x - x_0 = tl,\ y - y_0 = tm,\ z - z_0 = tn$.

Але тоді $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$. Це **параметриче рівняння прямої** в просторі.

Шість коефіцієнтів у системі рівнянь мають наочний геометричний сенс:

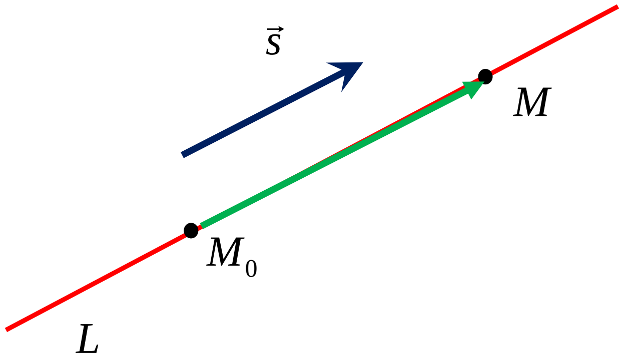


Рис. 13. Параметричне рівняння прямої в просторі

вони є координатами однієї точки на прямій, що відповідає $t=0$, та координатами напрямного вектора прямої, який з'єднує точки, що відповідають значенням параметра $t=0$ та $t=1$.

4. Канонічне рівняння прямої в просторі

З параметричного рівняння прямої можна виключити параметр t і записати результат у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Це **канонічне рівняння прямої** в просторі.

У знаменнику канонічних рівнянь допускається нульове значення.

4. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Кожна пряма в просторі однозначно задається будь-якими двома своїми різними точками. Якщо відомі координати цих точок

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то в якості напрямного вектора прямої підходить ненульовий вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)$. Знаючи його координати і координати точки M_1 на прямій, можна записати канонічне рівняння прямої. В результаті отримаємо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Це **рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.**

Приклад 18. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(1;2;3)$ і $M_2(3;2;1)$.

Розв'язання. $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z-3}{1-3}$.

Нуль в знаменнику другого дроба означає, що для координат всіх точок прямої виконано рівність $y=2$. Тому пряма розташована у площині $y-2=0$, яка паралельна координатній площині xOz і перетинає вісь ординат у точці з ординатою 2.►

Приклад 19. Знайти координати точки B, яка симетрична точці

A (2; 3; -1) відносно прямої $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

Розв'язання. В обчисленнях будемо спиратися на наступну геометричну побудову точки *B*: а) через точку *A* проводимо площину π, яка перпендикулярна прямій *L;* б) знаходимо точку *M* перетину прямої *L* і площини π; в) відрізок *AM* продовжуємо до відрізка *AB* так, щоб точка *M* опинилася в середині відрізка *AB* (рис. 14).

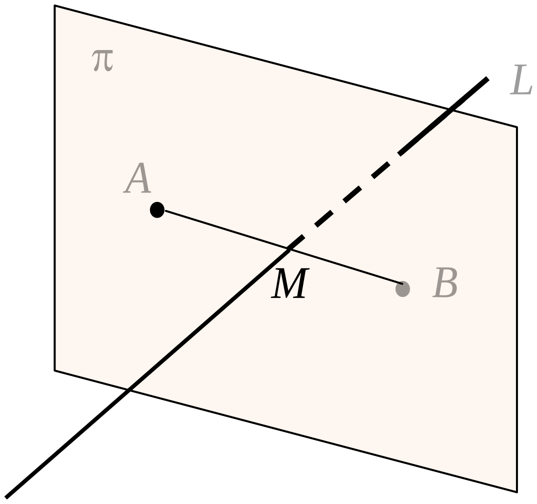


Рис. 14. Побудова точки, яка симетрична заданій точці відносно прямої

Оскільки площина π перпендикулярна прямій *L*, то в якості нормального вектора $\vec{n}$ площини можна вибрати напряний вектор прямої *L:* $\vec{n} = (1,-1,2)$. З відомих координат нормального вектора площини π і точки *A*, що належить їй, записуємо рівняння площини в загальному вигляді: $1(x-2)+(-1)(y-3)+2(z+1)=0$. Щоб знайти координати точки *M* перетину прямої і площини за їх рівнянями, запишемо параметричне рівняння прямої *L*: $x = 1+t,\ y = -2-t,\ z = 1+2t$.

Підставимо ці вирази для координат точки на прямій в рівняння площини, одержимо рівняння для параметра *t*:

$(1+t-2)-(-2-t-3)+2(1+2t+1)=0,$ розв'язок якого дає значення параметра для точки *M*. Знайдемо: $t = -\dfrac{4}{3}$ і підставимо його в параметричне рівняння прямої, отримаємо координати точки перетину прямої і площини:

$$x = 1 - 4/3 = -1/3,\ y = -2 + 4/3 = -2/3,\ z = 1 - 8/3 = -5/3$$

Оскільки ця точка повинна ділити відрізок *AB* навпіл, її координати рівні напівсумі відповідних координат точок A і B. Отже, позначивши через $\left(x_M; y_M; z_M\right)$ координати точки *B*, отримаємо рівності

$$\frac{2 + x_M}{2} = -1/3,\ y_M = -11/3,\ z_M = -7/3.$$

Звідси: $x_M = -8/3,\ y_M = -11/3,\ z_M = -7/3.$►

Розглянемо способи переходу від загальних рівнянь до канонічних або параметричних.

Перший спосіб полягає в тому, що в системі $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ для *z* призначають два різних значення та за формулами Крамера знаходять два різних розв'язки системи двох рівнянь з двома невідомими *x* і *y*. Ці два розв'язки дають координати двох різних точок M_1 і M_2 на прямій перетину площин. А дві відомі точки на прямій дозволяють знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки, яке фактично збігається з канонічними рівняннями прямої.

Другий спосіб. В якості напрямного вектора $\vec{s}$ прямої, яка задана загальними рівняннями площин, можна вибрати $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ - векторний добуток двох нормальних векторів площин (рис. 15). Дійсно, цей векторний добуток є вектором, який ортогональний кожному нормальному вектору, а тому він паралельний як одній, так і іншій площині, тобто паралельний їх лінії перетину.

Приклад 20. Знайти канонічне рівняння прямої, яка збігається з лінією перетину площин $\pi_1 : x - y + z - 2 = 0,\ \pi_2 : x + y - z = 0$.

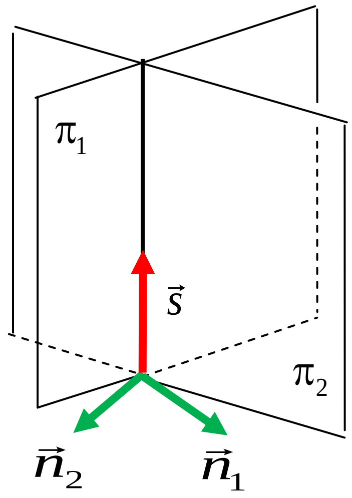


Рис. 15

Розв'язання. Щоб знайти координати деякої точки на прямій, підставляємо в рівняння площин $z = 0$ і розв'яжемо відповідну систему

двох лінійних рівнянь щодо x і y: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}.$

$x = 1$ і $y = -1$. Точка з координатами (1; -1; 0) розташована на шуканій прямій. В якості напрямного вектора шуканої прямої беремо векторний добуток $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ нормальних векторов площин π_1 і π_2:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2j + 2k.$$

Напрямний вектор прямої $\vec{s} = (0,2,2)$. Знайдений вектор можна замінити колінеарним йому вектором $(0,1,1)$.

Канонічне рівняння шуканої прямої: $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$.►

Взаємне розташування прямих і площин

1. Взаємне розташування площин

Нехай в прямокутній системі координат задано дві площини:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Один з двох кутів між цими площинами (позначимо його через φ) дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 16), а інший кут дорівнює $\pi - \varphi$. Тому, згідно з визначенням скалярного добутку,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Якщо дві дані площини перпендикулярні, то це еквівалентно тому, що їх нормальні вектори ортогональні. Критерієм ортогональності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

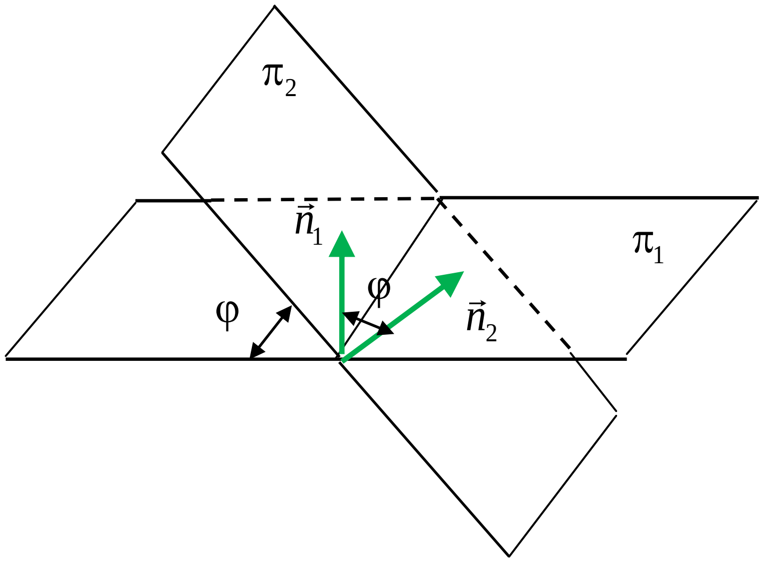


Рис 16. Кут між площинами

Дві площини паралельні, якщо їх нормальні вектори колінеарні:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Зауваження . Ця подвійна рівність має сенс і в тому випадку, коли в знаменнику одного з дробів стоїть нуль. Це означає, що і в чисельнику дроба стоїть нуль.

Паралельні площини можуть збігатися або бути різними. Ліві частини загальних рівнянь співпадаючих площин відрізняються на ненульовий числовий множник, і це можна записати як рівність відношень відповідних коефіцієнтів їх рівнянь: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}.$

Випадок $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$ відповідає тому, що площини паралельні, але не збігаються.

Кут між прямими

Кут між двома прямими можна знайти, використовуючи напрямні вектори прямих. Гострий кут між прямими дорівнює куту між їх напрямними векторами (рис. 17) або є доповнюючим до нього, якщо кут між напрямними векторами тупий. Таким чином, якщо для прямих L_1 і L_2 відомі напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$, то гострий кут φ між цими прямими визначається через скалярний добуток: $cos\,\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$.

Використовуючи формули для обчислення довжини вектора і скалярного добутку векторів в координатах, отримаємо:

$$cos\,\varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

де $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$.

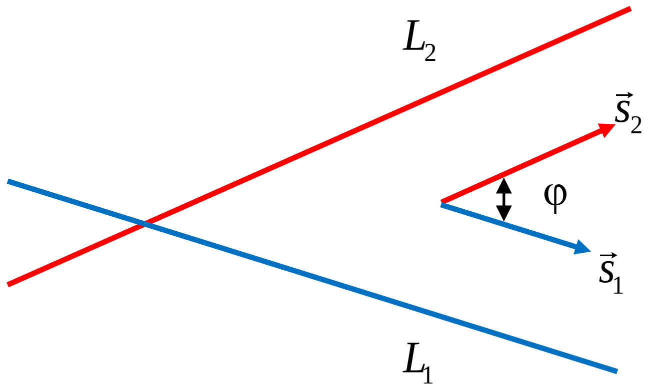


Рис. 17. Кут між прямими

Взаємне розташування прямих

Для двох прямих у просторі можливі чотири випадки:
- прямі збігаються;
- прямі паралельні (але не збігаються);
- прямі перетинаються;
- прямі є мимобіжними, тобто не мають спільних точок і непаралельні.

Нехай прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями:

$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Для кожної прямої з її канонічних рівнянь відразу визначаємо точку на ній $M_1(x_1;y_1;z_1) \in L_1$, $M_2(x_2;y_2;z_2) \in L_2$ і координати напрямних векторів $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ для L_1, і $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ для L_2.

Якщо прямі збігаються або паралельні, то їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ колінеарні:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Якщо прямі співпадають, то напрямним векторам колінеарен і вектор

$\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{x_2-x_1}{l_1} = \frac{y_2-y_1}{m_1} = \frac{z_2-z_1}{n_1}.$$

Ця подвійна рівність також означає, що точка M_2 належить і прямій L_1. Отже, умовою співпадіння прямих є виконання останніх двох рівностей одночасно.

Якщо прямі перетинаються або є мимобіжними, то їх напрямні вектори неколінеарні. Прямі, які перетинаються належать одній площині і, отже, вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ є компланарними:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

При $\Delta\neq 0$ прямі не належать одній площині і тому є мимобіжними.

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями:

$$L_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \text{ і } L_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases},$$

то ми можемо, аналізуючи взаємне розташування прямих, розглянути систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}.$$

Взаємне розташування прямих характеризується кількістю розв'язків цієї системи. Якщо прямі співпадають, то система має нескінченну кількість розв'язків. Якщо прямі перетинаються, то ця система має єдиний розв'язок. У разі паралельних або мимобіжних прямих розв'язків немає. Останні два випадки можна розділити, якщо знайти напрямні вектори прямих. Для цього достатньо обчислити два векторних добутки $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ і $\vec{n}_3\times\vec{n}_4$, де $\vec{n}_i=\left(A_i;B_i;C_i\right)$, $i=\overline{1\div 4}$. Якщо отримані вектори колінеарні, то задані прямі паралельні.

Приклад 21. Дослідити взаємне розташування прямих

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{та} \quad L_2: \begin{cases} x-y-z+1=0 \\ x+y+2z-2=0 \end{cases}$$

Розв'язання. Напрямний вектор $\vec{s}_1$ прямої L_1 знаходимо за канонічним рівнянням цієї прямої: $\vec{s}_1 = (1;3;-2)$. Напрямний вектор $\vec{s}_2$ прямої L_2 обчислюємо за допомогою векторного добутку нормальних векторів площин, перетином яких вона є: $\vec{s}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -i - 3j + 2k$.

Оскільки $\vec{s}_1 = -\vec{s}_2$, то прямі паралельні або збігаються. Підставимо координати точки $M_0(1;2;-1) \in L_1$ в загальні рівняння прямої L_2. Для першого з них отримуємо 1 = 0. Отже, точка не належить прямій L_2 і прямі є паралельними.►

Взаємне розташування прямої і площини

Нехай площина π задана загальним рівнянням $\pi: A_x + B_y + C_z + D = 0$

а пряма L - канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$.

1) **Пряма L і площина π перетинаються**.

Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої не паралельний площині π. Значить, нормальний вектор $\vec{n}$ площини не ортогональний вектору $\vec{s}$, тобто їх скалярний добуток не дорівнює нулю: $Al + Bm + Cn \neq 0$.

2) **Пряма і площина паралельні або пряма належить площині.**

Має виконуватись умова $\vec{s} \perp \vec{n}$, яка в координатах зводиться до рівності

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Щоб розділити випадки "паралельні" і "пряма належить площині", потрібно перевірити, чи належить точка прямої даній площині. Таким чином, всі три випадки взаємного розташування прямої і площини розділяються шляхом перевірки відповідних умов:

$$L \text{ належить } \pi \iff \begin{cases} Ax_0 + Dy_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0; \end{cases}$$

$$L \text{ паралельна } \pi \iff \begin{cases} Ax_0 + Dy_0 + Cz_0 + D \neq 0, \\ Al + Bm + Cn = 0; \end{cases}$$

$$L \text{ перетинається з } \pi \iff Al + Bm + Cn \neq 0.$$

Якщо пряма L задана своїм загальним рівнянням:

$$L: \begin{cases} A_1x + D_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + D_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

то проаналізувати взаємне розташування прямої і площини π можна наступним чином. Із загальних рівнянь прямої та загального рівняння площини складемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + D_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + D_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + Dy + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Якщо ця система не має розв'язків, то пряма паралельна площині. Якщо вона має єдиний розв'язок, то пряма і площина перетинаються в єдиній точці. Останнє рівнозначно тому, що визначник системи відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нарешті, якщо система має нескінченну кількість розв’язків, то пряма належить площині.

Кут між прямою і площиною

Кут φ між прямою $L: \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ і площиною $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ знаходиться в межах від 0° (в разі паралельності) до 90° (в разі перпендикулярності прямої і площини). Синус цього кута дорівнює $|\cos\psi|$, де - ψ - кут між напрямним вектором прямої і нормальним вектором площині (рис. 18):

$$sin\varphi = |cos\psi| = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

$$\varphi = arcsin\left(\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right).$$

Умова перпендикулярності прямої і площини еквівалентна тому, що нормальний вектор площини і напрямний вектор прямої колінеарні. Через координати векторів ця умова записується у вигляді подвійного рівності:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Відстань до площини і до прямої

1) Відстань від точки до площини.

Розглянемо в просторі деяку площину π і довільну точку M_0. Виберемо для площини одиничний нормальний вектор $\vec{n}^0$ з початком в деякій точці $M_1 \in \pi$, і нехай $d(M_0, \pi)$ - відстань від точки M_0 до площини π. Тоді $d(M_0, \pi) = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0} \right| = \left| n\overrightarrow{M_1M_0} \right|$, (рис. 19), оскільки $|\vec{n}| = 1$.

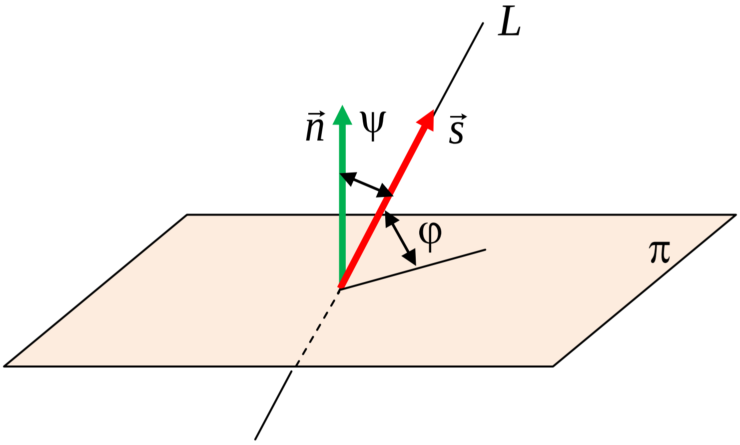


Рис 18. Кут між прямою і площиною

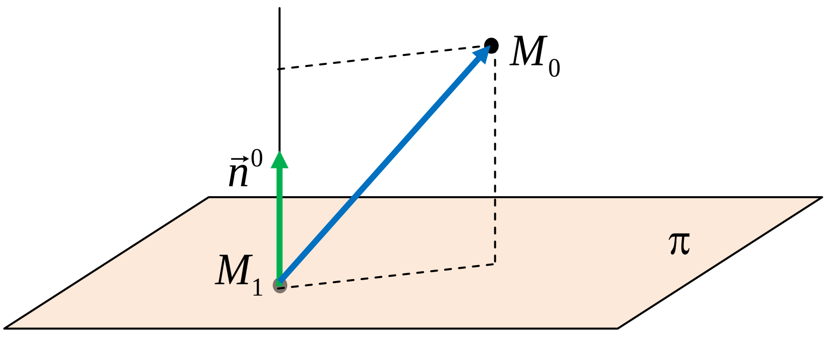


Рис. 19. Відстань від точки до площини

Якщо площина π задана в прямокутній системі координат своїм загальним рівнянням $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, то її нормальним вектором є вектор з координатами (*A; B; C*) і за одиничний нормальний вектор можна вибрати $\vec{n}=\frac{(A;B;C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ Нехай $(x_0;y_0;z_0)$ і $(x_1;y_1;z_1)$ - координати точок M_0 і M_1. Тоді виконується рівність: $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, оскільки точка M_1 належить площині, то можна знайти координати вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$: $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1;z_0-z_1)$.

