

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДО
РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.
ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Збірник задач до розрахункових робіт з вищої математики: збірник завдань [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. Л. Гречко, М.Є. Дудкін. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,60 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021 – 280 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-Математичного Факультету (протокол № 3 від 29.03.2021 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДО РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

Укладачі:
А. Л. Гречко, канд.фіз.-мат. наук, доц. каф. диференціальних рівнянь ФМФ;
М. Є. Дудкін, док.фіз.-мат. наук, проф. каф. диференціальних рівнянь ФМФ;

Відповідальний редактор *Волков Андрій Вікторович, канд.фіз.-мат. наук, доц. каф. диференціальних рівнянь ФМФ;*

Рецензент *Дюженкова Ольга Юріївна, канд.фіз.-мат. наук, доц. каф. математичної фізики ФМФ;*

Збірник містить завдання, які необхідні для оволодіння курсом вищої математики, що вивчається студентами інженерних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського . Окрім того задачник буде корисним не тільки студентам інженерних спеціальностей, але й для студентів інших спеціальностей, де курс вищої математики відокремлений в окремий кредитний модуль.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ

Вступ	5
Розділ 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія	6
1. Визначники та дії над матрицями.....	6
2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	6
3. Лінійна залежність векторів.....	10
4. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.....	11
5. Рівняння прямої на площині.....	16
6. Рівняння площини.....	19
7. Рівняння прямої в просторі.....	20
8. Криві другого порядку. Полярна система координат.....	24
Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної	26
1. Границя послідовності.....	26
2. Границя функції. Порівняння нескінченно малих.....	28
3. Класифікація розривів.....	33
4. Похідна функції.....	36
5. Дотична до кривої. Похідні вищих порядків.....	40
6. Диференціал функції. Наближені обчислення. Правило Лопіталя.....	41
7. Дослідження функцій.....	43
8. Найбільші та найменші значення функції.....	45
Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної	45
1. Невизначений інтеграл.....	46
2. Визначений інтеграл та його застосування.....	54
3. Невласні інтеграли.....	61
Розділ 4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних	64
1. Частинні похідні та диференціали.....	65
2. Дотична площина та нормаль до поверхні.....	68
3. Екстремуми функцій багатьох змінних.....	69
Розділ 5. Диференціальні рівняння	74
1. Диференціальні рівняння першого порядку.....	74
2. Диференціальні рівняння, що дозволяють зниження порядку... ..	79
3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків із сталими коефіцієнтами.....	80
4. Системи диференціальних рівнянь. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.....	83

Розділ 6. Ряди.....	90
1. Числові ряди.....	90
2. Степеневі ряди.....	96
3. Ряди Фур'є.....	102
Розділ 7. Кратні інтеграли та теорія поля.....	109
1. Подвійний інтеграл.....	109
2. Потрійний інтеграл. Заміна змінної.....	115
3. Застосування кратних інтегралів.....	118
4. Криволінійні та поверхневі інтеграли.....	122
5. Теорія поля.....	129
Розділ 8. Функції комплексної змінної.....	136
1. Головні функції комплексної змінної. Диференціювання функцій комплексної змінної.....	136
2. Інтегрування функцій комплексної змінної.....	140
3. Розвинення функцій в ряди Тейлора та Лорана. Класифікація особливих точок.....	142
4. Лишки та їх застосування.....	146
Розділ 9. Інтегральні перетворення.....	150
1. Перетворення Лапласа та його застосування.....	150
2. Перетворення Фур'є та його застосування.....	155
Розділ 10. Елементи математичної фізики.....	158
1. Зведення до канонічного вигляду лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку.....	158
2. Задача Діріхле для рівняння Лапласа.....	161
3. Метод розділення змінних в хвильовому рівнянні та рівнянні теплопровідності.....	164
Розділ 11. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.....	169
1. Випадкові події.....	169
2. Дискретні та неперервні випадкові величини. Функції від випадкових величин та їх закон розподілу.....	181
3. Вибірка та її характеристики. Оцінка параметрів розподілу та довірчі інтервали.....	194
4. Статистична перевірка гіпотез. Кореляція та регресія.....	209
Додаток 1. Задачі підвищеної складності по темі «Диференціальні рівняння».....	225
Додаток 2. Таблиці.....	271
Список використаної літератури.....	280

Вступ

Активна самостійна робота студента – запорука успішного оволодіння дисципліною, яка вивчається студентом починаючи з 1 курсу. Однією з найважливіших форм учбового процесу з математики є розв'язання розрахункових робіт (РР), тобто індивідуальних домашніх завдань в достатньо великій кількості, які виконуються на протязі декількох тижнів. Кожна розрахунково-графічна задача виконується викладачем в 30 варіантах майже однакової складності, що ускладнює задачу їх компоновки.

Запропонований збірник написаний у відповідності до навчальної та робочої програми курсу «Вища математика» для підготовки бакалаврів усіх інженерно-технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського та інших університетів України. Електронний збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань з усіх тем, які входять в програму курсу вищої математики на протязі 1-2 курсу навчання. Розрахункова робота сприяє поглибленому вивченню методів розв'язання задач з вищої математики та також надає студентам важливий досвід роботи з сучасною науковою літературою.

Збірник задач складено на основі багаторічного досвіду роботи авторів у технічних вузах. Послідовність розділів, параграфів та умов задач в основному відповідають робочим навчальним програмам з вищої математики 1-4 семестрів. Зауважимо, що всі варіанти задач збірника ніяк не перетинаються із відомими збірниками типових розрахункових робіт [6-8] та мають не схематизований вигляд, коли сусідні варіанти задачі відрізняються тільки на декілька цифр.

Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи укладачі пропонують студентам ознайомитись з теоретичним матеріалом за відповідними темами зі списку рекомендованої літератури, а також розібратися у наведених прикладах розв'язування деяких типових задач.

Розділ 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.

Теорія: [1, гл.1-3], [3, гл. 2-6].

Методика розв'язування задач: [4, том1, гл.1-6].

1. Визначники та дії над матрицями.

Задача 1.1. Знайти доданок визначника, який містить x^3 :

$$\begin{vmatrix} 3x & -1 & 2 & 1 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & n & x & 1 \\ x & -1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

де n – номер варіанта (від 1-30).

Задача 1.2. Знайти матрицю X в матричному рівнянні (n – номер варіанта):

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -1 & n \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Задача 1.3. Розв'язати систему за формулами Крамера, у матричний спосіб, методом Гауса.

$$1. \begin{cases} 2x - y + 5z = 12 \\ -3x + 2y + 4z = -8 \\ x - 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - 6y + 3z = -6 \\ 3x + y - 2z = 14 \\ -x + 5y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x - y - 2z = 11 \\ 5x - 2y + 4z = 3 \\ 2x + y - 3z = 14 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -3x + 2y + z = -7 \\ 2x + 5y - z = 12 \\ 4x - y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ 2x + y - 3z = 13 \\ x - 2y - z = -2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + 3y - z = -8 \\ x - 2y + 4z = 20 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - 5y - z = 9 \\ 3x + 2y + 3z = 13 \\ -x + y - z = -6 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \\ 3x + 5y + z = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x + 3y - 2z = 10 \\ -3x + y - z = -6 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ x + 4y - 2z = -13 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x - 2y + z = 8 \\ 2x + 5y - 4z = -12 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 16 \\ x + 4y - z = -5 \\ -x + y - 5z = -18 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x + 4y - z = 8 \\ 2x - y + 5z = -13 \\ 3x - 2y + 4z = -11 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x + 4y - 5z = 24 \\ x - 2y + 3z = -11 \\ 4x - y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - 4y + 2z = -8 \\ x + 2y - 3z = 19 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
16. \begin{cases} 4x - y + 2z = -9 \\ -3x + 2y - 3z = 5 \\ 5x + 7y + z = -6 \end{cases} & 17. \begin{cases} 3x - 4y + z = -8 \\ 2x + y - 8z = 23 \\ 5x - 3y - 2z = 5 \end{cases} & 18. \begin{cases} 2x - 3y + z = -18 \\ 3x + 4y - 3z = 11 \\ -x + 3y + 2z = 19 \end{cases} \\
19. \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 4 \\ x + 2y - 5z = -12 \\ 3x - y + 2z = -5 \end{cases} & 20. \begin{cases} 3x - 4y + 5z = 0 \\ -2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y + 3z = 1 \end{cases} & 21. \begin{cases} 2x - 5y - 3z = 0 \\ -x + 4y - z = -9 \\ 3x - y + 5z = 22 \end{cases} \\
22. \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -8 \\ x + 5y - 2z = 17 \\ 3x - 2y + 3z = -1 \end{cases} & 23. \begin{cases} 3x - 4y + 2z = -4 \\ x + 2y - 3z = 13 \\ -2x + 3y + 4z = -13 \end{cases} & 24. \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 5x + 2y - 4z = -24 \\ -2x + y + 2z = 9 \end{cases} \\
25. \begin{cases} 4x - y + 2z = 13 \\ 3x + 5y - z = -15 \\ x - 2y - 3z = -2 \end{cases} & 26. \begin{cases} 3x - 2y + z = 10 \\ 4x + y - 2z = -4 \\ x - 3y + 4z = 19 \end{cases} & 27. \begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \end{cases} \\
28. \begin{cases} 3x - 4y + 2z = -8 \\ 2x + y - 3z = -11 \\ x - 2y + 5z = 9 \end{cases} & 29. \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 9 \\ -x + 4y - z = 3 \end{cases} & 30. \begin{cases} 2x - y - z = 8 \\ 5x + 3y + 4z = 8 \\ -x + 2y - 3z = -2 \end{cases}
\end{array}$$

Задача 1.4. Користуючись теоремою Кронекера-Капеллі дослідити сумісність та розв'язати систему

$$\begin{array}{lll}
1. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases} & 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases} & 3. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \\
4. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases} & 5. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases} & 6. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \\
7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} & 9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -7 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -10 \end{cases} \\
10. \begin{cases} x_1 + 11x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} & 11. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} & 12. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases} \\
13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases} & 14. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases} & 15. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 11x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
16. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases} \\
17. \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - x_3 - 10x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 4 \end{cases} \\
18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \\
19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases} \\
20. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases} \\
21. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} \\
22. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 6 \end{cases} \\
23. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 7x_3 = 1 \end{cases} \\
24. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \\
25. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 13x_2 - 14x_3 - 10x_4 = -14 \end{cases} \\
26. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 15 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases} \\
27. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases} \\
28. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases} \\
29. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases} \\
30. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}
\end{array}$$

Задача 1.5. Знайти загальний розв'язок, побудувавши фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{array}{l}
1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0 \\ 7x_1 - 14x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases} \\
2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 14x_4 = 0 \\ 10x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \\
3. \begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0 \end{cases} \\
4. \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0 \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}
\end{array}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 12x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
23. \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0 \\ -6x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0 \\ 8x_1 - 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} & 24. \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \\
25. \quad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0 \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases} & 26. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \\
27. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases} & 28. \quad \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \\
29. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0 \end{cases} & 30. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}
\end{array}$$

3. Лінійна залежність векторів.

Задача 1.6. Перевірити, що вектори $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ утворюють базис та розкласти вектор \vec{w} по цьому базису.

1. $\vec{x} = (1, 2, 3), \vec{y} = (-1, 3, 2), \vec{z} = (7, -3, 5), \vec{w} = (6, 10, 17);$
2. $\vec{x} = (4, 7, 8), \vec{y} = (9, 1, 3), \vec{z} = (2, -4, 1), \vec{w} = (1, -13, -13);$
3. $\vec{x} = (8, 2, 3), \vec{y} = (4, 6, 10), \vec{z} = (3, -2, 1), \vec{w} = (7, 4, 11);$
4. $\vec{x} = (10, 3, 1), \vec{y} = (1, 4, 2), \vec{z} = (3, 9, 2), \vec{w} = (19, 30, 7);$
5. $\vec{x} = (2, 4, 1), \vec{y} = (1, 3, 6), \vec{z} = (5, 3, 1), \vec{w} = (24, 20, 6);$
6. $\vec{x} = (1, 7, 3), \vec{y} = (3, 4, 2), \vec{z} = (4, 8, 5), \vec{w} = (7, 32, 14);$
7. $\vec{x} = (1, -2, 3), \vec{y} = (4, 7, 3), \vec{z} = (6, 4, 2), \vec{w} = (14, 18, 6);$
8. $\vec{x} = (1, 4, 3), \vec{y} = (6, 8, 5), \vec{z} = (3, 1, 4), \vec{w} = (21, 18, 33);$
9. $\vec{x} = (2, 7, 3), \vec{y} = (3, 1, 8), \vec{z} = (2, -7, 4), \vec{w} = (16, 14, 27);$
10. $\vec{x} = (7, 2, 1), \vec{y} = (4, 3, 5), \vec{z} = (3, 4, -2), \vec{w} = (2, -5, -13);$
11. $\vec{x} = (0, 1, 2), \vec{y} = (1, 0, 1), \vec{z} = (-1, 2, 4), \vec{w} = (-2, 4, 7);$
12. $\vec{x} = (1, -2, 0), \vec{y} = (-1, 1, 3), \vec{z} = (1, 0, 4), \vec{w} = (6, -1, 7);$

13. $\vec{x} = (1, 0, 5), \vec{y} = (-1, 3, 2), \vec{z} = (0, -1, 1), \vec{w} = (5, 15, 0);$
14. $\vec{x} = (1, 3, 0), \vec{y} = (2, -1, 1), \vec{z} = (0, -1, 2), \vec{w} = (6, 12, -1);$
15. $\vec{x} = (0, 2, 1), \vec{y} = (0, 1, -1), \vec{z} = (5, -3, 2), \vec{w} = (15, -20, 1);$
16. $\vec{x} = (0, -2, 1), \vec{y} = (3, 1, -1), \vec{z} = (4, 0, 1), \vec{w} = (0, -8, 9);$
17. $\vec{x} = (1, 0, 1), \vec{y} = (1, -2, 0), \vec{z} = (0, 3, 1), \vec{w} = (2, 7, 6);$
18. $\vec{x} = (0, 1, 5), \vec{y} = (3, -1, 2), \vec{z} = (-1, 0, 1), \vec{w} = (8, -7, -13);$
19. $\vec{x} = (-2, 0, 1), \vec{y} = (1, 3, -1), \vec{z} = (0, 4, 1), \vec{w} = (-5, -5, 5);$
20. $\vec{x} = (1, 1, 1), \vec{y} = (0, -3, 2), \vec{z} = (2, 1, -1), \vec{w} = (6, 5, -14);$
21. $\vec{x} = (3, 1, 0), \vec{y} = (-2, 2, 1), \vec{z} = (-1, 0, 2), \vec{w} = (3, 3, -1);$
22. $\vec{x} = (1, 0, 2), \vec{y} = (0, 1, 1), \vec{z} = (2, -1, 4), \vec{w} = (3, -3, -1);$
23. $\vec{x} = (4, 1, 1), \vec{y} = (2, 0, -3), \vec{z} = (-1, 2, 1), \vec{w} = (-9, 5, 5);$
24. $\vec{x} = (2, 1, -1), \vec{y} = (0, 3, 2), \vec{z} = (1, -1, 1), \vec{w} = (1, -4, 4);$
25. $\vec{x} = (5, 1, 0), \vec{y} = (2, -1, 3), \vec{z} = (1, 0, -1), \vec{w} = (13, 2, 7);$
26. $\vec{x} = (-2, 0, 1), \vec{y} = (1, 3, -1), \vec{z} = (0, 4, 1), \vec{w} = (-5, -5, 5);$
27. $\vec{x} = (1, 3, 0), \vec{y} = (2, -1, 1), \vec{z} = (0, -1, 2), \vec{w} = (6, 12, -1);$
28. $\vec{x} = (0, 1, 1), \vec{y} = (-2, 0, 1), \vec{z} = (3, 1, 0), \vec{w} = (-19, -1, 7);$
29. $\vec{x} = (-1, 2, 1), \vec{y} = (2, 0, 3), \vec{z} = (1, 1, -1), \vec{w} = (-1, 7, -4);$
30. $\vec{x} = (1, 1, 0), \vec{y} = (0, 1, -2), \vec{z} = (1, 0, 3), \vec{w} = (2, -1, 11);$

4. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.

Задача 1.7. Користуючись властивостями скалярного добутку розв'язати:

1. Знайти проекцію вектору $\vec{a} = (-3, 1, 3)$ на вектор \overline{AB} , $A = (7, 3, -2)$, $B = (8, 2, -2)$.
2. Знайти одиничний вектор, який перпендикулярний векторам $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$.
3. При якому значенні t вектори $\vec{a} = (6, 0, 12)$, $\vec{b} = (-8, 13, t)$ будуть перпендикулярними?
4. Довести, що точки $A(1, -1, 1)$, $B(1, 3, 1)$, $C(4, 3, 1)$, $D(4, -1, 1)$ є вершинами прямокутника.
5. В прямокутному трикутнику ABC кути при вершинах A, C дорівнюють 60° та 90° відповідно, а довжина гіпотенузи дорівнює 2. Знайти скалярний добуток $\overline{AC} \cdot (\overline{AB} + \overline{CB})$.
6. Задані точки $A(0, -3, 4)$, $B(2, 5, -1)$, $C(-4, 2, -2)$. Знайти скалярний добуток $(3\overline{AB} - 2\overline{BC}) \cdot (\overline{CB} + \overline{BA})$.

7. В трикутнику ABC задані координати вершин $A(0, -3, 4)$, $B(2, 5, -1)$, $C(-4, 2, -2)$. Знайти зовнішній кут при вершині C .
8. Знайти координати вектору \vec{p} , який колінеарний вектору $\vec{q} = (3, -4, 0)$, якщо $|\vec{p}| = 10$ та утворює з віссю OX тупий кут.
9. Перевірити, що трикутник ABC є прямокутним, якщо його вершини є $A(1, 1, -1)$, $B(2, 4, -1)$, $C(8, 3, -1)$.
10. Перевірити, чи буде трикутник ABC гострокутним, якщо його вершинами є $A(1, 2, 3)$, $B(7, 10, 3)$, $C(-1, 3, 1)$.
11. Знайти роботу сили $\vec{F} = (4, -1, 1)$ при переміщенні $\vec{s} = (5, 3, -2)$.
12. Знайти координати вектору \vec{c} , який перпендикулярний векторам $\vec{a} = (2, 0, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2, -3)$ та утворює тупий кут з віссю OY , якщо $|\vec{c}| = \sqrt{17}$.
13. Знайти скалярний добуток векторів $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{b} + \vec{a})$, якщо $\vec{a} = (-1, 3, -7)$, $\vec{b} = (2, -1, 5)$.
14. Знайти кут між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$.
15. Знайти при якому m вектори $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ будуть перпендикулярними?
16. Знайти скалярний добуток векторів $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 2\vec{a})$, якщо $\vec{a} = (2, -5, -7)$, $\vec{b} = (5, 2, -5)$.
17. Вектори \vec{a}, \vec{b} утворюють кут 30° . Знайти довжину вектору $\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$.
18. При якому значенні t вектори $\vec{a} + t\vec{b}$ та $\vec{a} - t\vec{b}$ будуть перпендикулярними, якщо $\vec{a} = (2, -5, -7)$, $\vec{b} = (5, 2, -5)$.
19. Задані точки $A(0, -3, 4)$, $B(2, 5, -1)$, $C(-4, 2, -2)$ та вектор $\vec{a} = (3, 10, -5)$. Знайти скалярний добуток векторів $(2\vec{AB} - 3\vec{AC}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{AC})$.
20. Знайти координати вектору \vec{p} , якщо він колінеарний вектору $\vec{a} = (1, 2, 1)$ та складає гострий кут з віссю OX ; $|\vec{p}| = 3$.
21. Знайти координати вектору \vec{p} , якщо він колінеарний вектору $\vec{a} = (-4, 3, 2)$ та скалярний добуток його на вектор $\vec{b} = (-2, -3, 3)$ дорівнює 3.
22. Знайти проекцію вектору $\vec{p} = (2, -1, 2)$ на вісь, яка утворює рівні гострі кути з координатними осями.
23. Вектори \vec{a}, \vec{b} утворює кут 120° , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$.
24. Обчислити роботу, яку робить сила $\vec{F} = (2, 1, 4)$ при переміщенні точки $A(2, 1, -2)$ в точку $B(-1, -3, 6)$.
25. Знайти проекцію вектору $\vec{a} = (5, 2, 5)$ на вектор $\vec{b} = (2, -1, 2)$.

26. Знайти скалярний добуток векторів $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 6\vec{a})$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}, \vec{b} = \pi/3$.
27. Знайти проекцію вектору $\vec{a} = (-3, 1, 3)$ на вектор \overline{AB} , $A = (3, 3, 4)$, $B = (8, 12, -2)$.
28. Задані точки $A(-2, 4, 0)$, $B(1, 3, -5)$, $C(0, -1, 1)$ та вектор $\vec{a} = (-3, 1, -5)$. Знайти скалярний добуток векторів $(23 - 4\overline{AC}) \cdot (\vec{a} + 2\overline{AC})$.
29. Вектори \vec{a}, \vec{b} утворює кут 120° , $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$.
30. Знайти площу трикутника, який побудований на векторах $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (6, 3, -2)$, $\vec{b} = (3, -2, 6)$.