Запишемо скалярний добуток $\left(\vec{n},\overrightarrow{M_1M_0}\right)$ в координатній формі і зробимо перетворення:

$$d(M,\pi)=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

оскільки $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$. Отже, щоб обчислити відстань від точки до площини потрібно підставити координати точки в загальне рівняння площини, а потім результат за абсолютною величиною розділити на нормуючий множник, що дорівнює довжині відповідного нормального вектора.

2) Відстань від точки до прямої.

Відстань від точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ до прямої *L*, заданої канонічним рівнянням: $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ може бути обчислена за допомогою векторного добутку. Дійсно, канонічні рівняння прямої дають нам точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на прямій і напрямний вектор $\vec{s}=(l,m,n)$ цієї прямої. Побудуємо паралелограм на векторах $\vec{s}$ і $\overrightarrow{M_1M_0}$. Тоді відстань від точки M_1 до прямої L дорівнюватиме висоті h паралелограма (рис. 20). Отже, потрібна відстань може бути обчислена за формулою:

$d(M_1, L) = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$, де чисельник є площею цього паралелограма.

Використовуючи формули обчислення довжини вектора і векторного добутки векторів через їх координати, отримуємо

$$d(M_1, L) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

3) Відстань між прямими

Про відстань між прямими має сенс говорити, якщо вони паралельні або є мимобіжними. Щоб знайти **відстань між паралельними прямими**, достатньо обчислити відстань від довільної точки, наприклад, другий прямий до першої прямої.

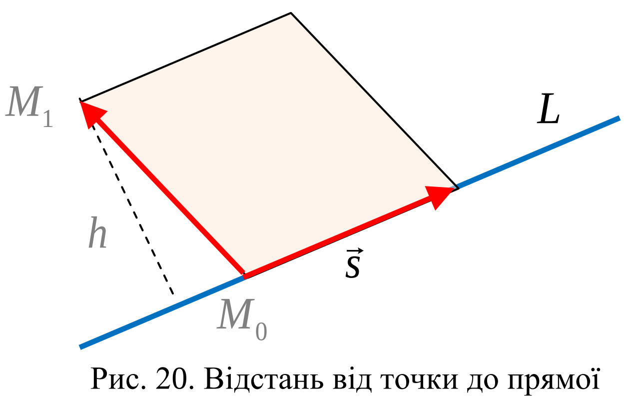


Рис. 20. Відстань від точки до прямої

Таким чином, якщо дві паралельні прямі задані канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

то відстань між ними обчислюється за формулою:

$$d(L_1, L_2) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}.$$

Відстань між мимобіжними прямими можна знаходити, використовуючи змішаний добуток. Нехай прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями. Оскільки вони мимобіжні, їх напрямні вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, що з'єднує точки на прямих, некомпланарні (рис. 21). Відстань між прямими дорівнює висоті h цього паралелепіпеда. Висоту паралелепіпеда можна обчислити як відношення об'єму паралелепіпеда до площі його основи. Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю змішаного добутку трьох зазначених векторів, а площа паралелограма в основі паралелепіпеда дорівнює модулю векторного добутку напрямних векторів прямих. В результаті отримуємо формулу для відстані між прямими:

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|}.$$

Запишемо змішаний і векторний добуток в координатах:

$$d(L_1, L_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.$$

4) Відстань між прямою і площиною

Якщо пряма L і площина π перетинаються, то відстань між ними дорівнює нулю. Якщо ж вони паралельні, то відстанню від прямої до площини є відстань від будь-якої точки прямої до площини. Нехай площина задана загальним рівнянням $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, а пряма — канонічним рівнянням $L: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. Канонічне рівняння прямої дозволяє відразу знайти координати однієї точки на цій прямій: $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тому відстань $d(L,\pi)$ між прямою L і площиною π, якій вона паралельна, дорівнює:

$$d(L,\pi)=d(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

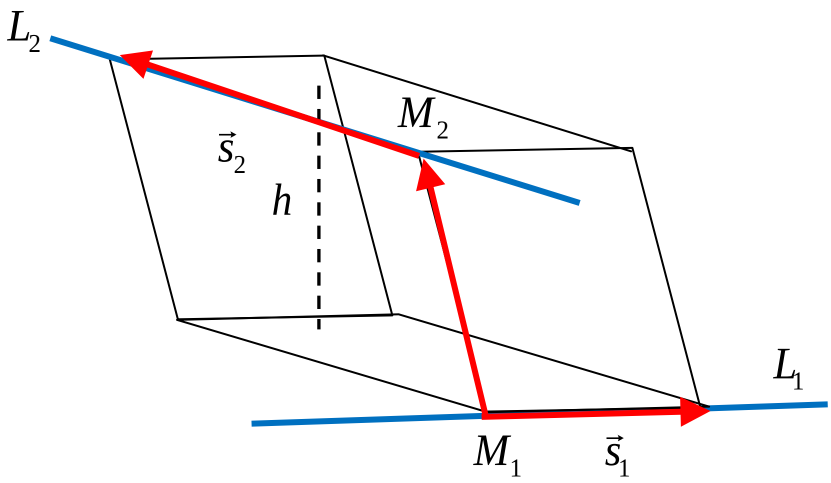


Рис. 21. Відстань між мимобіжними прямими

Приклади розв'язання задач

Приклад 22. Знайти рівняння площини, яка ділить двогранний кут між площинами $2x+y-z-4=0$ *і* $x-2y+z+1=0$ навпіл.

Розв'язання. Шукана площина – це геометричне місце точок, які рівновіддалені від двох заданих площин. Нехай точка ($x,y.z$) належить шуканій площині, тоді відстані від цієї точки до двох заданих площин рівні, отже: $$\frac{|2x+y-z-4|}{\sqrt{6}}=\frac{|x-2y+z+1|}{\sqrt{6}}.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x+y-z-4=x-2y+z+1\\ 2x+y-z-4=-x+2y-z-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3y-2z-5=0\\ 3x-y-3=0\end{array}\right..$$ Отримані рівняння є рівняннями двох біссекторних взаємоперпендикулярних площин.

Відповідь: $x+3y-2z-5=0$ *і* $3x-y-3=0$.

Приклад 23. Написати рівняння площини, яка рівновіддалена від двох заданих площин $x-2y+4z+1=0$ *і* $4x-8y+16z+57=0$.

Розв'язання. Шукана площина – це геометричне місце точок, які рівновіддалені від двох заданих паралельних площин. Нехай точка ($x,y.z$) належить шуканій площині, тоді відстані від цієї точки до двох заданих площин рівні, отже: $$\frac{|x-2y+4z+1|}{\sqrt{21}}=\frac{|4x-8y+16z+57|}{4\sqrt{21}}.$$

$$\left[\begin{array}{l}4x-8y+16z+4=4x-8y+16z+57\\ 4x-8y+16z+4=-4x+8y-16z-57\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing\\ 8x-16y+32z+61=0\end{array}\right..$$

Отримане рівняння є рівнянням площини, яка паралельна двом заданим і ділить відстань між ними навпіл.

Відповідь: $8x - 16y + 32z + 61 = 0$.

Приклад 24. Записати рівняння площини, яка проходить через точку (2,1,-1) і відтинає від координатного кута піраміду з об'ємом 12 од. куб. Відрізки, що відтинаються на осях *Oy* і *Oz* однакові.

Розв'язання. Будемо шукати рівняння площини, як рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Але, за умовою, $b = c$. Підставивши координати точки отримаємо рівняння: $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow a = 2$. За формулою об'єму піраміди: $12 = \frac{1}{6} \cdot b^2 \cdot a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -3 \end{array}\right.$. Шукані рівняння: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ і $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} = 1$

Відповідь: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$ або $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} = 1$.

Приклад 25. Знайти рівняння площини, яка рівновіддалена від двох заданих точок $M(0,-1,4)$ i $N(2,2,-2)$ і проходить через точку $A(3,0,-4)$.

Розв'язання. Будемо шукати рівняння площини в загальному вигляді: $Ax + By + Cz + D = 0$. Вектор $\overrightarrow{MN} = (2,3,-6)$ буде вектором нормалі до шуканої площини. Тоді $2x + 3y - 6z + D = 0$. Підставивши координати точки *A*, знайдемо D: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot (-4) + D = 0 \Rightarrow D = -30$.

Відповідь: $2x + 3y - 6z - 30 = 0$.

Приклад 26. Записати рівняння площини, яка проходить через задану пряму $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$ і точку (0,1,5).

Розв'язання. Вектором нормалі шуканої площини буде вектор векторного добутку напрямного вектора прямої і вектора $\overrightarrow{MN}$, де M(0,2,-1) – точка, яка належить прямій, а $N(0{,}1{,}5)$ – задана точка. $\overrightarrow{MN}=(0,-1,6)$.

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}=8\vec{i}+18\vec{j}+3\vec{k}=(8,18,3)$$

Рівняння площини набуде вигляду: $8x+18y+3z+D=0$. Підставивши координати точки $N(0{,}1{,}5)$, знайдемо D=-33.

Відповідь: $8x+18y+3z-33=0$.

Приклад 27. Записати рівняння площини, яка проходить через прямі $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{0}$ і $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{2}$.

Розв'язання. Перевіримо, чи можна провести через ці прямі площину: напрямні вектори прямих і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, (де $M_1(0,-2,1)$ і $M_2(-1,1,-3)$ - точки, що належать прямим) повинні бути компланарними. Умова компланарності векторів: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-2\neq 0$.

Отже, прямі мимобіжні і площину провести неможливо.

Відповідь: такої площини не існує.

Приклад 28. Записати рівняння площини, яка проходить через початок координат ортогонально прямій $\begin{cases} y-3z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$.

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння прямої: $\begin{cases} \dfrac{y}{3}=z \\ \dfrac{x}{-5}=z \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x}{-5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$. Отже, пряма проходить через початок координат, а її напрямний вектор - це вектор нормалі шуканої площини. $-5x+3y+z=0$.**Відповідь:** $-5x+3y+z=0$.

Приклад 29. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M\left(3,-2,-4\right)$ паралельно площині $3x-2y-3z-7=0$ і такої, що перетинає пряму $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Рівняння прямої будемо шукати в канонічному вигляді: $\dfrac{x-3}{m}=\dfrac{y+2}{n}=\dfrac{z+4}{p}$. Напрямний вектор шуканої прямої і вектор нормалі площини ортогональні за умовою: $3m-2n-3p=0$. Умова перетину прямих: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=-6m-17n-8p=0$.

Маємо систему: $\begin{cases} 3m-2n-3p=0 \\ 6m+17n+8p=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{9}p;\ n=-\dfrac{6}{9}p$.

$$\frac{x-3}{\frac{5}{9}p}=\frac{y+2}{-\frac{6}{9}p}=\frac{z+4}{p}\Leftrightarrow\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}.$$

Відповідь: $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$.

Приклад 30. Знайти відстань від точки M(-1,2,3) до прямої $\begin{cases}3x+4y-z-6=0\\ x-3y+2z=0\end{cases}$.

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння прямої: нехай $z_0=1$, тоді $\begin{cases}3x_0+4y_0=7\\ x_0-3y_0=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=1\\ x_0=1\end{cases}$;

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=5\vec{i}-7\vec{j}-13\vec{k}=(5,-7,-13)$$

$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z-1}{-13}$. $\overline{M_1M}=(-2;1;2)$.

Тоді $d(M;L)=\dfrac{\left|\overline{M_1M}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\dfrac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -7 & -13\\ -2 & 1 & 2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{25+49+169}}=\dfrac{\sqrt{1+256+81}}{\sqrt{243}}=\dfrac{13\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$.

Відповідь: $d(M;L)=\dfrac{13\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$.

Приклад 31. Задано пряму $L:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$. Написати канонічне рівняння цієї прямої, а також рівняння її проекції на координатну площину xOz.

Розв'язання. Знайдемо будь-яку точку, яка належить прямій, наприклад $M(0;2;2)$. Напрямний вектор знаходимо через векторний добуток векторів нормалей площин: $\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}=(-1,-2,-3)$.

Канонічне рівняння: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{-3}$.

Отримана пропорція еквівалентна системі трьох рівнянь:

$\begin{cases} -2x+y-2=0 \\ -3x+z-2=0 \\ -3y+2z+2=0 \end{cases}$. Ці рівняння описують три площини, які проектують задану пряму на координатні площини xOy, xOz і yOz відповідно. В нашому випадку рівняння $-3x+z-2=0$ буде рівнянням проекції заданої прямої на площину xOz.

Відповідь: канонічне рівняння прямої $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{-3}$; рівняння проекції на площину xOz: $-3x+z-2=0$.

Приклад 32. Задано мимобіжні прямі:

$L_1:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{1}$; $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Знайти відстань між прямими та рівняння спільного перпендикуляра до цих прямих.

Розв'язання. Знайдемо рівняння площини α, яка містить пряму L_1 і паралельна L_2 (рис. 22).

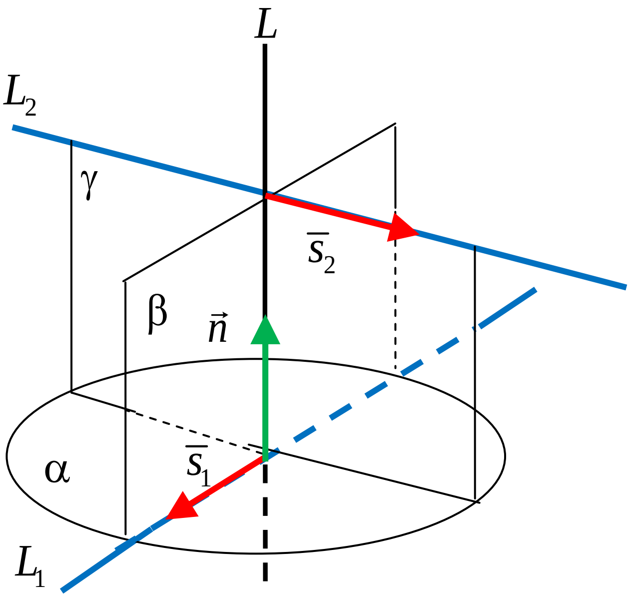


Рис. 22. Відстань між мимобіжними прямими та рівняння спільного перпендикуляра

Точка $M_1(0;1;-2) \in L_1$ і $M_1(0;1;-2) \in \alpha$. Вектором нормалі шуканої площини буде $\vec{n} = [\vec{s}_1, \vec{s}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2i - j - 4k$. Отже, рівняння шуканої площини α : $-2x - (y-1) - 4(z+2) = 0$, або $2x + y + 4z + 7 = 0$

Відстань $d(L_1; L_2)$ дорівнює відстані від будь-якої точки прямої L_2 до площини α. Візьмемо точку $M_2(-1;-1;2) \in L_2$.

$$d(L_1; L_2) = \frac{|2x_2 + y_2 + 4z_2|}{\sqrt{21}} = \frac{|2(-1) + (-1) + 4(2) + 7|}{\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Для того, щоб скласти рівняння спільного перпендикуляра, знайдемо рівняння площин β та γ, які містять прямі L_1 та L_2 відповідно і такі, що перпендикулярні площині α. Маємо: $M_1(0;1;-2)\in\beta;\ \vec{n}_\beta=[\vec{s}_1,\vec{n}]=i-10j+2k;\vec{n}_\beta\perp\beta$.Тоді, $\beta: x-10y+2z+14=0$. Аналогічно, $\gamma: 3x-2y-z+3=0$. Рівняння спільного перпендикуляра – це пряма перетину цих площин. Загальне рівняння спільного перпендикуляра: $L:\begin{cases}x-10y+2z+14=0\\3x-2y-z+3=0\end{cases}$.

Відповідь: $d(L_1;L_2)=\dfrac{12}{\sqrt{21}}$,

спільний перпендикуляр: $L:\begin{cases}x-10y+2z+14=0\\3x-2y-z+3=0\end{cases}$

Тема 2. Завдання для самостійного опрацювання

2.1. Дано: площина $\pi: -2x+y-z+1=0$ і точка $M(1;1;1)$. Скласти рівняння площини π_1, яка містить точку M і паралельна площині π, обчислити відстань $d(\pi_1;\pi)$.

2.2. Дано: площина $\pi: x-y-1=0$ і точка $M(1;1;2)$. Скласти рівняння площини π_1, яка містить точку M і паралельна площині π, обчислити відстань $d(\pi_1;\pi)$.

2.3. Скласти рівняння площини π_1, яка містить точки $M_1(1;2;0)$ і $M_2(2;1;1)$ і перпендикулярна площині $\pi: -x+y-1=0$.

2.4. Скласти рівняння площини π_1, яка містить точки $M_1(0;1;1)$ і $M_2(2;0;1)$ і перпендикулярна площині $\pi: 2x-y+z+1=0$.

2.5. Скласти рівняння площини, яка роходить через точку $M(1;1;1)$ паралельно векторам $\vec{a}_1=(0;1;2)$ і $\vec{a}_2=(-1;0;1)$.

2.6. Скласти рівняння площини, яка роходить через точку $M(0;1;2)$ паралельно векторам $\vec{a}_1=(2;0;1)$ і $\vec{a}_2=(1;1;0)$.

2.7. Скласти рівняння площини, яка роходить через точки $M_1(1;2;0)$ і $M_2(2;1;1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(3;0;1)$.

2.8. Скласти рівняння площини, яка роходить через точки $M_1(1;1;1)$ і $M_2(2;3;-1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(0;-1;2)$.

2.9. Скласти рівняння площини, яка роходить через точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ і $M_3(3;0;1)$.

2.10. Скласти рівняння площини, яка роходить через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;-1;2)$ і $M_3(2;3;-1)$.

2.11. Дослідити взаємне розташування площин

$\pi_1: -x+2y-z+1=0$ і

$\pi_2: y+3z-1=0$. Якщо площини паралельні – знайти відстань між ними, а якщо перетинаються – знайти рівняння прямої перетину.

2.12. Дослідити взаємне розташування площин

$\pi_1: 2x-y+z-1=0$ і

$\pi_2: -4x+2y-2z-1=0$. Якщо площини паралельні – знайти відстань між ними, а якщо перетинаються – знайти рівняння прямої перетину.

2.13. Дослідити взаємне розташування площин $\pi_1: x-y+1=0$ і

$\pi_2 : y - z + 1 = 0$. Якщо площини паралельні – знайти відстань між ними, а якщо перетинаються – знайти рівняння прямої перетину.