Задача 1.8. Користуючись властивостями векторного добутку векторів розв'язати:

- Відомо: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $a, b = \pi/4$. Знайти довжину вектору $\vec{p} = (7\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 3\vec{b})$.
- Сила $\vec{f} = (2, -4, 5)$ приложена до точки $A(4, -2, 3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(3, 2, -1)$.
- Обчислити площу трикутника, який побудований на векторах $3\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{b} - \vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $a, b = \pi/6$.
- Знайти вектор \vec{a} , якщо він перпендикулярний векторам $\vec{a} = (0, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 3, 3)$ та його скалярний добуток на вектор $\vec{p} = (3, -1, 2)$ дорівнює 8.
- Знайти довжину висоти трикутника ABC , яка виходить з точки C , якщо $A(2, 3, 4)$, $B(4, 3, 2)$, $C(1, 1, 1)$.
- Відомі вектори $\vec{a} = (3, 1, -1)$, $\vec{b} = (-2, 1, 4)$, знайти векторний добуток $\vec{b} \times (\vec{a} - 2\vec{i})$.
- Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ та $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $a, b = \pi/4$.
- Обчислити паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = (2, 1, -5)$, $\vec{b} = (2, 3, 6)$.
- Знайти вектор \vec{c} , якщо він перпендикулярний векторам $\vec{a} = (2, 3, 2)$, $\vec{b} = (1, -3, -3)$ та його скалярний добуток на вектор $\vec{p} = (-3, 1, 2)$ дорівнює -4.
- Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{a} + 4\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $a, b = \pi/3$.
- Обчислити площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = (1, 1, -5)$, $\vec{b} = (-2, 0, 6)$.
- Знайти орт \vec{e} , який перпендикулярний векторам

$$\vec{a} = (2, 1, -5), \vec{b} = (2, 3, 6).$$

13. Знайти векторний добуток векторів $(4\vec{b} - \vec{a}) \times (2\vec{b} + 3\vec{a})$, якщо $\vec{a} = (2, -1, -5), \vec{b} = (-2, 4, 6)$.
14. Знайти орт \vec{e} , який перпендикулярний векторам $\vec{a} = (0, 3, 5), \vec{b} = (4, 3, 6)$
15. Обчислити площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = (11, -1, 5), \vec{b} = (-2, 1, 2)$.
16. Задано точки: $A(0, 2, 0), B(3, 0, -4), C(2, 1, 1), D(-1, -1, -1)$. Обчислити векторний добуток $(\overline{AB} - 3\overline{BC}) \times (\overline{CD} + \overline{AC})$.
17. Знайти вектор \vec{a} , якщо він перпендикулярний векторам $\vec{a} = (0, 1, 2), \vec{b} = (1, -3, 3)$ та його скалярний добуток на вектор $\vec{p} = (-3, -1, 7)$ дорівнює 10.
18. Задано точки: $A(0, 2, 0), B(2, 0, -4), C(-2, 1, 1), D(-1, -1, -7)$. Обчислити векторний добуток $(\overline{AB} - 4\overline{BC}) \times (\overline{CD} - \overline{AC})$.
19. Знайти орт \vec{e} , який перпендикулярний векторам $\vec{a} = (-1, 2, 5), \vec{b} = (-4, 3, 2)$.
20. Спростити вираз $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$.
21. Спростити вираз $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$.
22. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} + 4\vec{b}$ та $2\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 7, a, b = \pi/4$.
23. Спростити вираз $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.
24. Задано точки: $A(0, 2, 0), B(2, 0, -4), C(-2, 1, 1), D(-1, -1, -7)$. Обчислити векторний добуток $(\overline{AB} + 3\overline{BC}) \times (\overline{2CD} - \overline{AC})$.
25. Знайти площу трикутника, який побудований на векторах $2\vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3, a, b = \pi/6$.
26. При яких значеннях α, β вектори $\vec{a} = (2, -\alpha, 4), \vec{b} = (\beta, -2, -1)$ колінеарні?
27. Знайти площу трикутника, який побудований на векторах $2\vec{a} - \vec{b}$ та $4\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, a, b = 2\pi/3$.
28. Задано точки: $A(0, 2, 0), B(2, 0, -4), C(-2, 1, 1), D(-1, -1, -7)$. Обчислити векторний добуток $(2\overline{AB} - 3\overline{BC}) \times (\overline{CD} - \overline{AC})$.
29. Обчислити площу трикутника, який побудований на векторах $\vec{a} = (1, -1, -5), \vec{b} = (3, 1, 7)$.
30. Знайти вектор \vec{c} , якщо він перпендикулярний векторам $\vec{a} = (-2, 1, 2), \vec{b} = (1, 5, -3)$ та його скалярний добуток на вектор $\vec{p} = (-3, 1, 2)$ дорівнює 11.

Задача 1.9. Користуючись властивостями мішаного добутку векторів розв'язати:

1. Чи лежать точки $A(5, 7, -2), B(3, 1, -1), C(9, 4, -4), D(1, 5, 0)$ в одній площині?
2. При якому значенні k точки $A(1, 0, 3), B(-1, 3, 4), C(1, 2, 1), D(k, 2, 5)$ лежать в одній площині?
3. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(0, 0, 1), B(2, 3, 5), C(6, 2, 3), D(3, 7, 2)$.
4. Знайти об'єм паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a} = (1, -3, 1), \vec{b} = (2, 1, -3), \vec{c} = (1, 2, 1)$.
5. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(0, 0, 1), B(2, 1, 5), C(6, 12, 3), D(3, 5, 2)$.
6. Знайти об'єм паралелепіпеда з вершинами в точках $A(2, 2, 2), B(4, 3, 3), C(4, 5, 4), D(5, 5, 6)$.
7. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (1, 1, m), \vec{b} = (2, 1, m + 1), \vec{c} = (1, -2, m)$ компланарні.
8. Чи лежать точки $A(1, 2, -2), B(3, 2, -1), C(0, 1, -2), D(3, 2, 3)$ в одній площині?
9. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(1, -2, 2), B(-1, 4, 0), C(-4, 1, 1), D(3, 7, 2)$.
10. Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, де $A(5, 2, 0), B(2, 5, 0), C(1, 2, 4), D(-1, 1, 1)$.
11. Чи будуть компланарні вектори $\vec{a} = (1, -2, -2), \vec{b} = (-2, -1, -2), \vec{c} = (0, -5, -6)$?
12. Чи лежать точки $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(7, 5, -3)$ в одній площині?
13. Чи лежать точки $A(1, 1, 1), B(2, 3, 1), C(3, 2, 1), D(5, 9, 8)$ в одній площині?
14. Знайти об'єм тетраедра, який побудований на векторах $\vec{a} = (1, 2, 2), \vec{b} = (2, 1, 2), \vec{c} = (4, 8, 9)$.
15. Знайти об'єм паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a} = (6, 3, 4), \vec{b} = (-1, -2, -1), \vec{c} = (2, 1, 2)$.
16. Знайти об'єм тетраедра, який побудований на векторах $\vec{a} = (-1, -2, -1), \vec{b} = (4, 3, 6), \vec{c} = (2, 1, 2)$.
17. Яку трійку (ліву чи праву) утворюють вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, де $A(1, 1, -1), B(2, 3, 1), C(3, 2, 1), D(5, 9, 8)$.
18. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(1, 3, 6), B(2, 2, 1), C(-1, 0, 1), D(-4, 6, -3)$.
19. Чи лежать точки $A(5, 2, 0), B(2, 5, 0), C(1, 2, 4), D(-1, 1, 1)$ в одній

- площині?
20. Чи будуть компланарні вектори $\vec{a} = (3, 7, 2)$, $\vec{b} = (-2, 0, -1)$, $\vec{c} = (2, 2, 1)$?
 21. Чи лежать точки $A(-5, 2, 0)$, $B(1, 5, 1)$, $C(1, 0, 4)$, $D(1, 1, 2)$ в одній площині?
 22. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(5, 0, -6)$, $D(-10, 9, -7)$.
 23. Чи лежать точки $A(-1, 2, 1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(1, 2, -1)$, $D(2, 1, 3)$ в одній площині?
 24. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 4, 2)$.
 25. Чи лежать точки $A(1, 4, 0)$, $B(-4, 1, 1)$, $C(1, -2, -21)$, $D(-5, -5, 3)$ в одній площині?
 26. Знайти довжину висоти піраміди, яка виходить з точки A де $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$.
 27. Знайти об'єм паралелепіпеда, який побудований \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , якщо $A(1, 2, -2)$, $B(-1, 4, 0)$, $C(4, 1, 1)$, $D(5, 5, -3)$.
 28. Чи лежать точки $A(-1, 2, -2)$, $B(-1, 4, 0)$, $C(4, -1, -1)$, $D(2, 5, -3)$ в одній площині?
 29. Знайти об'єм паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a} = (6, -3, 4)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$, $\vec{c} = (-2, 1, 2)$.
 30. Знайти довжину висоти піраміди, яка виходить з точки A , де $A(1, 0, 1)$, $B(-2, 1, 5)$, $C(2, 2, 3)$, $D(-3, -7, 2)$.

5. Рівняння прямої на площині.

Задача 1.10. В трикутнику ABC знайти:

- а) площу трикутника;
- б) рівняння та довжину висоти з вершини B ;
- в) кут між медіаною AM та стороною AC .

- | | |
|---|--|
| 1. $A(-3, 3)$, $B(5, 1)$, $C(6, -2)$. | 2. $A(2, -1)$, $B(4, 5)$, $C(-3, 2)$. |
| 3. $A(2, 0)$, $B(5, 3)$, $C(3, 7)$. | 4. $A(-3, -3)$, $B(5, -1)$, $C(6, -2)$. |
| 5. $A(2, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(3, 2)$. | 6. $A(0, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(3, -2)$. |
| 7. $A(-2, -1)$, $B(1, 1)$, $C(4, 0)$. | 8. $A(3, -1)$, $B(-3, 1)$, $C(1, 4)$. |
| 9. $A(4, -2)$, $B(1, 6)$, $C(-3, 1)$. | 10. $A(4, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(1, -2)$. |
| 11. $A(0, 4)$, $B(-3, -2)$, $C(0, 1)$. | 12. $A(2, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(1, -1)$. |
| 13. $A(-1, 1)$, $B(1, -2)$, $C(3, 1)$. | 14. $A(1, 1)$, $B(-2, -3)$, $C(2, 0)$. |

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 15. $A(2,4), B(1,1), C(4,2)$. | 16. $A(3,2), B(-1,3), C(1,-2)$. |
| 17. $A(3,4), B(2,1), C(5,2)$. | 18. $A(5,4), B(4,1), C(7,2)$. |
| 19. $A(2,2), B(1,-1), C(4,0)$. | 20. $A(2,1), B(1,-2), C(4,-1)$. |
| 21. $A(2,7), B(1,4), C(4,5)$. | 22. $A(2,0), B(1,-3), C(4,-2)$. |
| 23. $A(2,6), B(1,3), C(4,4)$. | 24. $A(-1,0), B(1,5), C(4,-3)$. |
| 25. $A(2,5), B(1,2), C(4,3)$. | 26. $A(-3,-2), B(2,2), C(4,-1)$. |
| 27. $A(-2,2), B(1,-1), C(4,1)$. | 28. $A(2,7), B(-3,-3), C(3,-1)$. |
| 29. $A(1,-4), B(3,2), C(-3,1)$. | 30. $A(2,5), B(1,2), C(4,3)$. |

Задача 1.11.

- $C(3,-2)$ – вершина прямого кута рівнобедреного трикутника, $2y - 5x + 1 = 0$ – рівняння гіпотенузи. Знайти рівняння катетів.
- Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2,6)$ і складає з віссю OX кут вдвічі менший кута, який складає з цією віссю пряма $\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$.
- Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1,-2)$ і складає з віссю OX кут вдвічі більший кута, який складає з цією віссю пряма $\sqrt{3}x - 3y + 13 = 0$.
- Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-3,-3)$ і складає з віссю OX кут втричі більший кута, який складає з цією віссю пряма $x - y - 17 = 0$.
- Вершини трикутника $A(2,-1), B(4,5), C(-3,2)$. Знайти рівняння прямої, яка проходить через $(0,0)$ та центр ваги трикутника.
- Вершини трикутника $A(2,0), B(5,3), C(3,7)$. Знайти рівняння прямої, яка проходить через B паралельно стороні AC трикутника.
- Вершини трикутника $A(1,-2), B(-1,3), C(3,2)$. Знайти рівняння прямої, яка проходить через B паралельно медіані AM трикутника.
- Знайти основу перпендикуляра, який проведений з початку координат на пряму $x - y = 17$.
- При якому p прямі $3x - py = 3, 2x + 4y = 7$ паралельні?
- При якому p прямі $3x + 4y = 7, px - 3y = 1$ перпендикулярні?
- При якому значенні p пряма $px - 2y + 5 = 0$ паралельна прямій, яка проходить через точки $M(-1,2), N(1,4)$.
- Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $C(-2,2)$ та відсікає від осей відрізки однакової довжини.
- Точки $A(2,1), B(4,2), C(-3,3)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайти рівняння сторін паралелограма.

14. Знайти рівняння прямих, які проходять через точку $C(2, -1)$ під кутом 45° до прямої $x - 2y + 3 = 0$.
15. Знайти відстань між паралельними прямими $3x - 4y = 2$, $3x - 4y + 1 = 0$.
16. З точок $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ проведені прямі через початок координат. Обчислити кут між цими прямими.
17. Знайти рівняння прямих, які проходять через $C(1, 1)$ та відсікають від осі OX відрізок вдвічі більший ніж від осі OY .
18. Знайти довжину висоти, яка проведена до сторони AB , якщо вершини трикутника є $A(2, 0)$, $B(4, 2)$, $C(-3, 3)$.
19. Прямі $2x - y + 2 = 0$, $2x - y = 6$ – сторони прямокутника, пряма $x - y + 2 = 0$ є однією з діагоналей. Знайти рівняння інших сторін прямокутника.
20. Знайти рівняння середньої лінії, яка паралельна стороні AC трикутника ABC , де $A(1, -1)$, $B(4, 2)$, $C(-3, 3)$.
21. Знайти рівняння прямих, які розташовані від початку координат на відстані 3 та утворюють кут 60° з віссю OX .
22. Прямі $x + 2y = 4$, $x - y = 1$ – суміжні сторони паралелограма та $O(-2, -1)$ – точка перетину діагоналей. Знайти рівняння других сторін.
23. В трикутнику ABC знайти точку перетину висот, якщо його вершини є $A(1, 0)$, $B(-4, 1)$, $C(-2, 2)$.
24. Відомі дві сторони рівнобедреного трикутника $7x - 2y = 9$, $2x + 7y + 5 = 0$. Знайти рівняння третьої сторони, якщо $M(2, 8; 0)$ його середина.
25. В трикутнику ABC знайти відстань від точки A до медіани CM , якщо вершини трикутника $A(2, 1)$, $B(-2, 0)$, $C(0, 3)$.
26. Знайти рівняння прямої, яка проходить через $(0, 0)$ та точку перетину висот трикутника з вершинами $A(2, 1)$, $B(4, -5)$, $C(-3, 3)$.
27. Знайти проекцію точки $M(1, 1)$ на пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2}$.
28. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $C(3, -4)$ є однією з вершин та відомі рівняння двох висот $7x - 2y = 1$ та $2x - 7y = 6$.
29. Знайти координати вершин ромба, якщо $x + 2y = 4$, $x + 2y = 10$ – рівняння двох сторін та $y = x + 2$ – рівняння діагоналі.
30. Знайти точку B , яка симетрична точці $A(4, -3)$ відносно прямої, яка проходить через точки $M(1, -2)$, $N(-3, 2)$.

6. Рівняння площини.

Задача 1.12.

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь OX і точку $M(0, -2, 3)$.
2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1, 7, -5)$ та відсікає від осей координат додатні рівні відрізки.
3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M(1, 2, 0)$, $N(2, 1, 1)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3, 0, 1)$.
4. Дати вершини тетраедра $A(2, 0, 0)$, $B(5, 3, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(-2, -4, 1)$. Знайти двогранний кут при ребрі AB .
5. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2, -3, 1)$ паралельно векторам $\vec{a} = (-3, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$.
6. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 5, 3)$ перпендикулярно площині $3x - y + 3z + 15 = 0$.
7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2, -3, 5)$ перпендикулярно лінії перетину двох площин $2x + y - 2z + 1 = 0$, $x + y + z = 5$.
8. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 0, 1)$.
9. Площина проходить через вісь OZ і складає з площиною $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$. Знайти її рівняння.
10. Знайти рівняння площини, яка паралельна OY та проходить через точки $A(-1, 2, 1)$, $B(3, 0, 2)$.
11. Знайти рівняння площини, яка проходить через OY та проходить через точку $A(2, -1, 3)$.
12. З точки $C(2, -1, 3)$ спущено перпендикуляр на площину, причому точка $A(1, 2, 4)$ є основою перпендикуляра. Знайти рівняння площини.
13. Знайти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $4x - y + 3z = 1$, $x + 5y - z + 2$ та точку $A(1, 1, 1)$.
14. Знайти рівняння площини, яка проходить через $(0, 0)$ перпендикулярно площинам $2x - 5y + 5z + 3 = 0$, $x + 3y - z = 7$.
15. Через точку $C(-5, 16, 12)$ проведені дві площини: одна через вісь OX , інша через OY . Знайти кут між площинами.
16. Знайти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $4x - y + 3z = 6$, $x + 5y - z + 10 = 0$ та перпендикулярна площині

$$2x - y + 5z = 5.$$

17. Знайти кут між площиною, яка проходить через точки $A(a, -a, 0)$, $O(0, 0, 0)$, $B(a, a, a)$ та площиною xoy .
18. Знайти рівняння площини, яка паралельна осі oz та проходить через точки $A(2, 2, 0)$, $B(4, 0, 0)$.
19. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1, -1, 2)$ перпендикулярно площинам $x - 2y + z = 4$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
20. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь oz і точку $A(2, -4, 3)$.
21. Знайти рівняння площини, яка паралельна осі ox та проходить через точки $A(0, 1, 3)$, $B(2, 4, 5)$.
22. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(-1, -2, 0)$, $B(1, 1, 2)$ перпендикулярно площині $x + 2y + 2z = 4$.
23. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 4)$.
24. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1, 1, 1)$ паралельно площині $2x + 4y + z = 5$.
25. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2, -1, 1)$ перпендикулярно площинам $2x - y + 3z = 1$, $x + 2y + z = 0$.
26. Знайти відстань між паралельними площинами $-4x - 3y - 5z + 2 = 0$, $4x + 3y - z = 5$.
27. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(-3, 1, 0)$ перпендикулярно площинам $2x - y - z = 0$, $x + 3y - 2z = 1$.
28. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(0, 0, 2)$, $B(0, 1, 0)$ та утворює кут 45° з площиною xoy .
29. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 3, 2)$ та відсікає від осі Ox відрізок вдвічі більший ніж від осі ординат.
30. Знайти рівняння площини, яка розташована на однакої відстані від двох площин $x + 4y - z = 5$, $x + 4y - z + 7 = 0$.

7. Рівняння прямої в просторі.

Задача 1.13.

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, -1)$ паралельно прямій, яка проходить через точки $M(5, -2, 3)$, $T(6, 1, 0)$.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через перпендикуляри,

- які відпущені з точки $A(2,0,1)$ на площини $x-3y+2z=0, 2x-y+2z=0$.
- Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,-1,3)$ перпендикулярно прямій $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$.
 - Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,3,-1)$ та перпендикулярної до площині $2x+4y-3z=2$.
 - При якому p пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{p} = \frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x+y-z=0$.
 - При якому p площина $px+2y-z+3=0$ паралельна прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{p} = \frac{z-1}{-2}$.
 - При яких значеннях a та b площина $ax+by-2z+1=0$ перпендикулярна прямій $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$.
 - Дані точки $A(1,3,-2), B(7,-4,4)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку B перпендикулярно прямій AB .
 - При яких a та b пряма $\frac{x+a}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{-1}$ лежить в площині $bx+2y-z+1=0$.
 - Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ та точку $A(3,4,0)$.
 - Знайти проекцію точки $A(2,3,4)$ на пряму $x=y=z$.
 - Чи належить пряма $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ площині $x+2y-4z+1=0$.
 - Знайти кут між прямою
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$
 та площиною, яка проходить через точки $A(2,3,-1), B(1,1,0), C(0,-2,1)$.
 - Скласти параметричне рівняння прямої, яка проходить через точки перетину площини $x-3y+2z+1=0$ з прямими $\frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}, \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}$.
 - Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4,0,-1)$ та перетинає прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}, \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.
 - Знайти точку, симетричну точці $A(3,-1,4)$ відносно прямої

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

17. Знайти кут між прямою, яка проходить через точки $A(-1, 0, -5)$ та $B(1, 2, 0)$ і площиною $x - 3y + z + 5 = 0$.
18. Знайти основу перпендикуляра, який опущений з точки $A(-1, 3, 2)$ на площину $2x - y + z + 3 = 0$.
19. Перевірити, що прямі $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$, $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ перетинаються. Знайти рівняння площини в якій вони лежать.
20. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3, -2, -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z = 7$ та перетинає пряму $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
21. При якому p площина $5x - 3y + pz + 1 = 0$ буде паралельна прямій $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$
22. Знайти відстань від точки $A(2, 3, -1)$ до прямої $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$.
23. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1, -1, 2)$ та паралельна прямим $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$, $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$.
24. Знайти проекцію точки $A(3, 1, -1)$ на площину $x + 2y + 3z = 30$.
25. Знайти рівняння площини, яка проходить через прямі $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$, $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.
26. Знайти точку B , яка симетрична точці $A(2, 0, 1)$ відносно прямої $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$.
27. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ перпендикулярно площині $2x + 3y - z = 4$.
28. Знайти точку, яка симетрична точці $A(1, 2, 0)$ відносно площини $2x - 3y + 5z = 5$.
29. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-1}$ перпендикулярно площині $3x + y - 2z + 5 = 0$.
30. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $x = 2t + 1, y = -t + 2, z = 3t - 2$ та паралельна прямій $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{2}$.