2.14. Дослідити взаємне розташування площин

$\pi_1 : 2x - y - z + 1 = 0$ і

$\pi_2 : -4x + 2y + 2z - 2 = 0$. Якщо площини паралельні – знайти відстань між ними, а якщо перетинаються – знайти рівняння прямої перетину.

2.15. Обчислити об'єм піраміди, яка обмежена площиною $\pi : 2x - 3y + 6z - 12 = 0$ та координатними площинами.

2.16. Скласти рівняння площини, яка містить точку $M_0\left(1; 7; -5\right)$ і відтинає від осей координат додатні рівні відрізки.

2.17. Три грані тетраедра, розташованого в другому октанті $\left(x < 0; y > 0; z > 0\right)$, співпадають із координатними площинами. Скласти рівняння четвертої грані, якщо відомі довжини ребер, які її обмежують:

$AB = 6; BC = \sqrt{29}; AC = 5$. Знайти висоту OH тетраедра.

2.18. Скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути утворені перетином площин $\pi_1 : x - 3y + 2z - 5 = 0$ і

$\pi_2 : 3x - 2y - z + 3 = 0$.

2.19. Скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути утворені перетином площин $\pi_1 : 2x - y + 5z - 3 = 0$ і

$\pi_2 : 2x - 10y + 4z - 2 = 0$.

2.20. Скласти рівняння площини, яка рівновіддалена від площин

$\pi_1 : 4x - y - 2z - 3 = 0$ і $\pi_2 : 4x - y - 2z - 5 = 0$.

2.21. Скласти рівняння площини, яка рівновіддалена від площин $\pi_1 : 5x-3y+z+3=0$ і $\pi_2 : 10x-6y+2z+7=0$.

2.22. Відомі координати вершин тетраедра $A(2;0;0);B(5;3;0);C(0;1;1);D(-2;-4;1)$. Скласти рівняння всіх граней тетраедра.

2.23. Скласти рівняння площини, яка містить точку $A(1;1;-1)$ і перпендикулярна до площин $2x-y+5z+3=0;\ x+3y-z-7=0$.

2.24. Пряма L задана загальним рівнянням $L:\begin{cases}2x-y+2z-3=0\\ x+2y-z-1=0\end{cases}$.

Записати канонічне рівняння цієї прямої.

2.25. Пряма L задана загальним рівнянням $L:\begin{cases}x+2y-3z-5=0\\ 2x-y+z+2=0\end{cases}$.

Записати канонічне рівняння цієї прямої.

2.26. Скласти канонічне рівняння прямої, яка містить точку $M_0(2;0;-3)$ паралельно: а) вектору $\vec{s}=(2;-3;5)$; б) прямій $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$; в) осі Ox.

2.27. Скласти канонічне рівняння прямої, яка містить точку $M_0(2;0;-3)$ паралельно: а) прямій $\begin{cases}x=-2+t\\ y=2t\\ z=1-\dfrac{1}{2}t\end{cases}$; б) прямій $L:\begin{cases}3x-y+2z-7=0\\ x+3y-2z-3=0\end{cases}$; в) осі Oz.

2.28. Скласти рівняння прямої, яка містить точки $M_1(1;-2;1)$, $M_2(3;1;-1)$.

2.29. Скласти рівняння прямої, яка містить точки $M_1(3;-1;0)$, $M_2(1;0;-3)$.

2.30. Задані пряма $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ і точка $M(0;1;2)\notin L$ (перевірити). Скласти рівняння площини, яка проходить через задані пряму і точку.

2.31. Задані пряма $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ і точка $M(0;1;2)\notin L$ (перевірити). Скласти рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно прямій.

Скласти рівняння перпендикуляра проведеного з точки на пряму.

2.33. Задані пряма $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ і точка $M(0;1;2)\notin L$ (перевірити). Обчислити відстань від заданої точки до заданої прямої.

2.34. Задані пряма $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ і точка $M(0;1;2)\notin L$ (перевірити). Знайти проекці. Заданої точки на задану пряму.

2.35. Задані площина $\pi_1 : x+y-z+1=0$ і пряма $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ ($L\notin\pi_1$, перевірити). Обчислити синус кута між ними.

2.36. Задані площина $\pi : x+y-z+1=0$ і пряма $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ ($L\notin\pi_1$, перевірити). Скласти рівняння площини, яка містить пряму L і перпендикулярна площині π.

2.37. Задані площина $\pi: x+y-z+1=0$ і пряма $L: \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ ($L \notin \pi_1$, перевірити). Скласти рівняння проекції прямої L на площину π.

2.38. Довести, що прямі

$$L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}; \quad L_2: \frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$$

належать одній площині і скласти рівняння цієї площини.

2.39. Довести, що прямі

$$L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}; \quad L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$$

належать одній площині і скласти рівняння цієї площини.

2.40. Знайти відстань від точки $A(2;3;-1)$ до прямої

$$L: \begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}.$$

2.41. Знайти відстань від точки $A(2;3;-1)$ до прямої $L: \begin{cases} x=3t+5 \\ y=2t \\ z=-2t-25 \end{cases}$.

2. 42. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки перетину площини

$x-3y+2z+1=0$ з прямими

$$\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}; \quad \frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z-5}{2}.$$

2.43. При якому значенні λ площина $5x-3y+\lambda z+1=0$ буде паралельна прямій $\begin{cases} x-4z-1=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$.

2.44. Знайти рівняння проекції прямої $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{4}$ на площину $x-3y-z+8=0$.

2.45. Визначити кут між прямою $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$ і площиною, яка проходить через точки.

2.46. Скласти рівняння площини, яка містить точку $M(7;1;0)$, паралельна площині $2x+3y-z-15=0$ і перетинає пряму $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

2.47. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;-2;-4)$ паралельно площині $3x-2y-3z-7=0$ і перетинає пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

2.48. Задано дві прямі

$L_1:\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$; $L_2:\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$. Довести, що прямі мимобіжні та знайти відятань між ними і рівняння спільного перпендикуляра.

2.49. Задано дві прямі

$L_1:\frac{x-6}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+3}{4}$; $L_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-4}{8}$. Довести, що прямі мимобіжні та знайти відятань між ними і рівняння спільного перпендикуляра.

2.50. Задано дві прямі $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y-9}{4}=\frac{z+2}{-3}$; $L_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{9}$.

Довести, що прямі мимобіжні та знайти відятань між ними і рівняння спільного перпендикуляра.

2.51. Задано дві прямі

$L_1: \frac{x+7}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$; $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+8}{2} = \frac{z+12}{-1}$. Довести, що прямі мимобіжні та знайти відятань між ними і рівняння спільного перпендикуляра.

2.52. Куб заданий своїми вершинами

$A(0;0;0); B(1;0;0); C(1;1;0); D(0;1;0)$;

$A_1(0;0;1); B_1(1;0;1); C_1(1;1;1); D_1(0;1;1)$.

Знайти:

1) рівняння прямих A_1C і BC_1;

2) обчислити відстань між прямими A_1C і BC_1;

3) скласти рівняння спільного перпендикуляра до прямих A_1C і BC_1;

4) скласти рівняння площини, яка проходить через точки P, Q, H, де P - центр грані ABB_1A_1; Q - ділить BC_1 у відношенні 1:3; і H розташована на ребрі BB_1 так, що довжина вектора $\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HQ}$ мінімальна;

5) визначити кут між площиною з п. 4 та діагоналлю BD_1.

Тема 3. Криві другого порядку

Короткі теоретичні відомості і приклади

Крива другого порядку на площині в прямокутній системі координат описується рівнянням $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

в якому коефіцієнти A, B, C одночасно не обертаються в нуль.

1. Еліпс

Множину усіх точок на площині, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 є задана постійна величина, називають **еліпсом**.

Фіксовані точки F_1 і F_2 називають **фокусами еліпса**, відстань між ними, яка (позначена через $2c$), — **фокальною відстанню**, а відрізки F_1M і F_2M , які з'єднують довільну точку M на еліпсі з його фокусами, — **фокальними радіусами.** Вид еліпса повністю визначається відстанню $|F_1F_2| = 2c$ та параметром a, а його положення на площині — парою точок F_1 і F_2 . З визначення еліпса випливає, що він симетричний відносно прямої, яка проходить через фокуси F_1 і F_2, а також до прямої, яка ділить відрізок F_1F_2 навпіл і перпендикулярна йому (рис. 23). Ці прямі називають **осями еліпса**. Точка O їх перетину є центром симетрії еліпса, і її називають **центром еліпса**, а точки перетину еліпса з осями симетрії (точки A, B, C і D на рис. 23) — **вершинами еліпса**.

Число a називають **великою піввіссю еліпса**, а $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ – його **малою піввіссю**. Неважко помітити, що при $c > 0$ велика піввісь a

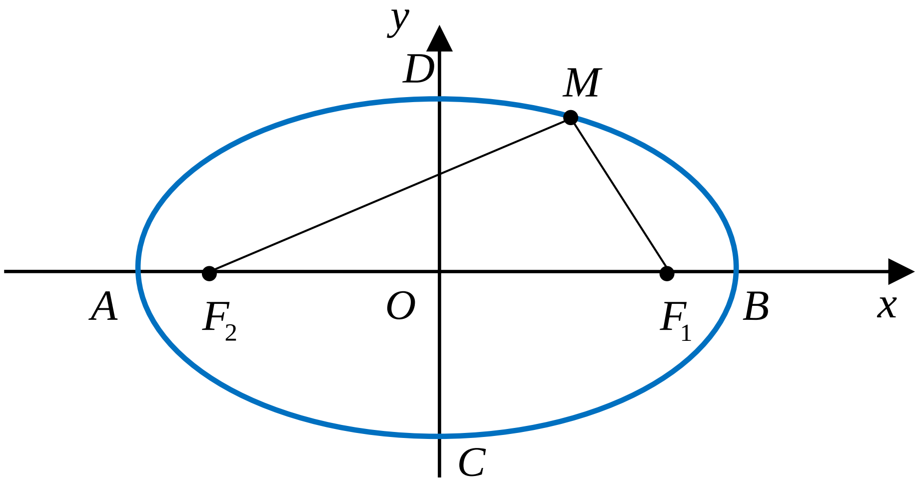


Рис.23. Еліпс

дорівнює відстані від центру еліпса до тих його вершин, які знаходяться на одній осі з фокусами еліпса (вершини A і B на рис. 23), а мала піввісь b дорівнює відстані від центру еліпса до двох інших його вершин (вершини C і D на рис. 23).

Рівняння еліпса

Розглянемо на площині деякий еліпс з фокусами в точках F_1 і F_2, великою віссю $2a$. Нехай $2c$ - фокальна відстань, $2c = |F_1F_2| < 2a$. Згідно з визначенням еліпса, його утворюють ті точки M, для яких $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Виберемо прямокутну систему координат Oxy на площині так, щоб її початок збігався із центром еліпса, а фокуси перебували на осі абсцис (рис. 23). Таку систему координат називають **канонічною** для заданого еліпса, а відповідні змінні — **канонічними**.

В обраній системі координат фокуси мають координати $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$.

Використовуючи формулу відстані між точками, запишемо умову $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ в координатах:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

$$\left(x-c\right)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}+\left(x+c\right)^2+y^2.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних отримуємо $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\varepsilon x,$ де $\varepsilon=c/a$. Повторимо операцію піднесення в квадрат: $\left(x+c\right)^2+y^2=a^2+2\varepsilon a x+\varepsilon^2 x^2$, або, враховуючи значення введеного параметра ε, $\left(a^2-c^2\right)\frac{x^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2$, оскільки $a^2-c^2=b^2>0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ a>b>0.$

Це **канонічне рівняння еліпса**.

Відношення фокальної відстані еліпса до його великої осі називають **ексцентриситетом еліпса** і позначають через ε. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням, $\varepsilon=2c/2a=c/a$. Якщо в рівнянні еліпса параметри a і b пов'язані нерівністю $a<b$, то фокуси розташовані на вертикальній осі симетрії еліпса, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $\varepsilon=2c/2b=c/b$.

При $c=0$, еліпс перетворюється в коло, $\varepsilon=0$. В інших випадках $0<\varepsilon<1$.

Формула для довжини $\left|F_2M\right|$ одного з фокальних радіусів точки $M(x;\ y)$ еліпса: $\left|F_2M\right|=a+\varepsilon x$. Для будь-якої точки на еліпсі $\begin{cases}\left|F_1M\right|=a-\varepsilon x\\ \left|F_2M\right|=a+\varepsilon x\end{cases}$,

і кожне з цих рівнянь є рівнянням еліпса.

Приклад 33. Знайти канонічне рівняння еліпса з великою піввіссю 5 і ексцентриситетом 0,8 і побудувати його.

Розв'язання. Якщо $a=5$ і ексцентриситет $\varepsilon=5$, то $c=\varepsilon a=4$ і $b=\sqrt{a^2-c^2}$. $b=\sqrt{5^2-4^2}=3$. Канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Для побудови еліпса зручно зобразити прямокутник з центром в початку канонічної системи координат, сторони якого паралельні осям симетрії еліпса і рівні його відповідним осях (рис. 24). Цей прямокутник перетинається з осями еліпса в його вершинах A (-5; 0), B (5; 0), C (0; -3), D (0, 3), причому сам еліпс вписаний в нього. На рис. 24 вказані також фокуси $F_{1,2}(\pm 4;0)$ еліпса.

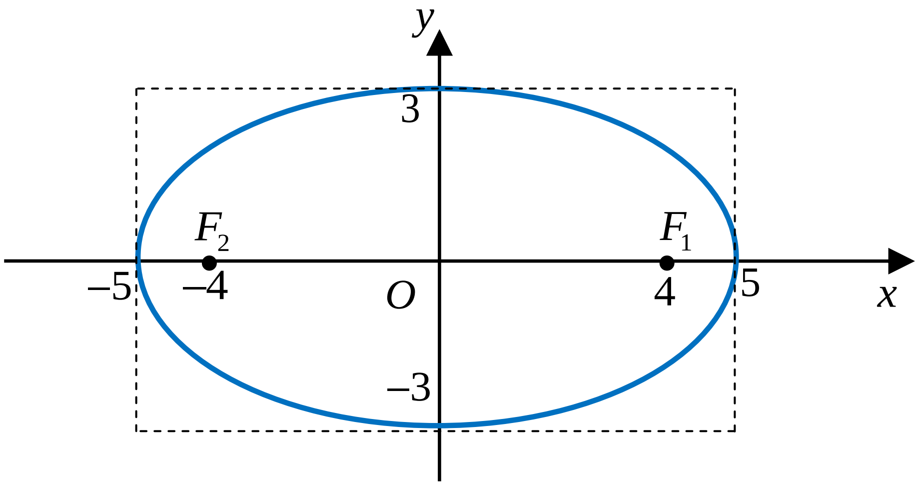


Рис. 24. Побудова еліпса прикладу 33.

Геометричні властивості еліпса

Перепишемо перше рівняння еліпса у вигляді $|F_1M|=(a/\varepsilon-x)\varepsilon$. Зазначимо, що величина $a/\varepsilon-x$ при $a>c$ додатна, оскільки фокус F_1 не належить еліпсу. Ця величина є відстанню до вертикальної прямої $d : x = a/\varepsilon$ від точки $M(x;\ y)$, яка лежить лівіше цієї прямої. Рівняння еліпса можна записати у вигляді: $\dfrac{|F_1M|}{a/\varepsilon - x} = \varepsilon$. Воно означає, що цей еліпс складається з тих точок $M(x;\ y)$ площини, для яких відношення довжини фокального радіуса F_1M до відстані до прямої d і є константою, яка дорівнює ε (рис. 25). У прямої d є "двійник" — вертикальна пряма d', симетрична d щодо центру еліпса, яка задається рівнянням $x = -a/\varepsilon$. Щодо d', еліпс описується так само, як і щодо d. Обидві прямі d і d' називають **директрисами еліпса**. Директриси еліпса перпендикулярні тій осі симетрії еліпса, на якій розташовані його фокуси, і відстоять від центру еліпса на відстань $a/\varepsilon = a^2/c$ (рис. 25). Відстань p від директриси до найближчого до неї фокуса називають **фокальним параметром еліпса**. Цей параметр дорівнює $p = \dfrac{a}{\varepsilon} - c = \dfrac{a^2}{c} - c = \dfrac{a^2 - c^2}{c} = \dfrac{b^2}{c}$. Фокальні радіуси $|F_1M|$ і $|F_2M|$ утворюють з дотичною до еліпсу в точці M рівні кути (рис. 26). Дотична до еліпса існує в будь-якій його точці. Розглядаючи y як функцію від x, неявно задану канонічним рівнянням еліпса, і продиференціювавши її: $2x/a^2 + 2yy'/b^2 = 0$, знаходимо похідну $y'(x) = -xb^2/(ya^2), y \neq 0$ Бачимо, що для всіх точок еліпса, крім вершин A і B, похідна і дотична існують. Знайдемо рівняння дотичної в довільній точці $M(x_0; y_0)$ еліпса.

Рівняння дотичної $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ до графіка функції $y = y(x)$

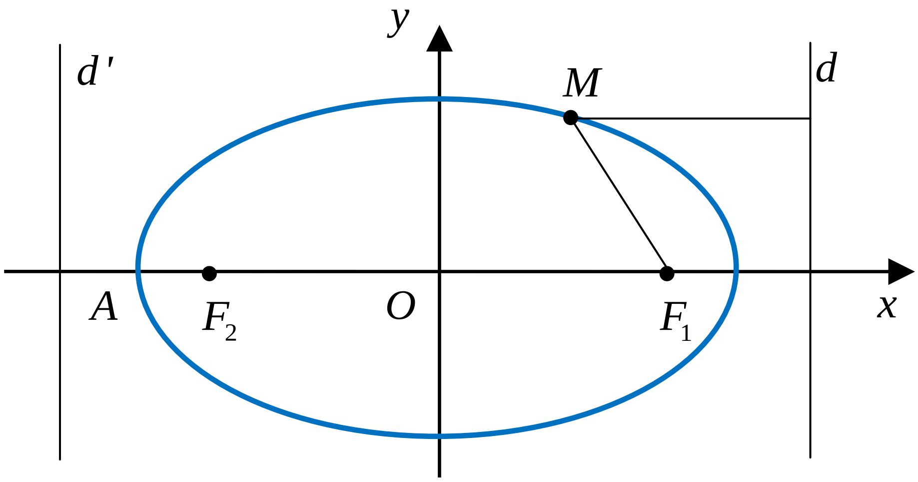


Рис. 25. Директриси еліпса.

.

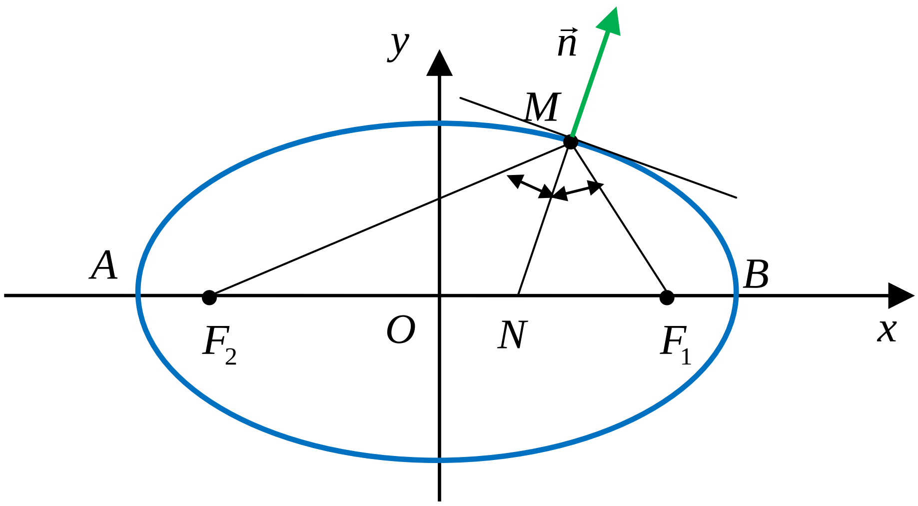


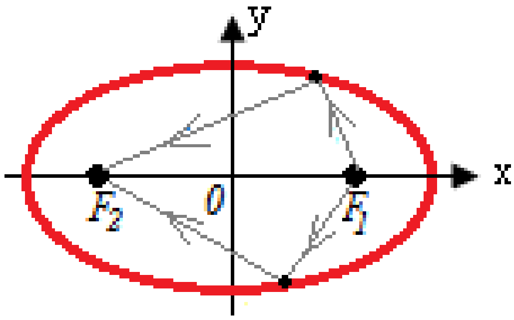
Рис. 26. Властивості фокальних радіусів еліпса

в точці M. Диференціюємо по x тотожність $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2(x)}{b^2}=1$, одержимо, що похідна $y'(x_0)=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Тоді рівняння дотичної набуває виду: $y-y_0=-\dfrac{x_0b^2}{y_0a^2}(x-x_0)$ або $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}$, тобто $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$, оскільки координати точки M задовольняють рівняння еліпса. Дотичні в вершинах A і B також існують, в чому можна переконатися, розглядаючи x як неявну функцію y. Отримане рівняння дотичних поширюється і на дотичні в точках A і B.

Нормальним вектором дотичної до еліпса є вектор $\vec{n}$ з координатами $\left(x_0/a^2; y_0/b^2\right)$. Твердження про те, що фокальні радіуси F_1M і F_2M складають з дотичною до еліпса в точці M рівні кути, еквівалентно твердженню про паралельність нормального вектора дотичної бісектрисі MN кута F_1MF_2 (рис. 26). Останнє вірно для будь-якої точки M еліпса. Розглянемо вектори $\overrightarrow{F_1M}$ і $\overrightarrow{F_2M}$. Вектори $\vec{n}_1 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right|\overrightarrow{F_1M}$ і $\vec{n}_2 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right|\overrightarrow{F_2M}$ колінеарні векторам $\overrightarrow{F_1M}$ і $\overrightarrow{F_2M}$ мають однакову довжину, рівну $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$. Тому їх сума $\vec{n}_1 + \vec{n}_2$ є діагоналлю побудованого на них ромба. Пропорційність координат вектора $\vec{n}_1 + \vec{n}_2$ і нормального вектора $\vec{n}$ дотичної, що випливає з рівності

$$\begin{aligned}
&\left|\overrightarrow{F_2M}\right|\overrightarrow{F_1M} + \left|\overrightarrow{F_1M}\right|\overrightarrow{F_2M} = \left(a + \varepsilon x_0\right)\left(x_0 - c; y_0\right) + \left(a - \varepsilon x_0\right)\left(x_0 + c; y_0\right) = \\
&= \left(\left(a + \varepsilon x_0\right)\left(x_0 - c\right) + \left(a - \varepsilon x_0\right)\left(x_0 + c\right); 2ay_0\right) = \left(2ax_0 - 2c\varepsilon x_0; 2ay_0\right) = \\
&= 2a\left(\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x_0; y_0\right) = 2a\left(\frac{b^2}{a^2}x_0; y_0\right) = 2ab^2\left(\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2}\right),
\end{aligned}$$

то промінь, що виходить з цього фокусу, після віддзеркалення від еліпса піде по другому фокальному радіусу, оскільки після відбиття він перебуватиме під тим самим кутом до кривої, що і до відображення. Таким чином, всі промені, що виходять з фокуса F_1, концентруватимуться у другому фокусі F_2, і навпаки. Виходячи з даної інтерпретації доведену властивість називають **оптичною властивістю еліпса**.



2. Гіпербола

Геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок є величина стала, називають **гіперболою**.

Фіксовані точки у визначенні гіперболи (позначимо їх F_1 і F_2) називають **фокусами гіперболи**. Відстань між ними ($2c$) називають **фокальною відстанню**, а відрізки F_1M і F_2M, що з'єднують довільну точку M на гіперболі з її фокусами, — **фокальними радіусами**. Вид гіперболи повністю визначається фокальною відстанню, $\left(|F_1F_2| = 2c\right)$, і значенням постійної величини $2a$, яка дорівнює різниці фокальних радіусів, а її положення на площині — положенням фокусів F_1 і F_2. З визначення гіперболи випливає, що вона, як і еліпс, симетрична відносно прямої, яка проходить через фокуси, а також відносно прямої, яка ділить відрізок F_1F_2 навпіл і перпендикулярна йому (рис. 6). Першу з цих осей симетрії називають **дійсною віссю гіперболи**, а другу — її **уявною віссю**. Постійну величину a називають **дійсною напіввіссю гіперболи**.

Середина відрізка F_1F_2 лежить на перетині її осей симетрії і тому є центром симетрії гіперболи, який називають просто **центром гіперболи**.

Для гіперболи дійсна вісь $2a$ повинна бути не більше, ніж фокальна

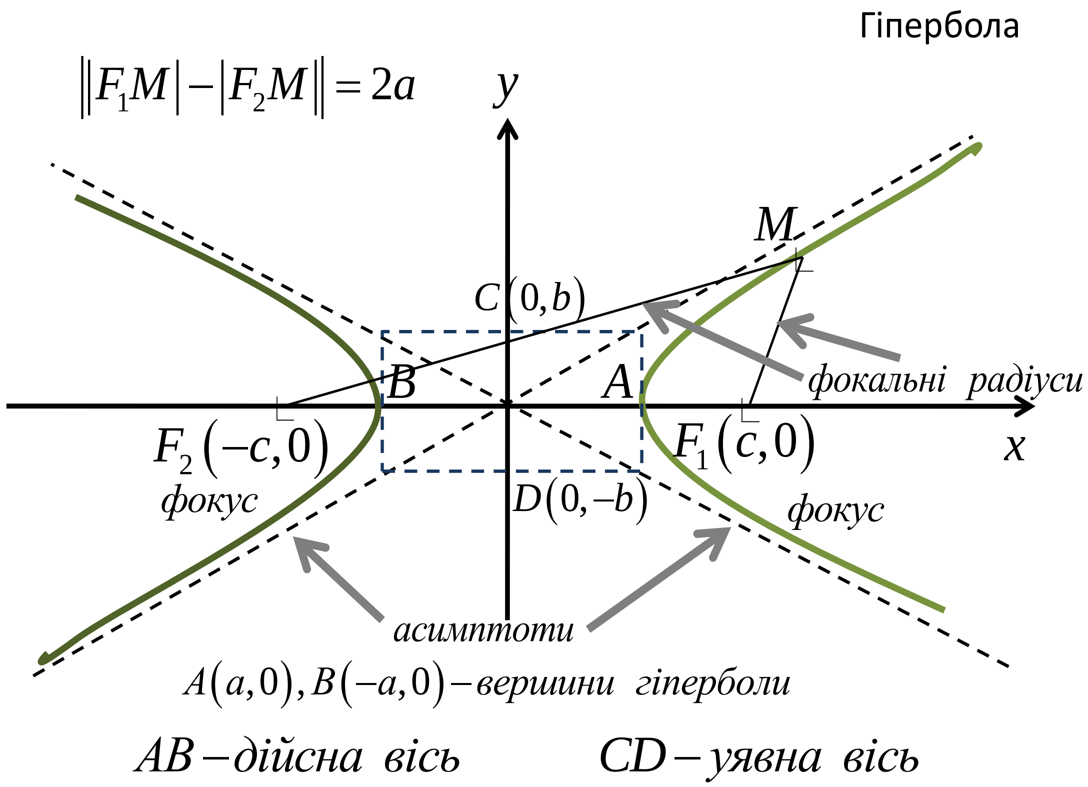


Рис. 27. Гіпербола.

відстань $2c$, оскільки для трикутника F_1MF_2 (рис. 27) справедлива нерівність $\left||F_1M|-|F_2M|\right| \le |F_1F_2|$.

Рівність $a=c$ виконується тільки для тих точок M, які лежать на дійсній осі симетрії гіперболи поза інтервалом F_1F_2. Відкидаючи цей вироджений випадок, далі будемо припускати, що $a<c$. Відзначимо також, що випадок $a=0$ відповідає геометричному місцю точок, рівновіддалених від фіксованих точок F_1 і F_2. Як відомо з курсу шкільної геометрії, це геометричне місце є прямою, яка перпендикулярна відрізку F_1F_2 і

проходить через його середину.

Рівняння гіперболи

Розглянемо на площині деяку гіперболу з фокусами в точках F_1 і F_2 і дійсною віссю $2a$. Нехай $2c$ - фокальна відстань. Гіпербола складається з тих точок $M(x;y)$, для яких $\left||F_1M|-|F_2M|\right|=2a$. Виберемо прямокутну систему координат Oxy так, щоб центр гіперболи знаходився в початку координат, а фокуси розташовувалися на осі абсцис (рис. 27). Таку систему координат для гіперболи називають **канонічною**, а відповідні змінні - **канонічними**. В канонічній системі координат фокуси гіперболи мають координати $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, запишемо умову $\left||F_1M|-|F_2M|\right|=2a$ в координатах

$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$, де $(x;y)$ - координати точки *M*.

Зробимо перетворення:

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2 \qquad ;$$

$-\varepsilon x-a=\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ або $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=|\varepsilon x+a|$, де $\varepsilon=c/a$.

Піднесемо до квадрату вдруге і знову зведемо подібні доданки: $(\varepsilon^2-1)x^2-y^2=c^2-a^2$ або, враховуючи рівність $\varepsilon=c/a$ і вважаючи $b^2=c^2-a^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Це **канонічне рівняння гіперболи**.

Вид гіперболи

Враховуючи наявність двох осей симетрії у гіперболи, достатньо побудувати ту її частину, яка знаходиться в першій чверті канонічної системи координат. У першій чверті, тобто при $x\ge 0$, $y\ge 0$, канонічне рівняння гіперболи однозначно має вигляд відносно *y*: $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Дослідження цієї функції $y(x)$ дає наступні результати:

1) Область визначення функції — $(x : x\geq a)$ і в цій області визначення вона неперервна, як складена функція, причому в точці $x=a$ вона неперервна справа. Єдиним нулем функції є точка $x=a$.

2) Знайдемо похідну функції $y(x)$: $y'=f'(x)=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$,

при $x>a$ функція монотонно зростає. Крім того, $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=+\infty$, а це означає, що в точці $x=a$ перетину графіка функції з віссю абсцис існує вертикальна дотична. Функція $y(x)$ має другу похідну і ця похідна від'ємна. Тому графік функції є опуклим вгору, а точок перегину немає. Зазначена функція має похилу асимптоту, це випливає з існування двох границь: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{b}{a}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a}$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0$$

Похила асимптота має рівняння $y=(b/a)x$.

Проведене дослідження функції дозволяє побудувати її графік , який збігається з частиною гіперболи, яка міститься в першій чверті.

Оскільки гіпербола симетрична щодо своїх осей, то вся крива має вигляд, що зображений на рис. 27. Гіпербола складається з двох симетричних гілок, розташованих по різні сторони від її уявної осі симетрії. Ці гілки не обмежені з обох сторін, причому прямі $y=\pm(b/a)x$ є одночасно асимптотами і правої і лівої гілок гіперболи. Осі симетрії гіперболи розрізняються тим, що дійсна перетинає гіперболу, а уявна — не перетинає (тому її і називають уявною). Дві точки перетину дійсної осі симетрії з гіперболою називають **вершинами гіперболи** (точки $A(a;0)$ і $B(-a;0)$ на рис.27).

Ексцентриситетом гіперболи називають відношення її фокальної відстані до дійсної осі. Ексцентриситет позначають через ε. Для гіперболи, яка має канонічне рівняння, $\varepsilon = c/a$. Ексцентриситет гіперболи завжди більше 1.

Побудуємо прямокутник з центром в початку системи координат Oxy і сторонами $2a$, $2b$, що паралельні координатним осям. Проведемо прямі $y=(b/a)x$ і $y=-(b/a)x$ на яких лежать діагоналі прямокутника. Існує дві гіперболи, що відповідають побудованому прямокутнику: перша з них описується канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис.27), а друга – рівнянням $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$(рис. 28). Дійсна і уявна осі першої гіперболи є відповідно уявною і дійсною осями **спряженої** гіперболи, а асимптоти у них спільні.

Геометричні властивості. Довжина фокального радіуса F_2M точки

$M(x;y)$: $\quad |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm(\varepsilon x + a),$ де знак плюс відповідає правій гілці гіперболи, а знак мінус - лівій. Аналогічно можна отримати формулу для довжини іншого фокального радіуса, якщо при виведенні канонічного рівняння гіперболи перед першим піднесенням в квадрат в праву частину рівності перенести не другий, а перший

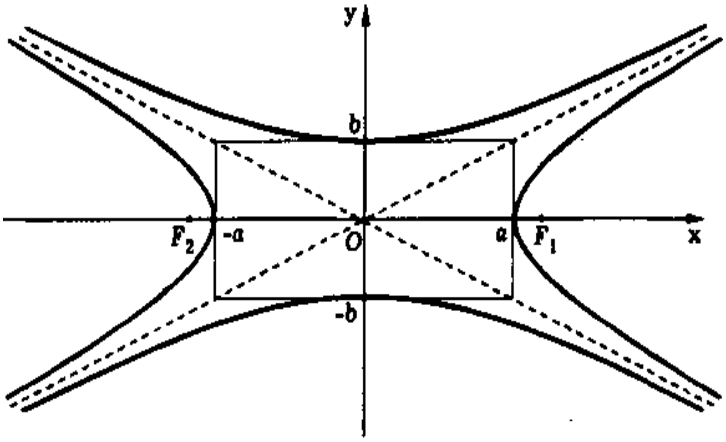


Рис. 28. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

квадратний радикал. При цьому одержимо $\varepsilon x - a = \pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

звідки $|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm(\varepsilon x - a)$, де знак плюс відповідає правої гілки гіперболи, а знак мінус - лівій. Кожне з отриманих рівнянь є рівнянням гіперболи.

Гіпербола не проходить через свої фокуси (при 0 <*a* <*c*). Тому фокальні радіуси будь-якої її точки *M* мають ненульову довжину, тобто і $|F_1M| \neq 0$ і $|F_2M| \neq 0$. Але тоді в і праві частини теж відмінні від нуля, і ці рівняння гіперболи можна переписати в наступному вигляді:

$$\frac{|F_2M|}{|x+a/\varepsilon|}=\varepsilon,\ \frac{|F_1M|}{|x-a/\varepsilon|}=\varepsilon.$$

Розглянемо пряму $a'' : x = -a/\varepsilon$ (рис.29). Вираз $|x+a/\varepsilon|$ є відстанню від точки $M(x;y)$ до прямої d''. Аналогічно вираз $\pm(x-a/\varepsilon)$ дорівнює відстані $|x-a/\varepsilon|$ від точки *M* гіперболи до прямої $d : x = a/\varepsilon$. Тому з рівнянь для фокальних відстаней випливає, що гіпербола складається з таких точок, для яких відношення відстані до фокусу F_2 (фокусу F_1) до відстані до прямої d'' є величина постійна, яка дорівнює ексцентриситету ε. Ці дві прямі d і d'' називають **директрисами** гіперболи.

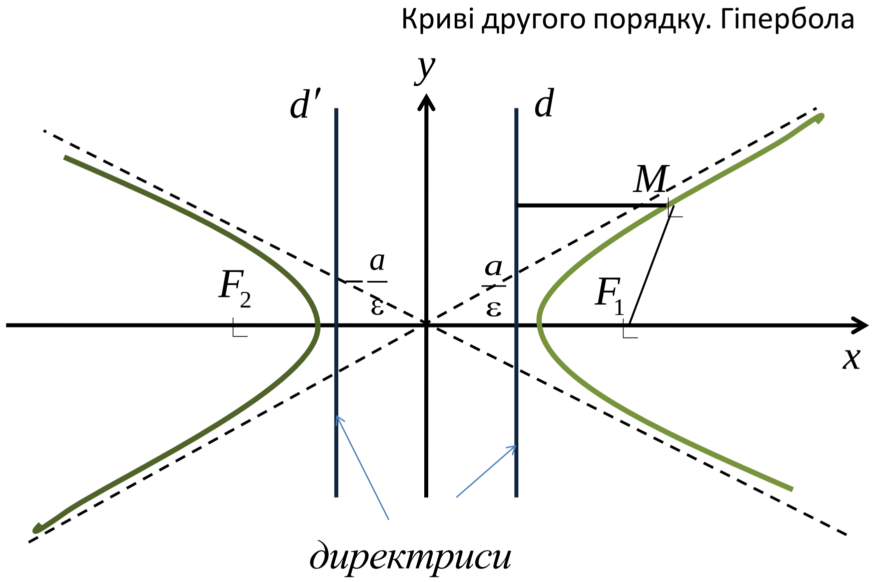


Рис. 29. Гіпербола

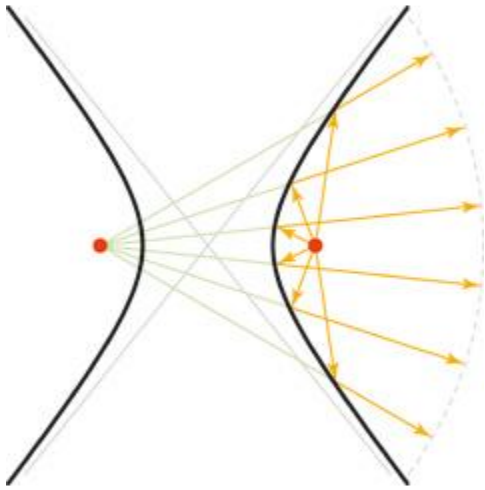
Геометрично директриси визначаються як прямі, які перпендикулярні дійсній осі симетрії гіперболи і віддалені від її центру на відстань, яка дорівнює відношенню дійсної півосі до ексцентриситету.

Відстань p від директриси гіперболи до найближчого до директриси

фокуса називають **фокальним параметром гіперболи**. Зазначимо, що

$$p = c - \frac{a}{\varepsilon} = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

Гіпербола також має і оптичну властивість, аналогічну оптичній властивості еліпса. Вона полягає в тому, що промені, які вийшли з одного фокуса, після відбиття від найближчої гілки гіперболи поширюються так, ніби вийшли з іншого фокусу.