Задача 1.14. Знайти об'єм піраміди $ABCD$, кут нахилу ребра AD до площини ABC , двогранний кут при ребрі AB :

1. $A(-1, -5, 2), B(-6, 0, 3), C(3, 6, -3), D(-10, 6, 7)$.
2. $A(0, -1, -1), B(-2, 3, 5), C(1, -5, -9), D(-1, -6, -3)$.
3. $A(1, 3, 6), B(2, 2, 1), C(-1, 0, 1), D(-4, 6, -3)$.
4. $A(4, 2, 5), B(0, 7, 2), C(0, 2, 7), D(1, 5, 0)$.
5. $A(4, 4, 10), B(4, 10, 2), C(2, 8, 4), D(9, 6, 4)$.
6. $A(4, 6, 5), B(6, 9, 4), C(2, 10, 10), D(7, 5, 9)$.
7. $A(3, 5, 4), B(8, 7, 4), C(5, 10, 4), D(4, 7, 8)$.
8. $A(-4, 2, 6), B(2, -3, 0), C(-10, 5, 8), D(-5, 2, -4)$.
9. $A(7, 2, 4), B(7, -1, -2), C(3, 3, 1), D(-4, 2, 1)$.
10. $A(2, 1, 4), B(-1, 5, -2), C(-7, -3, 2), D(-6, -3, 6)$.
11. $A(-1, 2, 4), B(-1, 2, -4), C(3, 0, -1), D(7, -3, 1)$.
12. $A(0, -3, 1), B(-4, 1, 2), C(2, -1, 5), D(3, 1, -4)$.
13. $A(5, 2, 0), B(2, 5, 0), C(1, 2, 4), D(-1, 1, 1)$.
14. $A(2, -1, -2), B(1, 2, 1), C(5, 0, -6), D(-10, 9, -7)$.
15. $A(14, 4, 5), B(-5, -3, 2), C(-2, -6, -3), D(-2, 2, -1)$.
16. $A(-2, 0, -4), B(-1, 7, 1), C(4, -8, -4), D(1, -4, 6)$.
17. $A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6), D(8, 4, -9)$.
18. $A(2, -1, 2), B(1, 2, -1), C(3, 2, 1), D(-4, 2, 5)$.
19. $A(1, 1, 2), B(-1, 1, 3), C(2, -2, 4), D(-1, 0, -2)$.
20. $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(7, 5, -3)$.
21. $A(10, 6, 6), B(-2, 8, 2), C(6, 8, 9), D(7, 10, 3)$.
22. $A(1, 8, 2), B(5, 2, 6), C(5, 7, 4), D(4, 10, 10)$.
23. $A(7, 2, 2), B(5, 7, 7), C(5, 3, 1), D(2, 3, 7)$.
24. $A(8, 6, 4), B(10, 5, 5), C(5, 6, 8), D(8, 10, 7)$.
25. $A(7, 7, 3), B(6, 5, 8), C(3, 5, 8), D(8, 4, 1)$.
26. $A(1, 5, -7), B(-3, 6, 3), C(-2, 7, 3), D(-4, 8, -12)$.
27. $A(1, 1, -1), B(2, 3, 1), C(3, 2, 1), D(5, 9, -8)$.
28. $A(-3, 4, -7), B(1, 5, -4), C(-5, -2, 0), D(2, 5, 4)$.
29. $A(-1, 2, -3), B(4, -1, 0), C(2, 1, -2), D(3, 4, 5)$.
30. $A(4, -1, 3), B(-2, 1, 0), C(0, -5, 1), D(3, 2, -6)$.

8. Криві другого порядку. Полярна система координат.

Задача 1.15. Встановити тип кривої другого порядку, знайти ексцентриситет та зробити малюнок.

- | | |
|--|---|
| 1. A) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0,$ | B) $x = 1 + \sqrt{3 - y^2 - 2y}$ |
| 2. A) $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0,$ | B) $y = 2 - 2\sqrt{3 - x}$ |
| 3. A) $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 21 = 0,$ | B) $y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{12 - x^2 + 4x}$ |
| 4. A) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0,$ | B) $x = -1 - \frac{3}{2}\sqrt{8 + y^2 - 4y}$ |
| 5. A) $9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0,$ | B) $x = -2 + \sqrt{-y^2 + 2y}$ |
| 6. A) $4x^2 - 25y^2 + 8x - 10y + 4 = 0,$ | B) $y = -3 - \sqrt{-2x - 10}$ |
| 7. A) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 36 = 0,$ | B) $x = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{21 - y^2 - 4y}$ |
| 8. A) $x^2 - 4y^2 + 10x + 24y - 7 = 0,$ | B) $x = -2 + \frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 6y}$ |
| 9. A) $4x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 4 = 0,$ | B) $y = 2 - \sqrt{-x^2 - 6x}$ |
| 10. A) $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 5 = 0,$ | B) $y = 1 + 2\sqrt{x - 4}$ |
| 11. A) $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0,$ | B) $x = -1 - \frac{4}{3}\sqrt{5 - y^2 + 4y}$ |
| 12. A) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 68 = 0,$ | B) $x = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 2y + 10}$ |
| 13. A) $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0,$ | B) $y = 5 - \sqrt{-x^2 - 4x}$ |
| 14. A) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 16 = 0,$ | B) $y = -2 + \sqrt{6x + 6}$ |
| 15. A) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0,$ | B) $x = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{-5 - y^2 + 6y}$ |
| 16. A) $4x^2 - y^2 + 16x - 2y + 15 = 0,$ | B) $y = 3 + \sqrt{21 - x^2 + 4x}$ |
| 17. A) $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0,$ | B) $y = 1 - 2\sqrt{x^2 + 4x}$ |
| 18. A) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 54y - 101 = 0,$ | B) $y = -1 + \frac{2}{5}\sqrt{16 - x^2 - 6x}$ |
| 19. A) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 16y + 44 = 0,$ | B) $x = -3 - \sqrt{8 - 2y}$ |
| 20. A) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 64y - 172 = 0,$ | B) $y = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 25}$ |
| 21. A) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 16y + 37 = 0,$ | B) $x = -1 - \sqrt{12 - y^2 + 4y}$ |
| 22. A) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0,$ | B) $x = -4 + \sqrt{-30 + 6y}$ |

23. A) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 24 = 0$, B) $y = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3 - x^2 + 2x}$
 24. A) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 11 = 0$, B) $y = -2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + 6x + 18}$
 25. A) $x^2 + 4y^2 + 10x - 24y + 57 = 0$, B) $x = 1 - 2\sqrt{6 - 3y}$
 26. A) $x^2 + 4x + 2y + 12 = 0$, B) $x = -1 - \frac{2}{5}\sqrt{y^2 - 6y - 16}$
 27. A) $y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$, B) $y = -2 - \frac{4}{3}\sqrt{8 - x^2 - 2x}$
 28. A) $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$, B) $x = -1 + 2\sqrt{-8 - y^2 - 6y}$
 29. A) $y^2 + 6x - 4y + 10 = 0$, B) $x = 2 - 2\sqrt{-2y - 6}$
 30. A) $y^2 + 4x + 6y - 7 = 0$, B) $y = -3 + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

Задача 1.16. Побудувати графік кривої в полярній системі координат.

1. $\rho = 4\varphi$. 2. $\rho = 1 + 2\varphi$. 3. $\rho = \frac{3}{\varphi}$.
 4. $\rho = \frac{2}{\varphi + \frac{\pi}{3}}$. 5. $\rho = \frac{2}{\varphi - \pi}$. 6. $\rho = \frac{1}{\varphi} + 2$.
 7. $\rho = 2\varphi + \frac{\pi}{6}$. 8. $\rho = 1 - 2\sin \varphi$. 9. $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$.
 10. $\rho = 1 + \sin \varphi$. 11. $\rho = 2\cos 2\varphi$ 12. $\rho = 1 - 2\cos \varphi$.
 13. $\rho = 2\cos 3\varphi$. 14. $\rho = 2\sin 3\varphi$. 15. $\rho = 2\sin 2\varphi$.
 16. $\rho = 2\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ 17. $\rho = 2\cos 4\varphi$. 18. $\rho = 2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$.
 19. $\rho = 2\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ 20. $\rho = 2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$. 21. $\rho = 2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$.
 22. $\rho = \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ 23. $\rho = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ 24. $\rho = 1 + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$
 25. $\rho = 1 - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ 26. $\rho = 2\sin 5\varphi$ 26. $\rho = 2\cos 5\varphi$
 27. $\rho = 2 + \cos(2\varphi)$ 28. $\rho = 2 + \sin 2\varphi$ 29. $\rho = \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$.
 30. $\rho = \sin^2 \varphi$.

Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Теорія: [1, гл.4-5], [2, гл. 3-4].

Методика розв'язування задач: [4, том1, гл.6,7], [5, гл.1-3].

1. Границя послідовності.

Задача 2.1. Обчислити границю послідовності:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n}}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt[5]{n-1}}{\sqrt[3]{n^2+2} - n}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt[4]{n^3-1}}{\sqrt[3]{5n^3+2n} - \sqrt[4]{n}}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7+2n-1} + \sqrt[5]{n^3-2}}{\sqrt[3]{9n^7+2} - \sqrt[3]{n^2+2}}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n^2+4}}{\sqrt{2n^4-2} - \sqrt[3]{n^4}}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^7+2} - \sqrt[4]{n^3-1}}{\sqrt[5]{n^3+2} + \sqrt{n}}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+2n} + \sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[7]{n^9+1} - \sqrt{n-1}}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n}}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n^3-11}}{\sqrt[4]{n^4+2} - \sqrt[5]{n^2+3}}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2} - \sqrt[4]{n-3}}{n^2 - \sqrt[3]{n^4-1}}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} + \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^4+2} - \sqrt[3]{n^3+1}}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\sqrt{n} + \sqrt{2+2n}}{3\sqrt{n} - \sqrt{3+2n^3}}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt[4]{n}}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+5} + \sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^7+2} - n}.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3} + 6n}{\sqrt{n^3-2} - 3}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12+3n}{\sqrt[3]{n^4+2} - 2n}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} + 7n}{3n + 2\sqrt[4]{n+2}}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-n+2} - \sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[4]{n^4+2n^2} - \sqrt[5]{3n^4+2}}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + \sqrt{n^4+2}}}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2+2} + \sqrt[3]{n^2-1}}{\sqrt[4]{n^4+2} - \sqrt[3]{n^2-2n+2}}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt[3]{4n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt{n+7}}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + \sqrt[5]{n^5-1}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^5}}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{11n^8+2n} + \sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{7n^4+5n^2-1} - \sqrt[3]{n^3+1}}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^7+1} + \sqrt[4]{n^3+n+1}}{\sqrt[5]{n^3+6} + \sqrt{n}}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n + \sqrt[4]{n^3 - 1}}{\sqrt{13n^{12} + 2n^7 - 1} - \sqrt[4]{n}}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \sqrt{n^3 - 2n}}{\sqrt[4]{5n^6 + 2} - \sqrt[4]{n}}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sqrt[3]{n^2 - n + 3}}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 - 1} + \sqrt{n}}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + \sqrt[3]{n^3 + 1}}{\sqrt{7n^6 + 4n^3 - 1} - \sqrt[4]{n^3 + 1}}$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + \sqrt{n^3 + n^4}}}{\sqrt{n^2 + 4}}$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2 + 2} + \sqrt{n^3 - 2}}{\sqrt[4]{3n^6 + 2} - 11n}$$

Задача 2.2. Обчислити границю послідовності.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + 3(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)! + 2n!}{5(n+1)!}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + 2n!}{4n!}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)! + 3n!}{8n!}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + 2(n-1)!}{3(n+1)! - n!}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+2)! + 3(n+1)!}{(n+2)! - 5(n+1)!}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 2n!}{3(n+2)!}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)!}{3n! + 5(n-1)!}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)!}{2(n+1)! - n!}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - 3(n+1)!}{(n+2)! + 4n!}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + 2n!}{3(n+1)! - (n-1)!}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n! - 2(n+1)!}{(n-1)! + 3(n+1)!}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 3n!}{(n+2)!}$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(n+2)!}{(n+2)! - 2(n+1)!}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + 4n!}{(n+2)!}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!}{2(n+2)! - (n+1)!}$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)! - 2n!}$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{2(n+3)!}$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)! - 2n!}$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!}{(n+2)! + 2(n+1)!}$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!}$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + 2(n+1)!}{(n+3)! - 3(n+2)!}$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + 2(n+1)!}{(n+1)! - n!}$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 2n!}{2(n+1)! + 3n!}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)! - 3n!}{(n+1)! - 2n!}$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n! + 3(n-1)!}{(n+1)! - 5n!}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + 2(n+1)!}{2(n+2)! - (n+1)!}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+2)! - 7n!}{(n+2)! + 2(n+1)!}.$$

2. Границя функції. Порівняння нескінченно малих.