Якщо у гіперболи $a=b$, то кут між асимптотами дорівнює $2arctg\left(b/a\right)=2arctg1=\pi/2$, тобто є прямим. Таку гіперболу називають **рівнобічною**. Для неї крім канонічної системи координат, в якій осі координат збігаються з осями симетрії гіперболи, розглядають також і іншу, осями якої є її асимптоти. Виведемо рівняння гіперболи в цій системі координат, яку позначимо *Oxy*. Нехай $\vec{i},\vec{j}$ - її базис, а $\vec{i}\,',\vec{j}\,'$ - базис канонічної системи координат *Ox'y'* (рис. 30).

Канонічна система координат повернена щодо системи *Oxy* на кут $\pi/4$.

Тому $\vec{i}\,'=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j};\ \vec{j}\,'=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

Отже, координати x', y' канонічної системи координат виражаються через координати x, y з тими ж коефіцієнтами:

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y;\ y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y.$$

Рівняння рівнобічної гіперболи в канонічній системі координат має вигляд

$(x')^2-(y')^2=a^2$, де a — дійсна (вона ж уявна) піввісь гіперболи. Замінивши в цьому рівнянні канонічні змінні на *x, y*, отримаємо

$$\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}(x-y)^2=a^2,$$

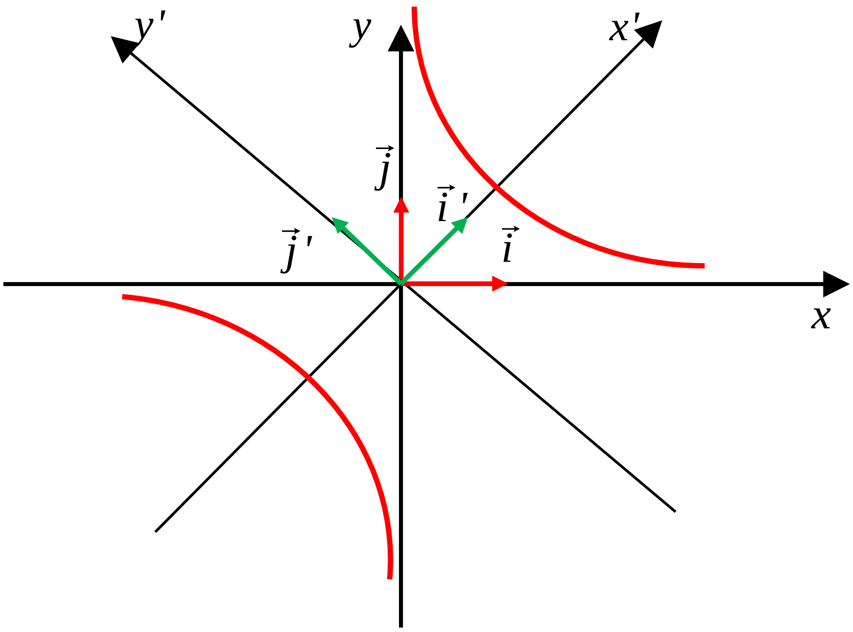


Рис. 30. Гіпербола в асимптотах

або $$xy=\frac{a^2}{2}$$

Це рівняння називають **рівнянням гіперболи в асимптотах**.

Приклад 34. Знайти координати вершин, фокусів і рівняння асимптот гіперболи $xy=-8$ і побудувати її.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням в асимптотах для равнобочной гіперболи. Тому осі координат, тобто прямі $x = 0$, $y = 0$, є її асимптотами. Для цієї гіперболи: $-a^2/2=-8$, тому $a^2=16$ і $a=b=4$. Але тоді

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$, і, враховуючи позначення вершин і фокусів, знаходимо: $A\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$, $B\left(2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$, $F_1(-4;4)$, $F_2(4;-4)$ (рис. 31).

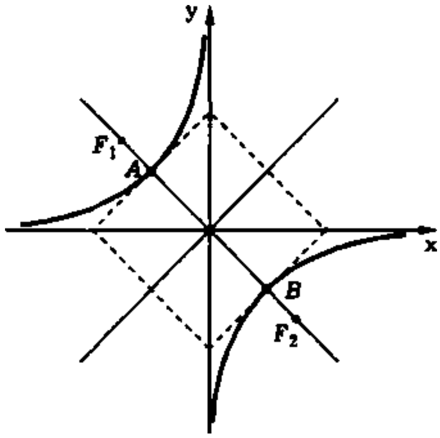


Рис. 31. Гіпербола $xy=-8$ ►

3. Парабола

Геометричне місце точок, які рівновіддалені від деякої фіксованої точки і від фіксованої прямої, називають **параболою.**

Фіксовану точку називають **фокусом параболи**, а пряму - **директрисою параболи**. При цьому вважають, що **ексцентриситет** параболи дорівнює одиниці. Парабола симетрична відносно прямої, яка перпендикулярна директрисі і проходить через фокус параболи. Цю пряму називають **віссю симетрії** параболи або просто віссю параболи. Парабола перетинається зі своєю віссю симетрії в єдиній точці. Цю точку називають **вершиною параболи**. Вона розташована в середині відрізка, який з'єднує фокус параболи з точкою перетину її осі з її директрисою (рис. 32).

Рівняння параболи

Для виведення рівняння параболи виберемо на площині початок координат у вершині параболи, а осі координат розташуємо так як показано на рис. 32. Цю систему координат називають **канонічною** для параболи, а відповідні змінні — канонічними. Позначимо відстань від фокуса до директриси через p. Це **фокальний параметр параболи.** Тоді фокус має координати $F\left(p/2;\ 0\right)$, а директриса має рівняння $x=-p/2$.

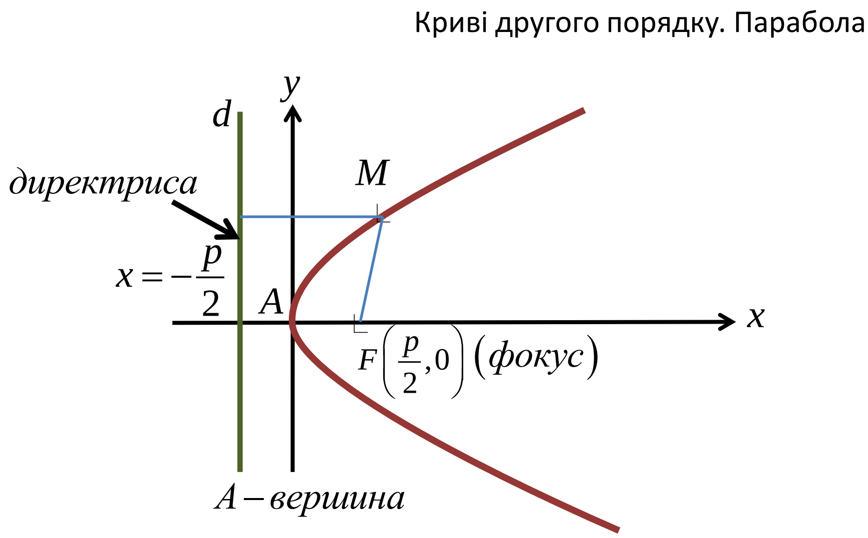


Рис. 32. Парабола

Геометричне місце точок $M\left(x;y\right)$, рівновіддалених від точки F і від прямої d, задається рівнянням: $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$.

Піднесемо обидві частини рівняння в квадрат і зведемо подібні. Отримаємо:

$$y^2 = 2px$$

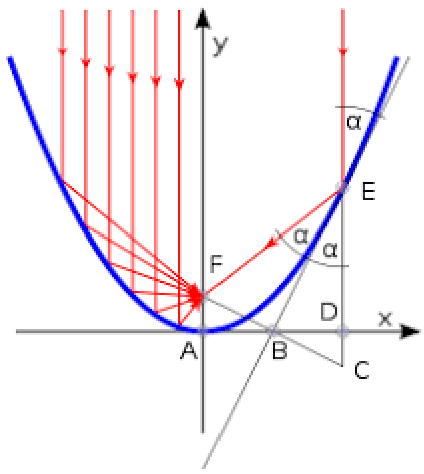
Це **канонічне рівняння параболи**.

Приклад 35. Знайти координати фокусу і рівняння директриси параболи, якщо вона має канонічне рівняння і проходить через точку (25; 10).

Розв'язання. В канонічних координатах рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Оскільки точка (25, 10) знаходиться на параболі, то 100 = 50*p* і *p* = 2. Отже, $y^2 = 4x$ є канонічним рівнянням параболи, $x = -1$ - рівнянням її директриси, а фокус знаходиться в точці (1; 0).►

Оптична властивість параболи

Якщо в фокусі параболи розмістити джерело світла, то всі світлові промені після відбиття від параболи будуть паралельні осі параболи. Оптична властивість означає, що в будь-якій точці *M* параболи нормальний вектор дотичної становить з фокальним радіусом *MP* і віссю абсцис однакові кути.



Тема 3. Завдання для самостійного опрацювання

3.1. Задано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти: півосі еліпса, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис. Зробити рисунок.

3.2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо $c=2$ і відстань між директрисами дорівнює 5. Зробити рисунок.

3.3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо $\varepsilon=\frac{1}{2}$ і відстань між директрисами дорівнює 32. Зробити рисунок.

3.4. Скласти рівняння еліпса із піввісями 5 і 3 і центром, який розташований в точці $C(3;4)$. Зробити рисунок.

3.5. Скласти рівняння еліпса із піввісями $\sqrt{10}$ і 3 і центром, який розташований в точці $C(-1;2)$. Зробити рисунок.

3.6. Довести, що задане рівняння $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ є рівнянням еліпса. Знайти його центр, піввісі, ексцентриситет та рівняння директрис. Зробити рисунок.

3.7. Довести, що задане рівняння $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$ є рівнянням еліпса. Знайти його центр, піввісі, ексцентриситет та рівняння директрис. Зробити рисунок.

3.8. Довести, що задане рівняння $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ є рівнянням еліпса. Знайти його центр, піввісі, ексцентриситет та рівняння директрис. Зробити рисунок.

3.9. Головні вісі еліпса співпадають із координатними осями. Еліпс містить точки $M_1=\left(2,\sqrt{3}\right);M_2=(0,2)$. Скласти рівняння еліпса, знайти фокальні радіуси точки M_1, і відстані від цієї точки до директрис. Зробити рисунок.

3.10. На еліпсі $9x^2 + 25y^2 = 225$ знайти точку, відстань від якої до фокуса F_2 в чотири рази більша за відстань до фокуса F_1. Зробити рисунок.

3.11. Скласти рівняння кривої, по якій рухається точка M, якщо сума відстаней від неї до точок $F_1\left(-1;-1\right)$ і $F_2\left(1;1\right)$ є величина постійна, яка дорівнює $2\sqrt{3}$. Зробити рисунок.

3.12. Скласти рівняння кривої, по якій рухається точка M, якщо відстань від неї до точки $F\left(3;0\right)$ залишається вдвічи меншою за відстань до прямої $x + y - 1 = 0$. Зробити рисунок.

3.13. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2,5} = 1$, яка паралельна прямій $3x + 2y + 7 = 0$. Зробити рисунок.

3.14. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, яка перпендикулярна прямій $2x - 2y - 13 = 0$. Зробити рисунок.

3.15. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, які проведено з точки $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Зробити рисунок.

3.16. На еліпсі $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайти точку M_0, яка розташована найближче до прямої $2x - 3y + 25 = 0$ та обчислити цю відстань. Зробити рисунок.

3.17. Із лівого фокуса еліпса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ під тупим кутом α до осі , Ox випустили промінь світла. $tg\alpha=-2$. Скласти рівняння прямої на якій лежить промінь світла, що відбився від еліпса. Зробити рисунок.

3.18. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $c=10$ і рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$. Зробити рисунок.

3.19. Довести, що задане рівняння $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ є рівнянням гіперболи. Знайти її центр, піввісі, ексцентриситет та рівняння директрис та асимптот. Зробити рисунок.

3.20. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $\varepsilon=\frac{3}{2}$ і відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$. Зробити рисунок.

3.21. Довести, що задане рівняння $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ є рівнянням гіперболи. Знайти її центр, піввісі, ексцентриситет та рівняння директрис та асимптот. Зробити рисунок.

3.22. Довести, що задане рівняння $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$ є рівнянням гіперболи. Знайти її центр, піввісі, ексцентриситет та рівняння директрис та асимптот. Зробити рисунок.

3.23. Перевірити, що точка $M\left(-5;\frac{9}{4}\right)$ належить гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ і знайти фокальні радіуси цієї точки та її відстані до директрис. Зробити рисунок.

3.24. На гіперболі $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ знайти точки, які знаходяться на відстані 7 від фокуса F_1.

3.25. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо, що її фокуси мають координати $F_1(-3;-4)$ і $F_2(3;4)$, а відстань між директрисами дорівнює 3,6. Зробити рисунок.

3.26. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, які паралельні прямій $10x-3y+9=0$. Зробити рисунок.

3.27. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, які перпендикулярні прямій $4x+3y-7=0$. Зробити рисунок.

3.28. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$, які проведені з точки $A(-1;-7)$. Зробити рисунок.

3.29. На гіперболі $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ знайти точку M_0, яка розташована найближче до прямої $3x+2y+1=$, та обчислити цю відстань. Зробити рисунок.

3.30. З правого фокуса гіперболи $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ під кутом $\alpha\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$ до осі Ox направлено промінь, $tg\alpha=2$. Скласти рівняння прямої, на якій лежить промінь, який відбився від гіперболи. Зробити рисунок.

3.31. Скласти рівняння параболи із вершиною в початку координат, якщо відомо, що вона розташована в лівій півплощині симетрично вісі Ox і

$p=\frac{1}{2}$. Зробити рисунок.

3.32. Довести, що рівняння $y^2=4x-8$ визначає параболу, знайти координати її вершини і параметр p. Зробити рисунок.

3.33. Довести, що рівняння $y=4x^2-8x+7$ визначає параболу, знайти координати її вершини і параметр p. Зробити рисунок.

3.34. Довести, що рівняння $x^2=2-y$ визначає параболу, знайти координати її вершини і параметр p. Зробити рисунок.

3.35. Довести, що рівняння $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$ визначає параболу, знайти координати її вершини і параметр p. Зробити рисунок.

3.36. Довести, що рівняння $x=-\frac{1}{4}y^2+y$ визначає параболу, знайти координати її вершини і параметр p. Зробити рисунок.

3.37. Довести, що рівняння $x=2y^2-12y+14$ визначає параболу, знайти координати її вершини і параметр p. Зробити рисунок.

3.38. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2=12x$, якщо $y(M)=6$. Зробити рисунок.

3.39. Скласти рівняння параболи, якщо відомі фокус $F(4,3)$ і рівняння директриси: $y+1=0$. Зробити рисунок.

3.40. Скласти рівняння параболи, якщо відомі фокус $F(2,-1)$ і рівняння директриси: $x-y-1=0$. Зробити рисунок.

3.41. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 8x$, яка паралельна прямій $2x + 2y - 3 = 0$. Зробити рисунок.

3.42. Скласти рівняння дотичної до параболи $x^2 = 16y$, яка перпендикулярна прямій $2x + 4y + 7 = 0$. Зробити рисунок.

3.43. Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2 = 36x$, які проведені з точки $A(2,9)$. Зробити рисунок.

3.44. На параболі $y^2 = 64x$ знайти точку M_0, яка розташована найближче до прямої $4x + 3y - 14 = 0$ і обчислити цю відстань.

3.45. Із фокуса параболи $y^2 = 12x$ під гострим кутом α до осі Ох направлений промінь світла. $tg\alpha = \frac{3}{4}$. Скласти рівняння прямої на якій лежить промінь, який відбився від параболи.

Тема 4. Поверхні другого порядка

Короткі теоретичні відомості і приклади

Загальним рівнянням поверхні другого порядку називається рівняння виду:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0$$

Це рівняння може задавати:

1) порожню множину;

2) точку;
3) пару перетинних площин;
4) пару паралельних площин;
5) циліндр;
6) конус;
7) еліпсоїд;
8) гіперболоїд;
9) параболоїд.

Розглянемо типи поверхонь, які визначаються загальним рівнянням.

Поверхні обертання

Поверхня Ω називається ***поверхнею обертання***, якщо вона утворена обертанням деякої кривої γ навколо прямої L (осі обертання). (рис. 33).

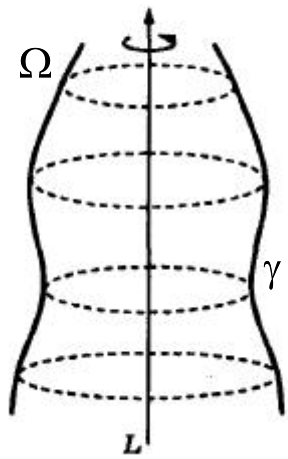


Рис.33. Поверхня обертання

Рівняння поверхні обертання Ω має найбільш простий вигляд, якщо початок O прямокутної системи координат лежить на осі обертання, а вісь Oz співпадає з нею. Перетин поверхні Ω з координатною площиною Oxz - це деяка множина точок S (рис. 34), обертання якої утворює поверхню Ω.

Нехай множина S в площині Oxz описується рівнянням $\varphi(x,z)=0$. Розглянемо довільну точку $M(x;y;z)$. Вона віддалена від осі Oz на відстань $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Якщо точка M лежить на поверхні обертання Ω, то точки $M_1(x_1;0;z)$, $M_2(x_2;0;z)$ з тією ж аплікатою z, що і M, і абсцисами $x_1=d$ і $x_2=-d$ належать множині S. Тому

$$0=\varphi(x_1,z)=\varphi(d,z)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2},z),$$

$$0=\varphi(x_2,z)=\varphi(-d,z)=\varphi(-\sqrt{x^2+y^2},z),$$

і умова $M\in\Omega$ зводиться до того, що координати точки M задовольняють рівняння:

$$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$$

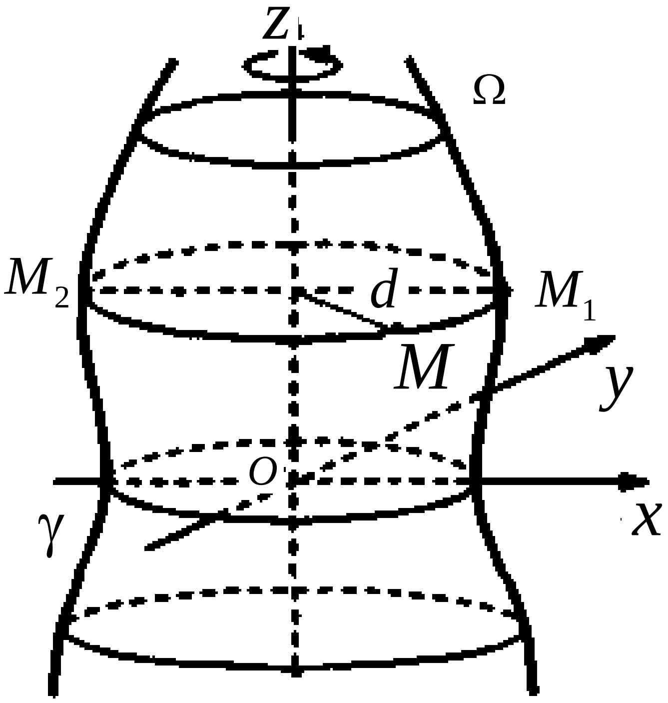


Рис. 34. Рівняння поверхні обертання

Отримане рівняння і є рівнянням поверхні Ω, яка утворена обертанням підмножини точок $S=\{(x;z):\varphi(x,z)=0\}$, які розташовані в координатній площині *Oxz*. З рівняння множини *S* рівняння відповідної поверхні обертання отримуємо заміною змінної *x* на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Перетворення стиснення

Під ***перетворенням стиснення*** до координатної площини *Oxz* будемо розуміти таке перетворення, при якому точка $M(x;y;z)$ переходить в точку $M'\left(x;\frac{y}{k};z\right), k>0$. Параметр ***k*** називають ***коефіцієнтом стиснення***.

При ***k*** > 1 точки простору, розташовані на одній прямій, яка перпендикулярна площині *Oxz* зближуються, тобто перетворення — дійсно стиснення. При 0 < ***k*** <1 перетворення фактично є розтягуванням.

Нехай в просторі в прямокутній системі координат *Oxyz* деяка множина *Q* задано своїм рівнянням $F(x,y,z)=0$. При перетворенні стиснення до координатної площини *Oxz* з коефіцієнтом ***k*** ця множина перетворюється в нову множину Q' з рівнянням $F(x,ky,z)=0$.

Еліпсоїди

Поверхня, яка утворюється при обертанні еліпса навколо однієї з його осей симетрії, називають ***еліпсоїдом обертання*** (рис.35)

Рівняння еліпсоїда обертання виведемо, розташувавши початок прямокутної системи координат у центрі еліпса і поєднавши вісь аплікат *Oz* з віссю обертання, а координатну площину *Oxz* - з площиною еліпса (рис.35). Тоді рівняння еліпса буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Якщо в цьому рівнянні замінити x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, то вийде рівняння $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ відповідної поверхні обертання. Отже, **еліпсоїд обертання** з віссю обертання *Oz* описується рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

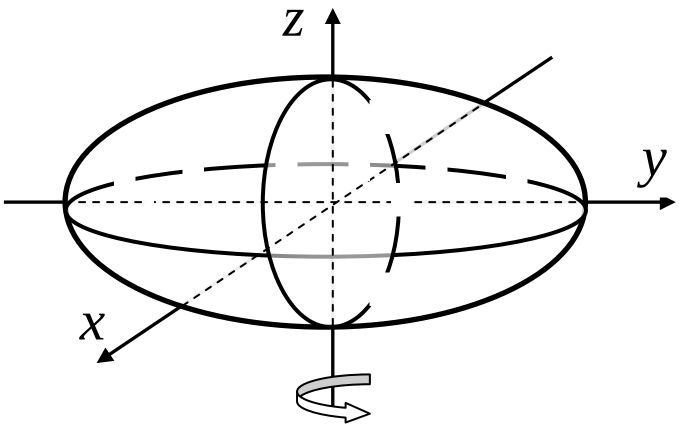


Рис. 35. Еліпсоїд обертання навколо осі *Oz*

Застосуємо до еліпсоїда обертання **перетворення стиснення** до координатної площини *Oxz*, отримаємо ***еліпсоїд*** загального виду. Якщо k - ***коефіцієнт стиснення***, то рівняння еліпсоїда набуде вигляду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

або, після заміни $\frac{k^2}{a^2}=\frac{1}{b^2}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Це рівняння називають **канонічним рівнянням еліпсоїда**. Три параметри a, b і c, — це напівосі еліпсоїда (рис. 36). Якщо всі три напівосі еліпсоїда попарно різні, то еліпсоїд називають **тривісним**. Якщо рівні всі три напівосі ($a = b = c = r$), то еліпсоїд перетворюється в **сферу** радіуса r, яка описується рівнянням: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

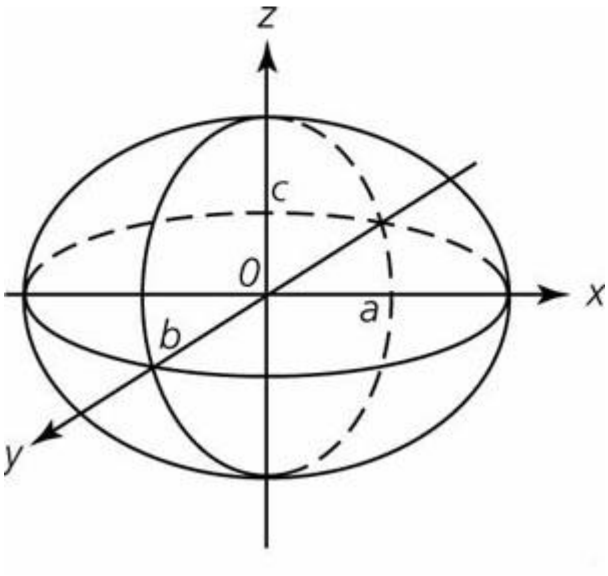


Рис. 36. Тривісний еліпсоїд

Гіперболоїди

При обертанні гіперболи навколо однієї з її осей симетрії отримаємо поверхню, яка називається **гіперболоїдом обертання**. Вибір осі обертання впливає на тип гіперболоїда. Якщо віссю обертання є дійсна вісь симетрії гіперболи, то поверхня обертання буде складатися з двох частин (порожнин). Це **двопорожнинний гіперболоїд обертання** (рис. 37). При обертанні гіперболи навколо її уявної осі симетрії поверхня буде складатися з однієї порожнини (рис. 38). Таку поверхню називають **однопорожнинним гіперболоїдом обертання**.

Для виведення рівнянь гіперболоїдів обертання розташуємо прямокутну систему координат так, щоб вісь обертання, яка є віссю симетрії гіперболи, збігалася з віссю аплікат Oz, а сама гіпербола була розташована в координатній площині Oxz з центром в початку системи координат. Для двопорожнинного гіперболоїда обертання рівняння гіперболи буде мати вигляд: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1.$

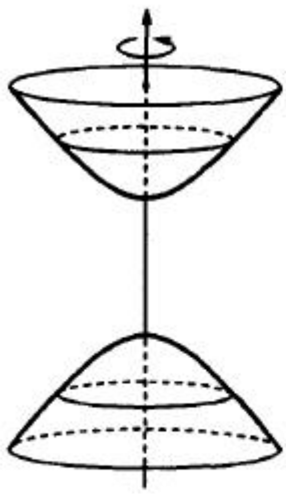


Рис. 37. Двопорожнинний гіперболоїд

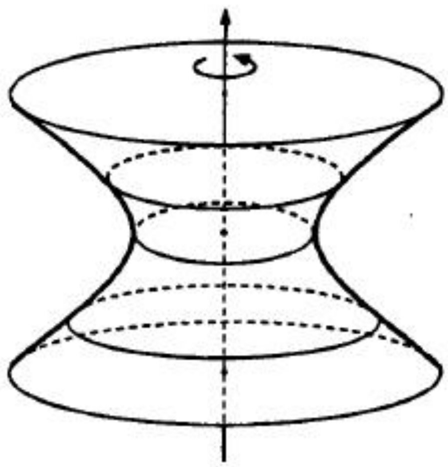


Рис. 38. Однопорожнинний гіперболоїд

Замінивши в ньому x на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, отримаємо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1.$$

Це рівняння **двопорожнинного гіперболоїда обертання**.

У випадку однопорожнинного гіперболоїда, гіпербола, яка обертається буде мати рівняння: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$

Знову міняємо x на радикал $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, отримуємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння **однопорожнинного гіперболоїда обертання**.

Гіперболоїди обертання перетворенням стиснення до координатної площини Oxz перетворюються в **двопорожнинний** і **однопорожнинний гіперболоїди загального вигляду**. Їх рівняннями будуть відповідно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1 \quad \text{і} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

Після заміни $\frac{k^2}{a^2}=\frac{1}{b^2}$ отримаємо ***канонічне рівняння двопорожнинного*** **гіперболоїда** (рис. 39): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$ і **однопорожнинного** (рис. 40) гіперболоїда: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

Еліптичні параболоїди

При обертанні параболи навколо її осі отримуємо **параболоїд обертання** (рис.41). Щоб знайти його рівняння, виберемо прямокутну систему координат, спрямуємо вісь Oz по осі обертання і поєднаємо координатну площину Oxz з площиною параболи. Нехай при цьому парабола описується рівнянням $x^2=2pz, p>0$. Тоді для отримання рівняння поверхні обертання потрібно замінити в цьому рівнянні x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$2pz=x^2+y^2.$$

Перетворення стиснення параболоїда обертання до координатної площини Oxz з коефіцієнтом k дає поверхню більш загального вигляду — **еліптичний параболоїд**, рівнянням якого буде

$$2pz=x^2+k^2y^2.$$

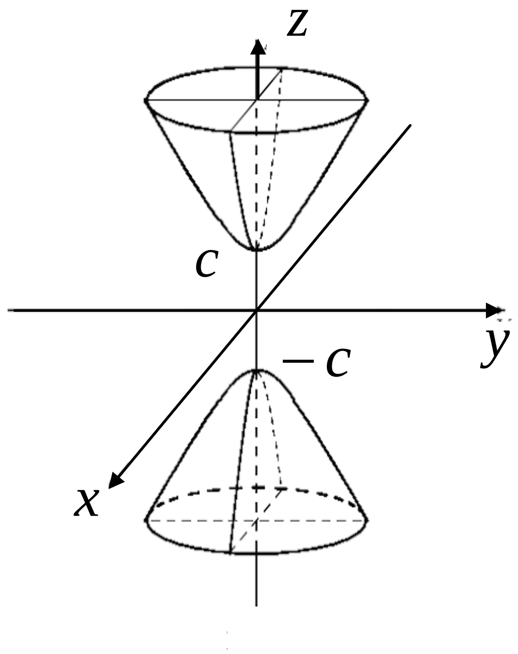


Рис.39. Канонічний двопорожнинний гіперболоїд

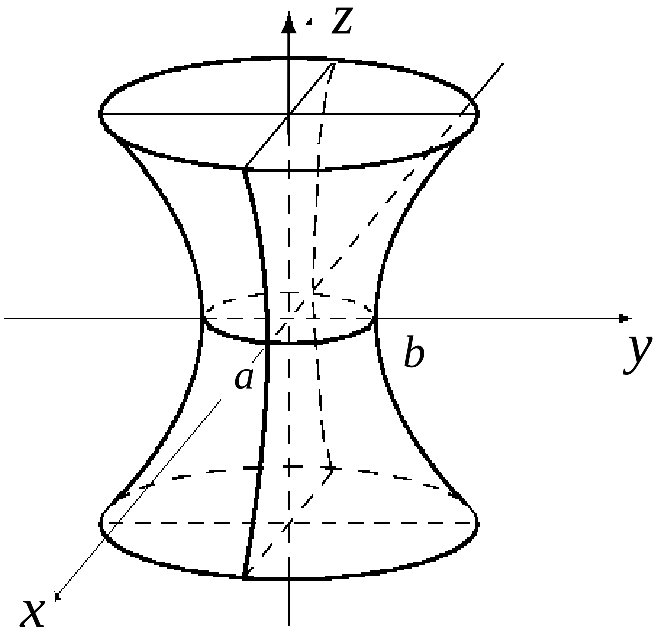


Рис. 40. Канонічний однопорожнинний гіперболоїд

Після заміни $\frac{1}{p}=\frac{1}{a^2};\ \frac{k^2}{p}=\frac{1}{b^2}$ параметрів отримаємо **канонічне рівняння еліптичного параболоїда:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

Еліптичний параболоїд (рис. 42) є поверхнею другого порядку. При $a = b$ він перетворюється в параболоїд обертання.

Конуси

При обертанні будь-якої прямої L, яка перетинає вісь обертання, утворюється **прямий круговий конус** (рис. 43). Точка перетину прямої , яка обертається, з віссю обертання залишається нерухомою, її називають **вершиною конуса**. Рівняння будемо виводити в прямокутній системі координат.

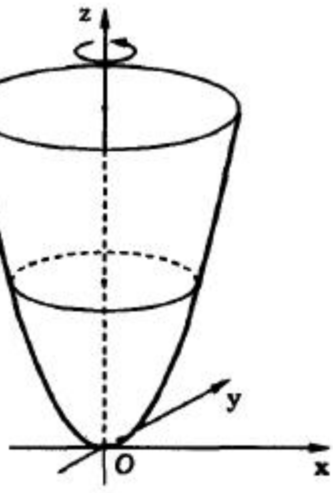


Рис. 41. Параболоїд обертання

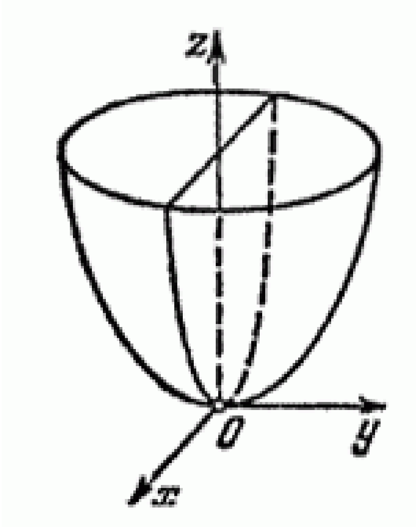


Рис. 42. Еліптичний параболоїд

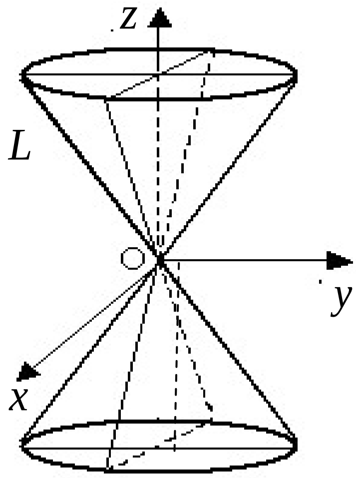


Рис.43. Прямий круговий конус

Вісь *Ox* розташуємо так, щоб пряма *L* перебувала в координатній площині *Oxz* і описувалася рівнянням $z = k_1 x$. У цій системі координат рівняння поверхні обертання отримується з рівняння прямої заміною *x* на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. У результаті такої заміни одержуємо $z = \pm k_1 \sqrt{x^2 + y^2}$. Піднесемо обидві частини рівняння в квадрат: $z^2 = k_1^2 (x^2 + y^2)$.

Розділимо його на $c^2 = k_1^2 a^2$ і отримаємо **канонічне рівняння прямого кругового конуса**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

Перетворення стиснення прямого кругового конуса до координатної площини Oxz з коефіцієнтом k дає **еліптичний конус**. Його рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2 y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

або, після введення відповідних замін:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Це **канонічне рівняння еліптичного конуса**.

Еліптичний конус при $a = b$ збігається з прямим круговим конусом, і обидва вони є поверхнями другого порядку.

Нехай задано конус K із вершиною $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямною кривою $\varphi_1(x, y, z) = 0$ і $\varphi_2(x, y, z) = 0$. Точка $M(x, y, z)$ належить конусу тільки в тому випадку, коли існує таке число t, що точка $N(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0), z + t(z - z_0))$ буде знаходитись на напрямній кривій γ, тобто

$$\begin{cases} \varphi_1(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0), z + t(z - z_0)) = 0 \\ \varphi_2(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0), z + t(z - z_0)) = 0 \end{cases}.$$

Виключимо параметр t з системи і отримаємо рівняння виду $\varphi(x, y, z) = 0$, яке і буде рівнянням заданого конуса K.

Приклад 36. Скласти рівняння конуса, вершина якого розташована в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а напрямна крива задана рівнянням: $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = c \end{cases}$.

Розв'язання. Система, яка описує заданий конус набуває вигляду:

$$\begin{cases}\varphi\left(x+t\left(x-x_0\right),y+t\left(y-y_0\right)\right)=0\\ z+t\left(z-z_0\right)-c=0\end{cases}.$$

З другого рівняння $t=\dfrac{c-z}{z-z_0}=\dfrac{\left(c-z_0\right)-\left(z-z_0\right)}{z-z_0}=\dfrac{c-z_0}{z-z_0}-1$. Після підстановки в перше рівняння і алгебраїчних перетворень отримаємо рівняння заданого конуса:

$$\varphi\left(x_0+\left(c-z_0\right)\frac{x-x_0}{z-z_0},y_0+\left(c-z_0\right)\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0.$$

В частинному випадку, коли вершина знаходиться в початку координат, рівняння набуває виду: $\varphi\left(c\dfrac{x}{z},c\dfrac{y}{z}\right)=0$.

Циліндричні поверхні

При обертанні прямої навколо осі обертання, яка паралельна цій прямій, утворюється поверхня, яку називають **круговим циліндром** (рис. 44). Ця поверхня є окремим випадком **циліндричної поверхні**, яка утворюється при русі прямої L в просторі вздовж деякої кривої γ і яка паралельна деякому напрямку (рис.45). Криву γ називають **напрямною циліндричної поверхні** . Циліндрична поверхня є множиною точок на прямих, які паралельні фіксованій прямій. Ці паралельні прямі називають **твірними циліндричної поверхні**.

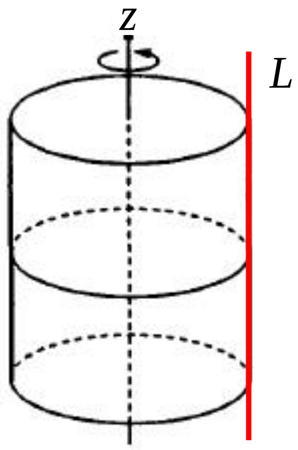


Рис. 44. Круговий циліндр

Виберемо прямокутну систему координат так, щоб твірні циліндричної поверхні були паралельні осі *Oz*. В якості напрямної виберемо криву, яка є перетином циліндричної поверхні з координатною площиною *xOy*
(рис. 45).

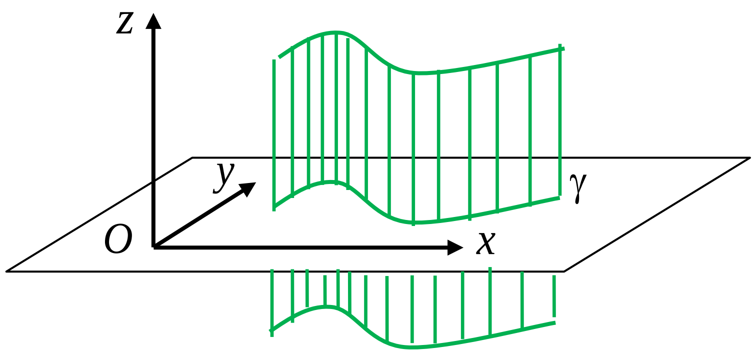


Рис.45. Циліндрична поверхня

Напрямна в площині *xOy* описується деяким рівнянням двох змінних $\varphi(x,y)=0$. Точка $M\,(x,y,z)$ лежить на циліндричній поверхні тоді і тільки тоді, коли її *абсциса* і *ордината* (фактично *координати точки N(x; y; 0)* на площині *xOy*) підкоряються рівнянню напрямної кривої γ. Тому в обраній системі координат циліндрична поверхня описується рівнянням $\varphi(x,y)=0$ - рівнянням своєї напрямної кривої, яке трактується як рівняння трьох змінних *x, y* і *z*. Вірне і зворотне твердження: якщо в деякій прямокутній системі координат в просторі поверхня описується рівнянням, що не містить однієї із змінних, то ця поверхня є циліндричною.