Задача 2.3. Сформулювати означення границі (можливо односторонньої) функції на мові « $\varepsilon - \delta$ »:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 3.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = +\infty.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = +\infty.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = -\infty.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = -\infty.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -3$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 6$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 7.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = +\infty.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty.$$

Задача 2.4. Обчислити границю функції:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+9} - 3}{1 - \sqrt{x+1}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{4x^2}).$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{7x^2+1} - \sqrt{7x^2+3}).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{1-2x}}{x+x^2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{x^2+1})$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{x^2+1})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+11})$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\sqrt[3]{7x^3+5} - \sqrt[3]{7x^3+1})$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{8}{3}} (\sqrt[3]{x^4+5} - \sqrt[3]{x^4+1})$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{10}{3}} (\sqrt[3]{x^5+24} - \sqrt[3]{x^5+11})$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{25-2x} - 3}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$\begin{array}{lll}
7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4+2x}}{\sqrt{x+2} - 1} & 23. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} & 24. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right) \\
8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4-5x} - 3}{2 - \sqrt{-x+3}} & 25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} & 26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}} \\
9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x+6} - 4}{2 - \sqrt{x+2}} & 27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+3x^2} - (1+x)} & 28. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2} \\
10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{7}}{x-2} & 29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \sqrt[3]{1-x^3} \right) & 30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}
\end{array}$$

Задача 2.5. Користуючись властивістю еквівалентності, обчислити границю функції.

$$\begin{array}{ll}
1. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{x - \pi} & 16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{x} \\
2. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin 3x + \sin x}{x - 2\pi} & 17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x} \sin x - \cos x} \\
3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x - \pi} & 18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 2x} \\
4. \lim_{x \rightarrow 3\pi} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 4x}{\sin x} & 19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 2x} \\
5. \lim_{x \rightarrow 3\pi} \frac{\sin x - \sin 3x}{x - 3\pi} & 20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 3x} \\
6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x} & 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 3x} \\
7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x} & 22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x} \\
8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} 3x} & 23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x - \cos 2x}{1 - \sin 2x - \cos 2x} \\
9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + 5\pi/2) \cdot \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2} & 24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3} \\
10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x} & 25. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x} \\
11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)} & 26. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}\left(3^x - 3\right)}{3^{\frac{3x}{2}} - 1}
\end{array}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pi/8} \frac{\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{8}}{x^2 - \frac{\pi^2}{64}}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin(\pi - 3x)}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - 2 \sin 2x}{x \ln \cos 6x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \sin x - \sqrt{3}}{\cos \frac{3x}{2}}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{(1 - \cos 3x)^2}{\sin^2 3x - \operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sin x} - \sqrt{2 - \sin x}}{\operatorname{tg} 3x}.$$

Задача 2.6. Користуючись властивістю еквівалентності, обчислити границю функції.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos \pi x} - 1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+2x) - \ln(x^2+3)}{\frac{x}{e^{x^2-1}} - 1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^{2x}})}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x^2}{\pi}}{2^{\sqrt{\sin x + 1}} - 2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}} - e^2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-3x+3} - 1}{\sin \pi x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-1) - \ln(x+1)}{\sqrt[3]{x-1} - 1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x+2) - \ln(2x-1)}{\sin \pi x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x} - 2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin^2 \sqrt{x}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1} - 1}{\ln x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(e^{x+2} - e^{x^2-4})}{\ln(3x+7)}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln \frac{2}{\pi} x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^2 - 2x + 1)}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}{\sqrt{\cos x} - 1}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2}}{\operatorname{arctg} \frac{x-2}{2}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin \frac{5x}{2} \cdot \cos x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2+3x} - \sqrt{2x}}{\ln(x+2) - 2 \ln x}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\ln(5x^2 - 4x)}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 5} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2 - a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln \frac{x}{a}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln 2x - \ln \pi}{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\sin 2x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin \frac{x+2}{2}}{3\sqrt{2+x+x^2} - 9}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x - 5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}}$$

Задача 2.7. Користуючись властивістю еквівалентності, обчислити границю функції:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x)^{v(x)}$$

№	u	v	№	u	v
1	$1 + \sin 2x$	$\frac{1}{\ln(1-3x)}$	16	$1 + \operatorname{tg} x^2$	$\operatorname{ctg}^2 x$
2	$1 - \operatorname{arctg} 3x$	$\operatorname{ctg} x$	17	$1 + \arcsin 2x$	$\frac{1}{\operatorname{arctg} 3x}$
3	$1 + \arcsin 3x$	$\frac{1}{\operatorname{arctg} x}$	18	$1 + \ln(1-x)$	$\frac{1}{\arcsin 3x}$
4	$1 - \operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} 4x$	19	$1 + \sin^2 x$	$\frac{1}{3x^2}$
5	$1 + \operatorname{arctg} 2x$	$\frac{1}{\ln(1+x)}$	20	$1 - x \sin^2 x$	$\frac{1}{\ln(1 + \pi x^3)}$
6	$1 - 2 \sin x$	$\frac{1}{\arcsin 3x}$	21	$\cos x$	$\frac{1}{x}$
7	$1 + x^2$	$\frac{1}{1 - \cos 3x}$	22	$\cos x + \sin x$	$\frac{1}{x}$
8	$1 - \arcsin x$	$\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$	23	$6 - \frac{5}{\cos x}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$
9	$1 + \ln(1-2x)$	$\frac{1}{x}$	24	$1 - \ln(1+x^3)$	$\frac{3}{x^2 \arcsin x}$
10	$1 + 5 \operatorname{tg} x$	$\frac{1}{(1-x)^2 - 1}$	25	$1 - \sin^2 2x$	$\frac{1}{\arcsin x^2}$

11	$1 + \operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{\sin 2x}$	26	$\cos 3\pi x$	$\frac{1}{x \sin 2\pi x}$
12	$1 + 3 \arcsin 2x$	$\operatorname{ctg} x$	27	$2 - 3^{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}}$	$\frac{2}{\sin x}$
13	$1 + \ln(1+x)$	$\frac{1}{\sin 2x}$	28	$2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}$	$\frac{3}{x}$
14	$1 + 3 \operatorname{tg} x^2$	$\frac{1}{1 - \cos x}$	29	$4 - \frac{3}{\cos x}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$
15	$1 + \sin 2x$	$\frac{1}{\arcsin x}$	30	$\cos \pi x$	$\frac{1}{x \sin \pi x}$

Задача 2.8. Знайти порядок малості нескінченно малої функції $f(x)$ відносно $g(x)$:

№	$f(x)$	$g(x)$	№	$f(x)$	$g(x)$
1	$\sin \sqrt[3]{x}$	$x, x \rightarrow 0$	16	$\ln(1 + 2 \sin \sqrt{x} + \operatorname{tg}^2 x)$	$x, x \rightarrow 0$
2	$e^{x^2} - 1$	$x, x \rightarrow 0$	17	$2 \sqrt[3]{(e^x - 1)^2}$	$x, x \rightarrow 0$
3	$\ln(1 + \sqrt{x})$	$x, x \rightarrow 0$	18	$\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$	$x, x \rightarrow 0$
4	$\operatorname{tg} \sqrt[5]{x}$	$x, x \rightarrow 0$	19	$3 \sqrt{x}(1 - \cos^3 2x)$	$x, x \rightarrow 0$
5	$\arcsin(\sqrt{x} - 2)$	$x - 4, x \rightarrow 4$	20	$\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^3}$	$x, x \rightarrow 0$
6	$e^{x^2} - e^x$	$x, x \rightarrow 0$	21	$\sqrt{1 + 3x} - 1 - \sqrt{2x}$	$x, x \rightarrow 0$
7	$\ln(1 + \sqrt{x^2 + 3x + 2})$	$x + 1, x \rightarrow -1$	22	$\operatorname{tg}^3 x - \sin^2 x$	$x, x \rightarrow 0$
8	$2x + 3 \arcsin^2 x - 3 \operatorname{arctg} 4x$	$x, x \rightarrow 0$	23	$\ln(1 + \sqrt{x \operatorname{tg} x})$	$x, x \rightarrow 0$
9	$\frac{1}{x^2 - x + 7}$	$\frac{1}{x}, x \rightarrow \infty$	24	$\sin(\sqrt[3]{1 + 2x} - 1)$	$x, x \rightarrow 0$
10	$\operatorname{tg} x - 2 \sin \sqrt{x}$	$x, x \rightarrow 0$	25	$\sin^2 \sqrt{x} - \arcsin^2 x$	$x, x \rightarrow 0$
11	$(e^{x^2} - 1) \sin 2x$	$x, x \rightarrow 0$	26	$x \cdot \operatorname{tg} \left(2\pi \left(x + \frac{1}{2} \right) \right)$	$x, x \rightarrow 0$
12	$\sqrt[15]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$	$x, x \rightarrow 0$	27	$\sin 5x + 4 \sin x^2$	$x, x \rightarrow 0$
13	$e^x - \cos x$	$x, x \rightarrow 0$	28	$e^{\sin 2x} - e^{\sin x}$	$x, x \rightarrow 0$
14	$\arcsin(\sqrt{9 + x^2} - 3)$	$x, x \rightarrow 0$	29	$\sqrt{8 + x^2} - 3$	$x - 1, x \rightarrow 1$
15	$\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{27 - x^2} - 3)$	$x, x \rightarrow 0$	30	$\sqrt{1 + x^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$	$x, x \rightarrow 0$

3. Класифікація розривів.

Задача 2.9. Дослідити функції $f(x)$ та $g(x)$ на неперервність та класифікувати точки розриву.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4}, & x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	16	$\begin{cases} 1, & x < 0, \\ \cos x, & 1 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{x}, & x \geq \pi \end{cases}$
2	$\begin{cases} e^x, & x \leq -1, \\ 1, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1}, & x > 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x^3, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 4, \\ \lg(x-4), & x > 4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{1}{\sin x}, & x < 0, \\ 2x-1, & 0 \leq x < 3, \\ x^2 + 1, & x \geq 3 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2, & x < -2, \\ x , & x \leq 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} -2x+1, & x \leq -3, \\ -x^3, & -3 < x \leq 0, \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1, \\ x , & -1 \leq x \leq 1, \\ 1-x^2, & x > 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3,75 - \frac{1}{4x}, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \operatorname{ctg} x, & x > 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{2-x}, & x > 2 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4}, & x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	21	$\begin{cases} 4^x, & x < 1, \\ 5-x^2, & 1 < x \leq 4, \\ \lg(x-4), & x > 4 \end{cases}$

7	$\begin{cases} \log_{0,5}(1-x), & x < 1, \\ 1-x, & 1 \leq x \leq 3, \\ x^2 - 11, & x > 3 \end{cases}$	22	$\begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 5, \\ 3x+4, & x \geq 5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 4, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$	23	$\begin{cases} -1, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ x, & x > 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \sin x, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi, \\ \frac{1}{x-\pi}, & x > \pi \end{cases}$	24	$\begin{cases} \frac{1}{3^x}, & x < 0, \\ 1+x, & 0 < x \leq 3, \\ \lg(x-3), & x > 3 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x+1, & x \leq 2, \\ x^2 - 6x + 11, & 2 < x < 4, \\ 2x-5, & x > 4 \end{cases}$	25	$\begin{cases} \frac{1}{x+3}, & x < -3, \\ 3+x, & -3 \leq x \leq 0, \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ \frac{1}{x}, & -1 < x < 0, \\ -2x^2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2^{-x}, & x < 0, \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
12	$\begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x < -2, \\ 0, & -2 \leq x < 0, \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -2, \\ x , & x < 2, \\ x, & x > 2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	28	$\begin{cases} x^2 - x, & x < 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 4, \\ \frac{1}{x-4}, & x > 4 \end{cases}$

14	$\begin{cases} 3x+1, & x < 1, \\ 2x+2, & 1 < x \leq 3, \\ \lg(x-3), & x > 3 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 3-x, & x \leq 3, \\ 8x-x^2-15, & 3 < x \leq 5, \\ 2x-12, & x > 5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3, & x < -3, \\ x , & -3 < x \leq 3, \\ \ln(x-3), & x > 3 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 3x+1, & 0 \leq x < 2, \\ 4-x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

\mathcal{N}°	$g(x)$	\mathcal{N}°	$g(x)$	\mathcal{N}°	$g(x)$
1	$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$	11	$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x(x+1)}$	21	$\frac{1}{x-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
2	$\frac{x^{\frac{5}{3}} - \cos \sqrt{x}}{\operatorname{tg}(\arcsin x)}$	12	$\frac{1}{2^{\frac{1}{ x+2 }} + 4}$	22	$\frac{1+x}{x(4-4^{x+1})}$
3	$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}} - \frac{1}{x}$	13	$\frac{1}{2^{\frac{1}{x-3}} + 1}$	23	$\frac{1-x^2}{1-x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
4	$2^{-2^{(1-x)^{-1}}}$	14	$\frac{3}{2^{\frac{1}{x^2-x}} - 4}$	24	$\frac{1-e^{-\frac{1}{x^2}}}{1-x}$
5	$\frac{\arcsin x}{\sin 2x}$	15	$\frac{e^{4x}-1}{x}$	25	$\left \frac{\sin x}{x(x-\pi)} \right $
6	$\frac{1}{\ln x-1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}}$	16	$\frac{1}{1+6^{\frac{1}{x}}}$	26	$\frac{x}{x+1} \cos \frac{1}{x}$
7	$\frac{\frac{1}{3^x} + \frac{1}{2^x}}{\frac{1}{3^x} - \frac{1}{2^x}}$	17	$\frac{\pi}{2} \frac{x-1}{ x-1 } + \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$	27	$\frac{x^3+1}{x+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
8	$\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right)$	18	$\frac{1}{1+5^{-\frac{1}{x}}}$	28	$e^{\frac{1}{1-x}} \frac{ x+1 }{x^3+x^2}$
9	$\operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{1}{x}$	19	$x+2 \frac{ x-2 }{x-2}$	29	$e^{\frac{x}{x-2}} \frac{x}{\ln x+1 }$
10	$\frac{1}{3-2^{\frac{x+1}{x}}}$	20	$\frac{1}{2-2^{\frac{x}{x-1}}}$	30	$e^{\frac{x}{x-1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

4. Похідна.

Задача 2.10. Знайти похідну функції (a, b – сталі):

$$1. f(x) = \frac{\sin^3 \sqrt[4]{2-bx}}{x^2 - \cos \frac{2}{3-4x}} \cdot \operatorname{arctg}(a - \ln \sqrt{x});$$

$$2. f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{a\pi}} \sin^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right)} \cdot 3^{\sqrt{1-tgx}};$$

$$3. f(x) = \frac{\log^3(\sqrt{x}-a)}{\sin(2^{\cos 4x})} \cdot \frac{tgx^2}{\arcsin \left(\frac{3}{2-\sqrt[3]{x}} \right)};$$

$$4. f(x) = \frac{ax \cdot ctg 3x}{\arcsin \sqrt{\frac{a}{x}-1}} \cdot e^{\sin^2 2\pi x};$$

$$5. f(x) = \frac{\arcsin \left(\frac{b}{5-ax} \right)}{\ln^2(2 + \operatorname{arctg} 4x)} \cdot \frac{\cos(2-x^2)}{tg(2-x^2)};$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - \sin^2 x^2}}{2^{-\operatorname{arctg} 5bx}} \cdot \cos \frac{\pi}{2-x}$$

$$7. f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{\sin(\ln x)}}{\sqrt[3]{\arcsin 3ax}} \cdot tg \left(\ln \left(\frac{a}{1-bx} \right) \right);$$

$$8. f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x} - e^{\sin ax})}{\arccos \left(\frac{2a}{\pi-x} \right)} \cdot \sqrt[4]{tg \frac{x-1}{2}};$$

$$9. f(x) = \frac{13 - 3 \ln^4 \left(\frac{1}{\cos 4ax} \right)}{\operatorname{arctg}(x^3 - 1)} \cdot \frac{tgbx}{2^{-\sin(a-x)}};$$

$$10. f(x) = \frac{2 \sin(x \cdot e^{\sqrt{\cos x}})}{\arcsin^2 \sqrt{ctgax}} \cdot \ln \left(\frac{\pi}{a-bx^2} \right);$$

$$11. f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x} + a)^2}{3^{ctgbx + \frac{2}{x}}} \cdot \sqrt[4]{\arccos(\ln 3x)};$$

$$12. f(x) = \frac{e^{-tg^3 \sqrt[4]{1-a \ln 4x}}}{\sin \left(\frac{3\pi}{b - sh 2x} \right)} \cdot \cos(\sin(5-ax));$$

13. $f(x) = \frac{\arcsin x^{\frac{5}{2}}}{12 - 3 \ln(\operatorname{ctg} bx)} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2 - \sin 2x}};$
14. $f(x) = \sin^3 \left(\frac{a}{b - \sin^2 2ax} \right) \cdot \frac{\operatorname{ctg}(\ln 3x)}{x - \sqrt[3]{a^2 - x^2}};$
15. $f(x) = \frac{e^{-\arccos ax}}{\sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}} \cdot \sin(\ln 4x^3);$
16. $f(x) = \frac{\log_3(ax^4 + bx^2 + 1)}{2 - \operatorname{arctg}(1 + \sin^2 x)} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} 2x - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}};$
17. $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} \operatorname{ctg} bx}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{3}{4}}} \cdot \left(\sin \frac{2\pi}{\sqrt[4]{2b^2 - \operatorname{arctg}^2 2x}} \right);$
18. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{ax}}{\sqrt{\sin \ln 2x + \frac{2}{a-x}}} \cdot 2^{\cos^2 2x};$
19. $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2(\sin ax + \arcsin bx)}{2 - \frac{b}{\sqrt{1 - 2 \sin 2ax}}} \cdot e^{-\ln^2 2x};$
20. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}}{\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) + \sqrt[4]{\operatorname{sh} x}} \cdot 2^{a \ln(\pi - \sqrt{x})};$
21. $f(x) = \frac{\sin^4(a^2 - \sqrt{\arcsin x})}{\pi - \arccos 2^{2x}} \cdot \ln \left(ax + \frac{a}{x} \right);$
22. $f(x) = \frac{\ln \left(\arcsin \frac{3}{\sqrt{6x}} \right)}{e^{\operatorname{tg} 2x}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x - \cos(\operatorname{arctg} 2ax)}{3}};$
23. $f(x) = 3^{-\operatorname{arctg}(a - \ln \operatorname{ctg} 2x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x} - \sin^3 2ax}}{\arcsin \left(\frac{b}{a-x} \right)};$
24. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - \sin(\sin 2ax)}} \cdot \frac{\ln(\sqrt[4]{x} - \operatorname{tg}^2 2x)}{2^{\pi \arcsin^2 3x}};$
25. $f(x) = \frac{\operatorname{ctg}^2(\ln(ax+1) - 2x)}{\arcsin \left(\frac{2}{a - \pi x} \right)} \cdot 2^{-2 \sin(a-x^2)};$
26. $f(x) = e^{-2 \arcsin \sqrt{a-x}} \cdot \frac{\ln \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 ax} \right)}{\cos 2x + \sin 2x};$

$$27. f(x) = \frac{\ln(a + 2 \cos 2x)}{\arcsin \sqrt{\frac{x+a}{\pi}}} \cdot e^{-\sin^2 \frac{1}{x+a}};$$

$$28. f(x) = \frac{\operatorname{ctg}(\sin^3 \sqrt[3]{x})}{\cos \frac{1}{x} + \ln(\arcsin(a - 2x))} \cdot 7^{\sqrt{a - \operatorname{ctg} 2x}};$$

$$29. f(x) = \frac{\ln(\pi \sqrt{x} - 2^{\operatorname{ctg}^2 3x})}{\frac{4}{5} \operatorname{arc} \sin \sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a - \cos^3 bx}};$$

$$30. f(x) = \frac{\sqrt{6 - x - ax^2}}{\arcsin 2^{\cos bx} - \ln \operatorname{ctg} ax} \cdot e^{\frac{2\pi}{a - \cos 3x}};$$

Задача 2.11. Обчислити похідну функції:

- а) логарифмічним диференціюванням;
- б) параметрично заданої функції;
- в) неявно заданої функції.