Нехай $\vec{s}=(l,m,n)$ - будь-який вектор колінеарний осі циліндра *Ц*, а напрямна крива γ задана рівняннями $\varphi_1(x,y,z)=0$ і $\varphi_2(x,y,z)=0$. Точка $M(x,y,z)$ належить циліндру Ц тільки в тому випадку, коли існує число t таке, що точка з координатами $N(x+tl,y+tm,z+tn)$ лежить на напрямній кривій γ, тобто $\begin{cases}\varphi_1(x+tl,\ y+tm,\ z+tn)=0\\ \varphi_2(x+tl,\ y+tm,\ z+tn)=0\end{cases}$. Виключимо параметр t з системи і отримаємо співвідношення типу $\varphi(x,y,z)=0$, яке і буде рівнянням заданого циліндра Ц.

Приклад 37. Скласти рівняння циліндра, вісь якого співпадає із координатною віссю Oz, а напрямна крива задана рівнянням $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=c\end{cases}$.

Розв'язання. Нехай напрямний вектор $\vec{s}=\vec{k}=(0,0,1)$.

Тоді, $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z+t-c=0\end{cases}$. Цей результат означає, що точка $M(x,y,z)$ належить циліндру тільки в тому випадку, коли її координати x,y задовольняють рівняння $\varphi(x,y)=0$ при довільному значенні координати z Отже, рівняння $\varphi(x,y)=0$, яке описує проекцію напрямної кривої на площину xOy і є рівнянням шуканого циліндра.

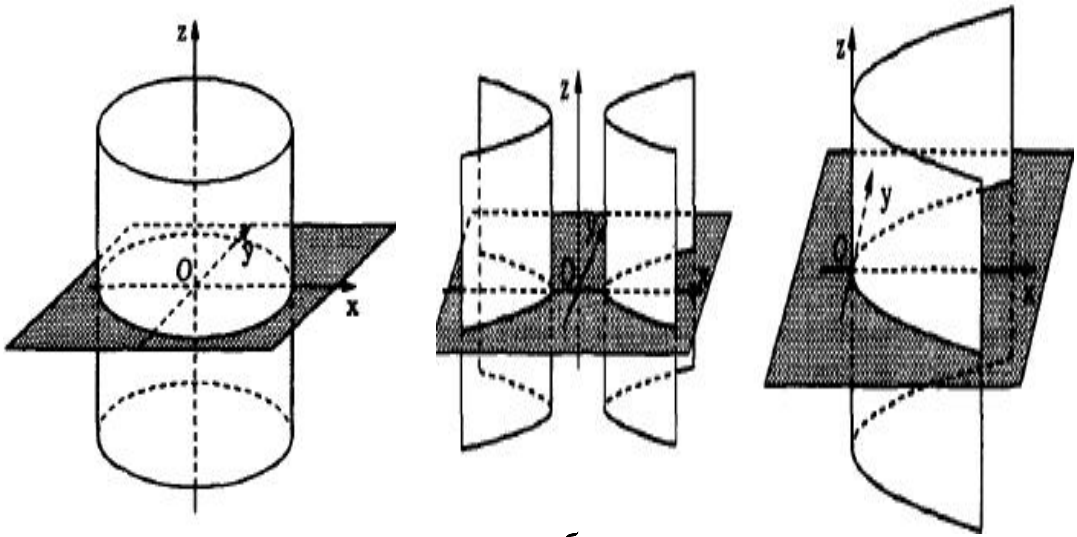
Циліндр другого порядку - це циліндрична поверхня, напрямна крива якої в площині, яка перпендикулярна твірній, є кривою другого порядку. У вибраній вище прямокутній системі координат циліндр другого порядку описується рівнянням другого степеня

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Це рівняння можна спростити вибором системи координат. Фактично мова йде про приведення до канонічного вигляду рівнянь другого порядку від двох змінних. Канонічні рівняння кривих другого порядку приводять до трьох видів циліндрів другого порядку:

- **еліптичний** (рис.46, а) з канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- **гіперболічний** (рис. 46,б) з канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- **параболічний** з канонічним рівнянням $y^2 = 2px$ (рис. 46, в).



а *б* *в*

Рис. 46. Циліндри другого порядк поверхні.

Дослідження рівняння поверхні другого порядка. Метод перерізів

Для з'ясування форми поверхні в просторі по її рівнянню $\Psi(x,y,z)=0$ використовують так званий **метод перерізів**. Метод полягає в аналізі перетинів поверхні площинами, паралельними координатним площинам, наприклад площинами виду $z = c$, де параметр c пробігає всі дійсні значення. Для кожного значення c система рівнянь $\begin{cases}\Psi(x,y,z)=0, \\ z=c\end{cases}$ задає відповідний перетин. Точки M $(x;\ y;\ z)$ належать перетину, якщо виконані умови: а) $z = c$; б) координати x та y її проекції на координатну площину xOy, тобто координати точки N $(x;\ y;\ 0)$, задовольняють рівнянню $\Psi(x,y,c)=0$. Аналізуючи форму кривих перетинів можна представити форму поверхні.

Приклад 36. Дослідити рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ методом перерізів.

Перетин цієї поверхні з площиною $z = c$ описується рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2c$$

При $c < 0$ перетин порожній, при $c = 0$ він збігається з початком системи координат $Oxyz$, а при с > 0 представляє собою еліпс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{2c}\right)^2}=1.$$

Осі цього еліпса із зростанням параметра c збільшуються, і можна уявити форму поверхні (рис. 47, а).

Перетини цієї ж поверхні як із площинами $x = c$ (рис. 47, б), так і з площинами $y = c$ (рис. 47, в) є **параболами** $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ і $\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = 2z$ відповідно. Параболи в кожному з цих сімейств перерізів мають рівні параметри, які залежать від значення *c*.

Дослідження методом перетинів дозволило визначити цю поверхню як **еліптичний параболоїд**. Метод дозволяє дати ще одну геометричну побудову еліптичного параболоїда. Розглянемо параболу P_1 , яка знаходиться в площині $y = 0$, і аналогічну параболу P_2 в площині $x = 0$ (рис. 47, а). Нехай друга парабола P_2 рухається в просторі так, що:

- вершина параболи P_2 весь час знаходиться на параболі P_1;
- вісь параболи P_2 паралельна осі параболи P_1;
- площина параболи P_2 перпендикулярна площині параболи P_1.

Тоді в результаті такого переміщення утворюється еліптичний параболоїд. При цьому ролі парабол P_1 і P_2 можна поміняти,, тобто переміщати параболу P_1, використовуючи параболу P_2 як напрямну криву.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ відрізняється від рівняння еліптичного параболоїда лише знаком одного доданка і теж задає поверхню другого порядку. Її називають **гіперболічним параболоїдом**, а саме рівняння - **канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда**.

Досліджуємо вид гіперболічного параболоїда методом перерізів. Його перетин з площинами $y = c$ при будь-якому значенні c є параболами:

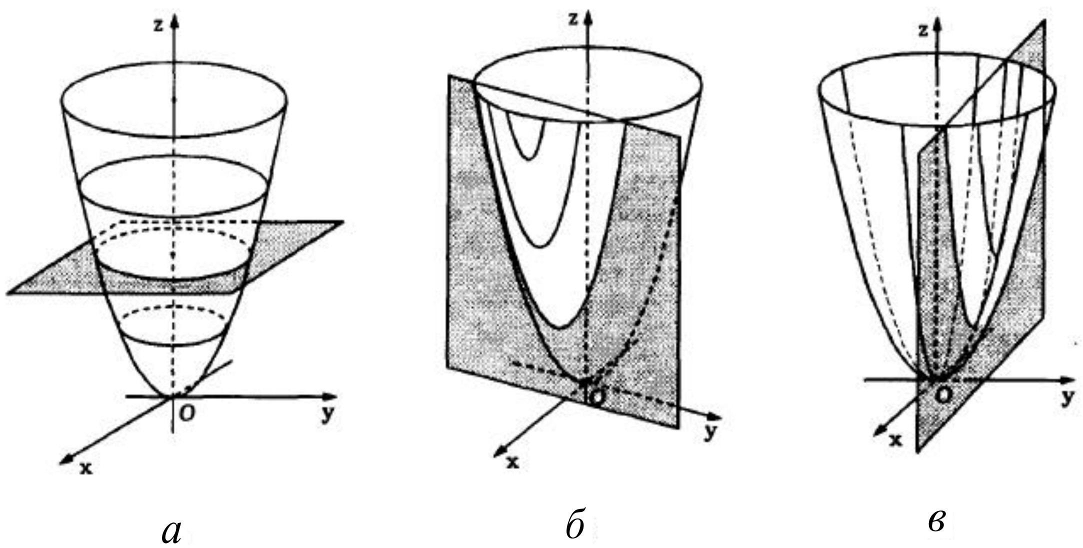
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{b^2} = 2z$$

Перетини з площинами *x = c* теж при всіх значеннях *c* є параболами:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Позначимо через P_1 параболу, що знаходиться в перерізі *y = 0*, а через P_2 - аналогічну параболу в перерізі *x = 0*. Переміщуючи, як і вище, параболу P_2 по параболі P_2 (рис. 47.6), отримуємо сідлоподібну поверхню гіперболічного параболоїда.

Перетин гіперболічного параболоїда з площинами *z = c* при $c \neq 0$ є гіперболами $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2c$, а при с = 0 парою пересічних прямих: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Вибір назви поверхні пояснюється характером перетинів: горизонтальні перетини гіперболічного параболоїда - це гіперболи, а два інших сімейства розглянутих перетинів – параболи.



а *б* *в*

Рис. 46. Дослідження еліптичного параболоїда

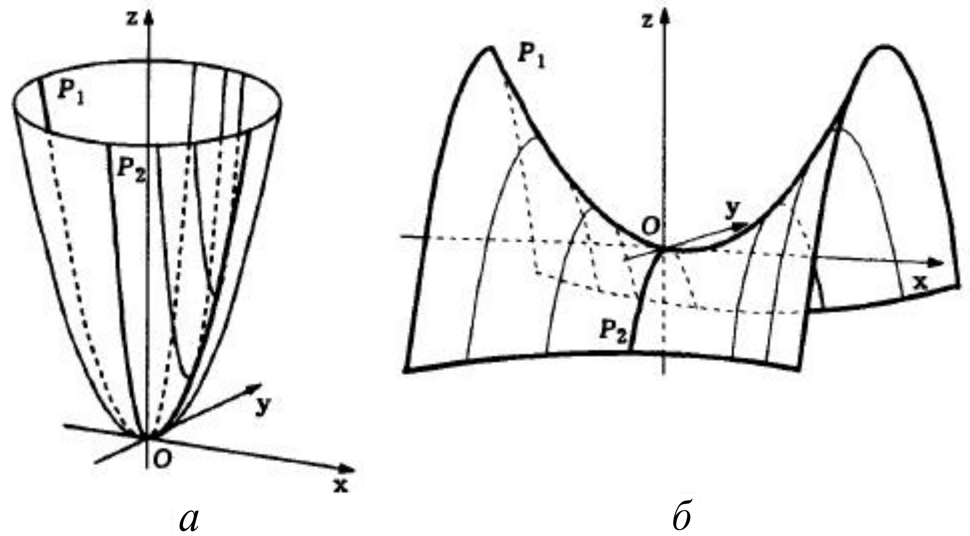


Рис. 47. Еліптичний та гіперболічний параболоїди

Неповні рівняння поверхонь другого порядку

Поверхня другого порядку в просторі в заданій прямокутній системі координат описується рівнянням з десятьма коефіцієнтами:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

серед перших шести коефіцієнтів, від *A* до *F*, повинен бути хоча б один ненульовий. Розглянемо випадок неповного рівняння поверхні другого порядку, тобто коли в рівнянні відсутні попарні добутки змінних:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

Таке рівняння другого порядку за допомогою паралельного переносу системи координат і, можливо, введення нових змінних можна перетворити в одне з канонічних рівнянь або в рівняння виродженої поверхні другого порядку.

Для перетворення рівняння використовують виділення повних квадратів.

При цьому можливі три варіанти:

1. Рівняння містить квадрати всіх трьох змінних. Виділення повного квадрата по x (при $G \neq 0$), по y (при $H \neq 0$) і по z (при $K \neq 0$) перетворює рівняння до вигляду:

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 + C(z - z_0)^2 = L',$$

де

$$x_0 = -\frac{G}{2A},\ y_0 = -\frac{H}{2B},\ z_0 = -\frac{K}{2C},\ L' = -L + \frac{G^2}{4A} + \frac{H^2}{4B} + \frac{K^2}{4C}.$$

Нехай $L' \neq 0$. Позначимо $a^2 = |L'|/|A|$, $b^2 = |L'|/|B|$, $c^2 = |L'|/|C|$, прийдемо до **зміщеного рівняння поверхні другого порядку**. В залежності від знаків коефіцієнтів, це можуть бути рівняння:

еліпсоїда $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

однопорожнинного гіперболоїда (рис. 48)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1,$$

двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1,$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1,$$

або уявного еліпсоїда

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1,$$

Якщо $L'=0$, то, вводячи позначення $a^2=1/|A|$, $b^2=1/|B|$, $c^2=1/|C|$, також приходимо до зміщеного рівняння поверхні другого порядку. В залежності від знаків коефіцієнтів рівняння це можуть бути рівняння:

конуса

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0,$$

або **точки**

$$\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}+\frac{\left(z-z_0\right)^2}{c^2}=0,$$

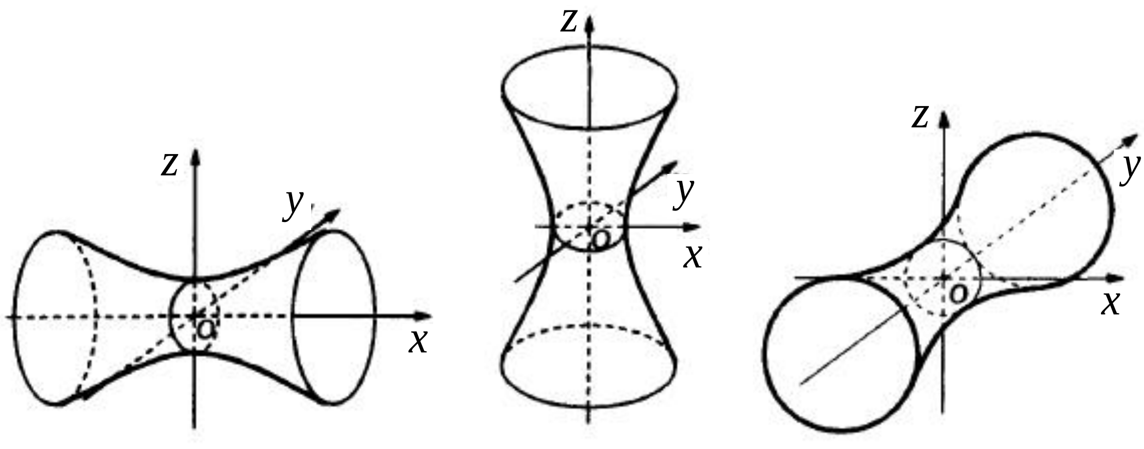


Рис. 48.

2. Рівняння містить квадрати двох змінних. Тут виділяються три випадки:

а) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$;

б) $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$;

в) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$.

Ці випадки зводяться один до одного перепозначенням змінних. Тому вони дають одні й ті ж результати, і нам достатньо розглянути лише один з них, наприклад перший. Якщо $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$, то у випадку $K = 0$ третя змінна z взагалі не входить в рівняння, яке в цьому випадку є рівнянням **циліндра другого порядку**. Всі виникаючі ситуації і тип поверхні повністю характеризуються напрямною циліндра в площині xOy. У разі $K \neq 0$ виділення повного квадрата по x (при $G \neq 0$) і по y (при $H \neq 0$) перетворює рівняння до вигляду:

$$A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2 = -K(z - z_0),$$

де $x_0 = -\dfrac{G}{2A}$, $y_0 = -\dfrac{H}{2B}$, $z_0 = \dfrac{L'}{K}$, $L'_0 = -L + \dfrac{G^2}{4A} + \dfrac{H^2}{4B}$

.

Введемо позначення $a^2 = 1/|A|$, $b^2 = 1/|B|$, $p = |K|/2$, дістанемо зміщене рівняння поверхні другого порядку. В залежності від знаків коефіцієнтів, це можуть бути рівняння:

еліптичного параболоїда

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 2p(z - z_0),$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -2p(z - z_0),$$

гіперболічного параболоїда

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=2p(z-z_0),$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-2p(z-z_0),$$

3. Рівняння містить квадрат тільки однієї змінної. Тут також виникають три симетричні випадки (квадрат *x*, квадрат *y*, квадрат *z*). Зупинимося на випадку $A\neq 0$. Якщо рівняння не містить або доданка з *y* в першому степені, або такого ж доданка із *z*, то реалізується випадок циліндра другого порядку, який зводиться до дослідження направляючої циліндра. Якщо ж у рівнянні присутні обидва зазначених доданків першого степеня, як, наприклад, в рівнянні $x^2+y+2z=0$, то приведення рівняння до канонічного виду вимагає повороту системи координат в просторі.

Приклад 37. Дослідити неповне рівняння поверхні другого порядку за допомогою паралельного переносу прямокутної системи координат:

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-36y+72z+40=0$$

Розв'язання.

Рівняння містить кожну з трьох змінних в першій і в другій степені. Тому по кожній змінній виділяємо повний квадрат:

$$4(x^2-2x+1-1)+9(y^2-4y+4-4)+36(z^2+2z+1-1)+40=0$$
,

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2+36(z+1)^2=36,$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}+(z+1)^2=1.$$

Дістали зміщене рівняння **еліпсоїда** із центром в точці O'(1, 2, -1) і півосями

$a = 3,\ b = 2,\ c = 1$. Відповідне канонічне рівняння виходить після паралельного перенесення системи координат $x' = x - 1$, $y' = y - 2$, $z' = z + 1$ і має вигляд

$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} + (z')^2 = 1. \blacktriangleright$$

Приклад 38. Дослідити поверхню

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0.$$

Розв'язання.

По кожній змінній виділяємо повний квадрат:

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 - 4y + 4 - 4) + (z^2 - 2z + 1 - 1) - 3 = 0,$$

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1. \blacktriangleright$$

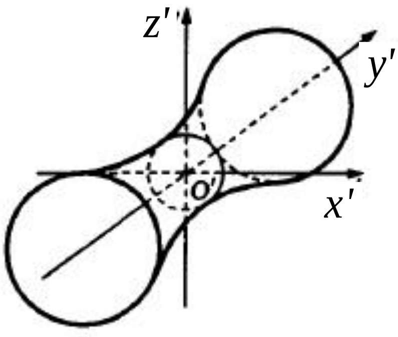
Дістали зміщене рівняння **однопорожнинного гіперболоїда** обертання з центром в точці $O'(1,\ 2,\ 1)$. Після паралельного переносу системи координат в цю точку $x' = x - 1$, $y' = y - 2$, $z' = z - 1$ рівняння набуває вигляд:

$$(x')^2 - (y')^2 + (z')^2 = 1.$$

Це рівняння не є канонічним через невідповідність знаків. Віссю обертання гіперболоїда є вісь $O'y'$ нової системи координат (рис. 49, а).

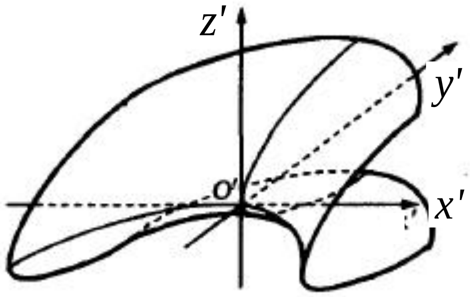
Конічні та лінійчаті поверхні

Поверхня, яка утворюється при русі прямої, що проходить через деяку фіксовану точку A, називають ***конічною*** (рис. 50). Конічна поверхня відноситься до більш широкого класу **лінійчатих поверхонь,**



а

Рис. 49.



б

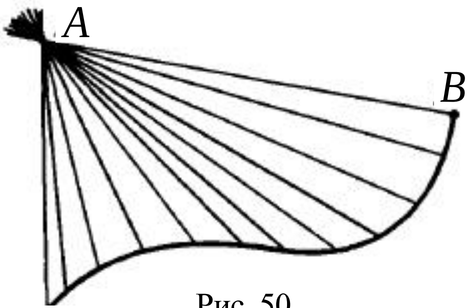


Рис. 50

які утворюються прямою, яка рухається (рис. 51). Якщо рухома пряма весь час проходить через фіксовану точку (що, взагалі кажучи, необов'язково), то лінійчата поверхня буде конічною. Якщо пряма рухається паралельною своєму початковому положенню, отримаємо інший вид лінійчатої поверхні - **циліндричну поверхню**.

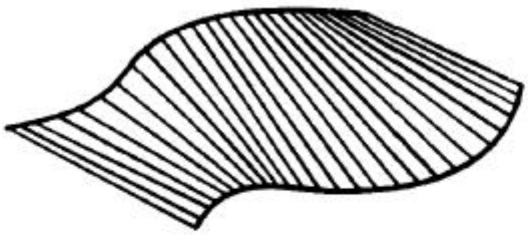


Рис. 51.

Лінійчатими, але не конічними, поверхнями є **однопорожнинний гіперболоїд** і **гіперболічний параболоїд**. Щоб переконатися в цьому, розглянемо однопорожнинний гіперболоїд, заданий своїм канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Перенесемо другий доданок лівої частини рівняння в його праву частину $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$ і перетворимо рівняння до наступного вигляду:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

При будь-якому значенні параметра λ система

$$\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

є загальним рівнянням прямої. Ця пряма при будь-якому λ належить однопорожнинному гіперболоїду, оскільки при $\lambda\neq 0$ рівняння гіперболоїда отримуємо перемноживши рівняння системи та скороченням на λ. При $\lambda=0$ рівняння однопорожнинного гіперболоїда випливає з системи, оскільки обидві частини містять множники, рівні нулю. Таким чином, однопорожнинному гіперболоїду належить нескінченно багато прямих, які задаються загальними рівняннями системи. Якщо до цих прямих додати ще одну пряму $\begin{cases} 1-\frac{y}{b}=0, \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \end{cases}$ яку можна співвіднести з нескінченним значенням параметра λ, то через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда буде проходити одна пряма множини, яка лежить на гіперболоїді. Відповідне значення λ можна знайти із системи .

Отже, гіперболоїд є множиною прямих, які задані загальним рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}.$$

Ці прямі називають **прямолінійними твірними однопорожнинного гіперболоїда** (рис. 52).

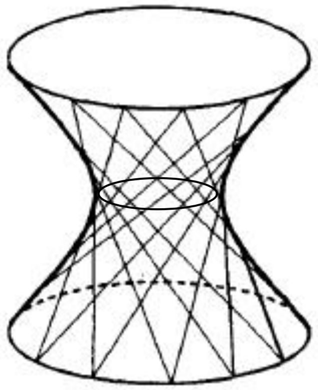


Рис. 52

Однопорожнинний гіперболоїд має також другу множину прямолінійних твірних, які описуються системою рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$

Прямолінійні утворюючі гіперболічного параболоїда знаходяться так само, як і однопорожнинного гіперболоїда.

Конічні перерізи

Важливою особливістю **прямого кругового конуса** є те, що всі криві другого порядку трьох типів: еліпси, гіперболи, параболи — можуть бути

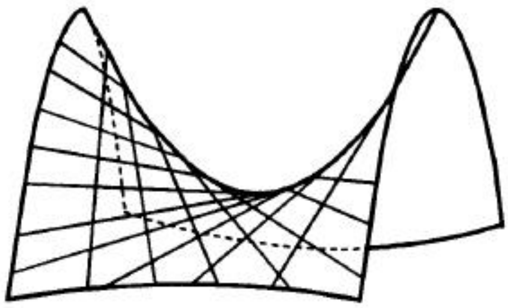


Рис. 53

отримані як **конічні перерізи**, тобто перерізи конуса різними площинами. Розглянемо прямий круговий конус, який в прямокутній системі координат *Oxyz* описується рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ і геометрично утворюється при обертанні навколо осі Oz прямої $z = x$, яка належить координатній площині xOz. Розглянемо перерізи площинами, які перпендикулярні координатній площині xOz. Таким площинам відповідають рівняння $Ax + Bz + D = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$. Якщо $B = 0$, то січна площина має рівняння $x = x_0$, де $x_0 = -D/A$, і паралельна координатній площині yOz. Підставивши значення абсциси x_0 в рівняння конуса, знайдемо, що перетин в площині $x = x_0$ описується рівнянням $z^2 - y^2 = x_0^2$ і при $x_0 \neq 0$ є **рівнобічною гіперболою** (рис. 54, а), а при $x_0 = 0$ - пару прямих, які є твірними конуса (рис. 54, б). Нехай в рівнянні січної площини коефіцієнт $B \neq 0$. Тоді площину можна представити рівнянням $z = kx + b$, де $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{D}{B}$. В силу симетрії конуса відносно площини *Oxy* достатньо обмежитися випадком, коли $k < 0$. Конічний перетин для розглянутої площини у просторі буде описуватися системою двох рівнянь :

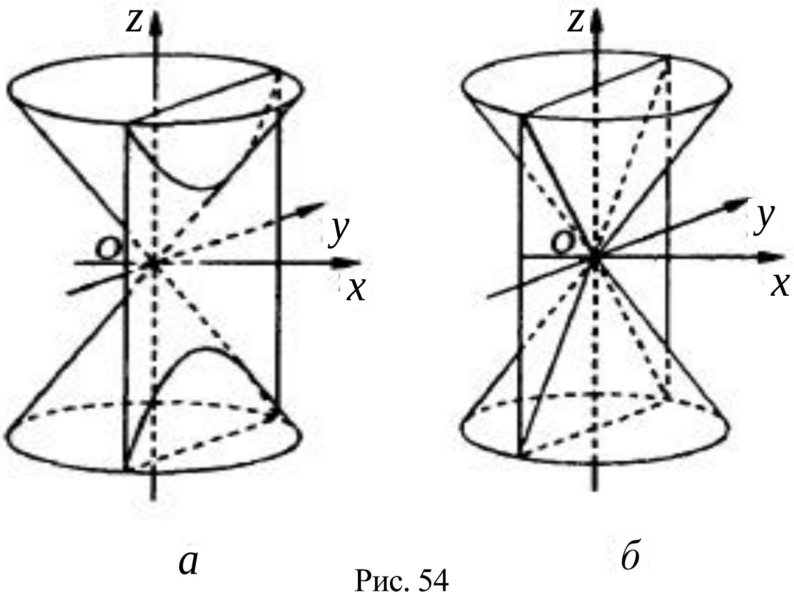


Рис. 54

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = kx + b \end{cases}.$$

Щоб отримати рівняння кривої в січній площині, розглянемо прямокутну систему координат $O'vu$, взявши в якості координатних осей $O'u$ і $O'v$ прямі, які є перетинами січної площини з координатними площинами xOz і xOy (рис. 55).

Координати u і v довільній точки в січній площині будуть пов'язані з її координатами x, y і z у просторі співвідношеннями

$$\begin{cases} x = x_0 + u\cos\varphi = x_0 - \dfrac{u}{\sqrt{1+k^2},} \\ y = v, \\ z = u\sin\varphi = -\dfrac{ku}{\sqrt{1+k^2}}, \end{cases}$$

де φ - кут між конічним перетином, перпендикулярним координатній площині *xOz*, і координатною площиною *xOy* (рис. 55), причому $k = tg\varphi$, а $x_0 = -b/k$. Підставляючи знайдені значення x_0 і k в перше рівняння системи , отримаємо рівняння конічного перетину в системі координат $O'vu$:

$$\left(x_0 - \frac{u}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 + v^2 - \left(-\frac{ku}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 = 0.$$

Розкриваючи дужки і приводячи подібні, знаходимо

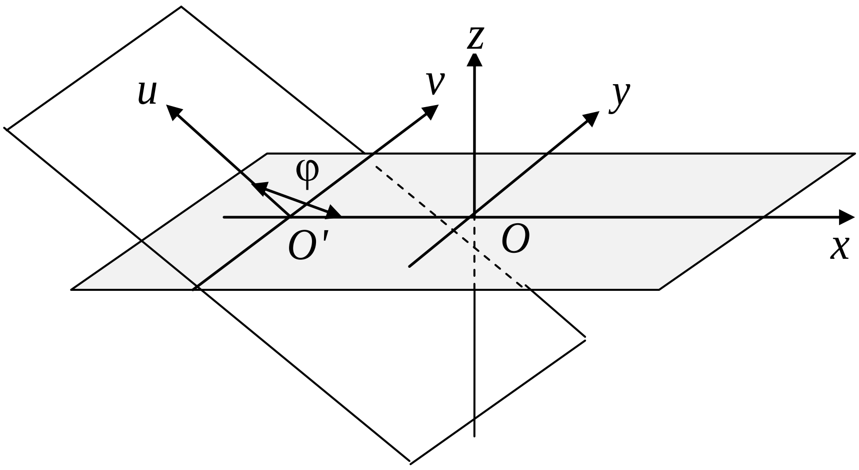
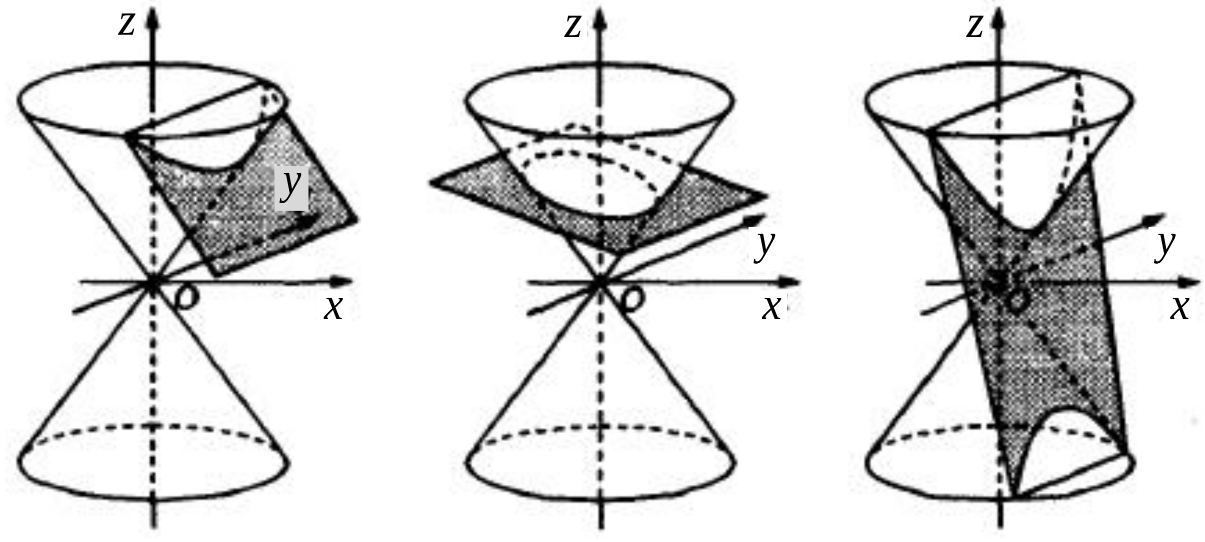


Рис. 55

$$\frac{1-k^2}{1+k^2}u^2 + \frac{2b}{k\sqrt{1+k^2}}u + \frac{b^2}{k^2} + v^2 = 0$$

При $k = -1$, коли січна площина утворює з площиною *xOy* той самий кут, що й твірні конуса, конічні перетини будуть параболами (рис. 56, *a*) і описуватися рівнянням $v^2 = b\sqrt{2}(u - b/\sqrt{2})$. Варіюючи параметр b в рівнянні січної площини, в якості конічного перетину можна отримати будь-яку параболу.



а *б* *в*

Рис. 56

При $k \neq -1$ $(k < 0)$ рівняння набуває вигляду

$$\frac{1-k^2}{1+k^2}\left(u+\frac{b\sqrt{1+k^2}}{k(1-k^2)}\right)+v^2=\frac{b^2}{1-k^2}$$

Тут можливі два варіанти. При $-1 < k \leq 0$, тобто коли січна площина утворює з площиною *xOy* менший кут, ніж твірна конуса, виконано нерівність $1-k^2>0$ і тому рівняння конічного перетину є рівнянням еліпса (рис. 56, *б*). І тут, варіюючи параметри b і k в рівнянні січної площини, ми можемо отримати в перерізі будь-який еліпс.

При $k < -1$, тобто коли січна площина утворює з площиною *xOy* більший кут, ніж твірна конуса, маємо $1-k^2<0$, так що конічний перетин, який описується рівнянням, є гіперболою (рис. 56, в). Варіюючи параметри b і k, можна отримати в конічному перерізі будь-яку гіперболу.

Тема 4. Завдання для самостійного опрацювання

4.1. Скласти рівняння сфери, центр якої лежить на прямій $\begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ і яка дотикається площин $x+2y-2z-2=0$ і $x+2y-2z+4=0$.

4.2. Дослідити, яка крива визначається наступним рівнянням $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49 \\ y=0 \end{cases}$.

4.3. Дослідити, яка крива визначається наступним рівнянням $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20 \\ z-2=0 \end{cases}$.

4.4. Дослідити, яка крива визначається наступним рівнянням $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49 \\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0 \end{cases}$.

4.5. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$.

4.6. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$.

4.7. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $x^2+y^2-z^2=-1$.

4.8. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $x^2-y^2=z^2$.

4.9. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $x^2+y^2=4z$.

4.10. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $x^2-y^2=4z$.

4.11. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $2z=x^2+\frac{y^2}{2}$.

4.12. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $x^2 = 4z$.

4.13. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $z = 2 + x^2 + y^2$.

4.14. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$.

4.15. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

4.16. Визначити тип заданої поверхні та побудувати її: $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

4.17. Дослідити яка крива визначається наступним рівнянням:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases}.$$

4.18. Дослідити яка крива визначається наступним рівнянням:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}.$$

4.19. Побудувати циліндричну поверхню $y^2 + z^2 = 4$.

4.20. Побудувати циліндричну поверхню $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4.21. Побудувати циліндричну поверхню $x^2 + y^2 = -2x$.

4.22. Побудувати циліндричну поверхню $x^2 = 6z$.

4.23. Побудувати циліндричну поверхню $z = 4 - x^2$.

4.24. Побудувати циліндричну поверхню $x^2 - z^2 = 0$.

4.25. Побудувати циліндричну поверхню $xz = 4$.

4.26. Побудувати циліндричну поверхню $y^2 + z^2 = -z$.

4.27. Скласти рівняння трьох циліндричних поверхонь, які описані навколо сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$ із вісями, паралельними осям координат. Зробити рисунки.

4.28. Скласти рівняння поверхні, кожна точка якої рівновіддалена від прямої $\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ і площини Oyz. Побудувати поверхнюю.

4.29. Побудувати тіло, яке обмежене поверхнями $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x = 4$ і написати рівняння діагоналей грані, яка лежить в площині $x = 4$.

4.30. Скласти рівняння циліндра, якщо його вісь колінеарна вектору $\vec{s} = (1,2,3)$ і напрямна крива має рівняння $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases}$.

4.31. Скласти рівняння циліндра, якщо його вісь колінеарна вектору $\vec{s} = (1,1,1)$ і напрямна крива має рівняння $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4x \end{cases}$.

4.32. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а напрямна крива має рівняння $\begin{cases} z = 10 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$. Зробити рисунок.

4.33. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а напрямна крива має рівняння $\begin{cases} y = 3 \\ x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 25 \end{cases}$. Зробити рисунок.

4.34. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а напрямна крива має рівняння $\begin{cases} x = 5 \\ \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$. Зробити рисунок.

4.35. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат, а напрямна крива має рівняння $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Зробити рисунок.

4.36. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці $M_0 = (0,-1,0)$, а напрямна крива має рівняння $\begin{cases} x^2 = 6y \\ z = 5 \end{cases}$. Зробити рисунок.

4.37. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці $M_0 = (0,0,1)$, а напрямна крива має рівняння $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ x = 5 \end{cases}$. Зробити рисунок.

4.38. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці $M_0 = (3,-1,-2)$, а напрямна крива має рівняння $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Зробити рисунок.

4.39. Скласти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні кривої $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oz. Зробити рисунок.

4.40. Скласти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні кривої $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ навколо вісі Ox. Зробити рисунок.

4.41. Складти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні прямої $\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy. Зробити рисунок.

4.42. Складти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні прямої $\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oz. Зробити рисунок.

4.43. Складти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні навколо вісі Oz кривої $\begin{cases} z = e^{-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$ навколо вісі. Зробити рисунок.

4.44. Складти рівняння поверхні, яка утворюється при обертанні навколо вісі Oz кривої $\begin{cases} z = \dfrac{4}{x^2} \\ y = 0 \end{cases}$ навколо вісі. Зробити рисунок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сущук-Слюсаренко В.І. Лінійна алгебра та аналітична геометрія (додаткові розділи): навч.-метод. посіб. – К.:НТУУ «КПІ», 2013,- с.188.
2. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб.для вузов. 3-е изд., стереотип./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 336 с.(Сер. Математика в техническом университете; Вып. IV)
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учеб.для вузов. 2-е изд., стереотип./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П.

Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 388 с.(Сер. Математика в техническом университете; Вып. III)

4. Авдєєва Т.В., Андросенко М.П., Кухарчук М.М. Збірник задач з лінійної алгебри: Навчально-методичний посібник: НТУУ «КПІ» ФМФ, 2002.-139 с.

5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.I. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. Пособие для втузов./Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. -464 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упраженениях и задачах. В 2-х ч. Ч.I: Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш.шк., 1999. – 304 с.