№	a	б	в
1	$(x+1)^{\arcsin 2x}$	$x(t) = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y(t) = \sqrt{1-\sqrt{t}}$	$x^y + y^x = e^{xy}$
2	$(\ln x)^{\sin 2x}$	$x(t) = \sin^2 t, y(t) = \cos^2 t$	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = e^x + e^2$
3	$(\cos 2x)^{\operatorname{tg} \pi x}$	$x(t) = a \operatorname{ch} t, y(t) = b \operatorname{sh} t$	$x^3 y = x + e^{xy}$
4	$(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg} x}$	$x(t) = a \sin^3 t, y(t) = a \cos^3 t$	$\sqrt{y} = 2^{\frac{x}{y}} + 13$
5	$(\ln x)^{x+3}$	$x(t) = e^{2t} \cos^2 t, y(t) = e^{2t} \sin^2 t$	$xy + y = \ln xy + x$
6	$(\operatorname{arctg} x)^2 \frac{1}{2^{\ln \operatorname{arctg} x}}$	$x(t) = \ln \sin \frac{t}{2}, y(t) = \ln \sin t$	$x + y = \arcsin xy - \arcsin y$
7	$(\sin 2x)^{13e^x}$	$x(t) = t^2 + t + 1,$ $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + 1$	$x^5 + \ln y - x^2 e^y = 0$
8	$(x^5 + 4)^{\operatorname{tg} 3x}$	$x(t) = t^3 + 2t + \ln t,$ $y(t) = 3t^2 + 2 + \frac{1}{t}$	$x^8 + y^8 + x^4 y^4 = \pi$
9	$(\operatorname{arctg} 2x)^{x^2}$	$x(t) = t^5(t-1), y(t) = t^5(t+1)$	$\cos xy + x = 2y - \sqrt{xy}$
10	$x^{3^x} \cdot 2^x$	$x(t) = \ln(1+t^3), y(t) = t - \operatorname{arctg} t$	$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$
11	$(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{x}}$	$x(t) = t(1 - \sin t), y(t) = t \cos t$	$2^{xy} + xy^3 + x^3 y = a$

12	$(\ln x)^{\sqrt{x+5}}$	$x(t) = \frac{t^3+1}{t^2-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$	$xy + 2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$
13	$(x \sin x)^{\ln(x \sin x)}$	$x(t) = e^t \sin t, y(t) = e^t \cos t$	$a^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$
14	$(\ln(x+1))^{\operatorname{tg} x}$	$x(t) = \frac{3t}{t^3+1}, y(t) = \frac{3t^2}{t^3+1}$	$x^4 \sin y + y \sin x = 2xy$
15	$(\operatorname{ctg} x)^{\lg x}$	$x(t) = 2^{\sin^2 t}, y(t) = 2^{\cos^2 t}$	$x^4 + y^4 + 8x^2 y^2 + \frac{x^2}{y^2} = \pi$
16	$(1 + \sqrt{x})^{\operatorname{tg} x}$	$x(t) = \sqrt{1-t^2}, y(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$	$x^3 + y^3 + xy = \sin xy$
17	$(\ln x)^{x+\sin x}$	$x(t) = t\sqrt{t^2+1}, y(t) = \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$	$e^x \sin y + e^{xy} \cos xy = xy$
18	$x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$	$x(t) = \arccos \frac{1}{t},$ $y(t) = \sqrt{t^2-1} + \arcsin \frac{1}{t}$	$\sin(xy) + \cos(xy) = \frac{x}{y}$
19	$9^{x^9} \cdot x^9$	$x(t) = \operatorname{arctg} \frac{t+1}{t-1},$ $y(t) = \arcsin \sqrt{1-t^2}$	$x - xy + y = \arcsin x +$ $+ \arcsin y$
20	$(x^{14} + 14)^{\operatorname{ctg} x}$	$x(t) = \operatorname{ctg} t, y(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$	$\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) = 2e$
21	$\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^{e^{\cos x}}$	$x(t) = \sqrt{t^2+1}, y(t) = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$	$x^3 y + y^3 x = \cos x + \ln y$
22	$x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$	$x(t) = \arcsin^2 t, y(t) = t \ln t$	$x + \frac{1}{xy} = \operatorname{tg} y$
23	$\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\right)^{x+99}$	$x(t) = \sqrt{2t-t^2}, y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$	$x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = \sin x^2 y^2$
24	$(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$	$x(t) = \arcsin \sqrt{t}, y(t) = \sqrt{1+\sqrt{t}}$	$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sin \sqrt{xy}$
25	$(\sin 3x)^{\ln(1-2x^2)}$	$x(t) = \ln(1-t^2), y(t) = \arcsin \sqrt{1-t^2}$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
26	$x^{\ln^2 x}$	$x(t) = \operatorname{ctg}(2e^t), y(t) = \ln(\operatorname{tg} e^t)$	$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dy +$ $+ 2ex + f = 0$
27	$(\lg x)^{\operatorname{tg} x}$	$x(t) = \operatorname{arctg} t, y(t) = \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$	$e^{xy} = \operatorname{tg} \frac{1}{x^2 + y^2}$
28	$(\cos 2x)^{\operatorname{arctg} 15x}$	$x(t) = (1 + \cos^2 t)^2, y(t) = \frac{\cos t}{\sin^2 t}$	$x^3 y^4 = \operatorname{ctg} xy^2$

29	$\left(\frac{\cos^2 x}{1+2x}\right)^{\sin x}$	$x(t) = t\sqrt{t^2+1}, y(t) = \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$	$\ln(x+y) + \frac{1}{x-y} + 2 = 0$
30	$(\arcsin 2x)^{e^x}$	$x(t) = \arcsin(\sin t),$ $y(t) = \arccos(\cos t)$	$\sqrt{xy} = \sin \frac{x}{y} - x - y$

4. Дотична до кривої. Похідні вищих порядків.

Задача 2.12. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, яка паралельна прямій:

1. $y = \frac{x+1}{x-1}, 2x+y=2.$

8. $y = \frac{5x-1}{3x+3}, 2x-y=-7.$

2. $y = \frac{x-3}{x+1}, x-y=-3.$

9. $y = \frac{5x+3}{x+6}, 6x-2y=-3.$

3. $y = \frac{x-3}{x+1}, 4x-y=-3.$

10. $y = \frac{5x+2}{-x-6}, 6x+2y=4.$

4. $y = \frac{-x+3}{x+1}, x+y=-4.$

11. $y = \frac{4x+1}{4x+5}, 8x-2y=-5.$

5. $y = \frac{-x+3}{x+1}, 4x+y=3.$

12. $y = \frac{4x-1}{4x+5}, 8x-2y=-5.$

6. $y = \frac{3x+2}{2x+2}, 2x-y=-4.$

13. $y = \frac{6x-5}{3x+5}, 10x-2y=-15.$

7. $y = \frac{-3x+2}{-2x+4}, 2x+y=4.$

14. $y = \frac{7x+3}{2x-2}, 10x+2y=13.$

Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$, яка перпендикулярна прямій:

15. $y = \frac{9x-3}{x+1}, 3x-y=-7.$

16. $y = \frac{x-8}{x+4}, 6x+2y=7.$

17. $y = \frac{4x+6}{4x+3}, 6x-2y=-7.$

18. $y = \frac{3x+1}{x+3}, 4x+2y=9.$

19. $y = \frac{-5x+1}{-2x+4}, 4x-2y=-9.$

20. $y = \frac{7x+1}{2x-2}, 3x+3y=-1.$

21. $y = \frac{8x+4}{6x+1}, -4x+y=7.$

22. $y = \frac{8x-4}{6x-1}, 8x+2y=11.$

23. $y = \frac{10x+7}{5x-9}, 10x-2y=-21.$

24. $y = \frac{10x+7}{-5x+9}, 10x+2y=21.$

$$\begin{array}{ll}
25. \quad y = -\frac{3x+3}{x+7}, \quad 4x-2y = -19. & 26. \quad y = \frac{3x-1}{x-2}, \quad 10x-2y = -9. \\
27. \quad y = \frac{6x-1}{2x+5}, \quad 4x+2y = 15. & 28. \quad y = \frac{2x+2}{2x-1}, \quad 12x-2y = -21. \\
29. \quad y = \frac{2x+2}{-2x+1}, \quad 12x+2y = 21. & 30. \quad y = \frac{3x-1}{x+2}, \quad 14x+2y = 25.
\end{array}$$

Задача 2.13. Знайти y''_{xx} з задачі 2.11 (б) відповідного варіанту.

6. Дифференціал функції. Наближені обчислення. Правило Лопіталя.

Задача 2.14. Знайти диференціал функції та наближено обчислити:

$$\begin{array}{lll}
1. \quad \sqrt[3]{8,06}. & 11. \quad \sqrt{1+\sin 0,01}. & 21. \quad \sqrt{1+0,01+\sin 0,01}. \\
2. \quad \sqrt[4]{16,02}. & 12. \quad \sqrt[3]{1+13 \cdot 2,01}. & 22. \quad \sqrt[3]{2 \cdot 1,02 - \cos(\pi \cdot 1,02)}. \\
3. \quad \arcsin(-0,04). & 13. \quad \sqrt[3]{0,97^2 + 7}. & 23. \quad \operatorname{arcctg} 0,95. \\
4. \quad \sqrt{(1,02)^3}. & 14. \quad \frac{1}{\sqrt[4]{81,01}}. & 24. \quad \sqrt{\frac{2-0,15}{2+0,15}}. \\
5. \quad (0,98)^{10}. & 15. \quad \sqrt[4]{1+0,1^2}. & 25. \quad \sqrt[3]{5,07^2 + 2}. \\
6. \quad \ln 1,01. & 16. \quad \ln(1+2 \cdot 0,01). & 26. \quad 0,97 + \sqrt{10-0,97^2}. \\
7. \quad \operatorname{arctg} 0,98. & 17. \quad \sqrt[3]{3 \cdot 0,02^2 + 1}. & 27. \quad \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1,01^2 + 1,01 + 1}}. \\
8. \quad \frac{1}{\sqrt{4,016}}. & 18. \quad \sqrt[3]{1,97^2 + 1,97 + 3}. & 28. \quad \sqrt[6]{7,2^2 + 7,2 + 8}. \\
9. \quad (0,99)^{12}. & 19. \quad \sqrt[3]{1,012^3 + 7 \cdot 1,012}. & 29. \quad \arccos 0,52 \\
10. \quad e^{-0,3}. & 20. \quad \ln \operatorname{tg} 47^\circ. & 30. \quad \sqrt[4]{2,01^6 + 17}.
\end{array}$$

Задача 2.15. Користуючись правилом Лопіталя обчислити границю функції:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} (a^2 - x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}. \qquad 16. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\ln(1 + \cos x)}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\cos x}{\ln(e^x - e^3)} \ln(x - 3)$.
5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{1 - \cos 3x}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\ln(1 + x^2) - x^2}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln \sin 2x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - 1,5x^2}{\sin x - x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{inx}}{x - \sin x}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sin 2x - \operatorname{tg} 2x}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln(x - 1)$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[9]{x}}$.
24. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^2}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(\cos x))^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$.
27. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
28. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{1 - \sin x} \right)$.

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) \ln x.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \pi}{2 \arcsin \frac{x}{2} - \pi}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^2 + 2)}.$$

7. Дослідження функцій.

Задача 2.16. Встановити область визначення функції, інтервали монотонності та точки екстремуму, дослідити функцію на опуклість, знайти асимптоти та побудувати графік функції.

$$1. \text{ а) } y = \frac{x^2}{x-2}; \quad \text{б) } y = \ln(x+1) - x;$$

$$2. \text{ а) } y = \frac{3x^2}{x^2+9}; \quad \text{б) } y = x - 2 \operatorname{arctg} x;$$

$$3. \text{ а) } y = \frac{2x^2 - 6}{x-2}; \quad \text{б) } y = x^2 e^{-x};$$

$$4. \text{ а) } y = x + \frac{x}{3x-1}; \quad \text{б) } y = \ln(x^2 + 1);$$

$$5. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}; \quad \text{б) } y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x};$$

$$6. \text{ а) } y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}; \quad \text{б) } y = x^2 \ln x;$$

$$7. \text{ а) } y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad \text{б) } y = -\ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$8. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x + 2}; \quad \text{б) } y = \frac{e^{\frac{x+1}{2}}}{x+1};$$

$$9. \text{ а) } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } y = (3-x)e^{x-2};$$

$$10. \text{ а) } y = \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^2; \quad \text{б) } y = 2^{\frac{2}{x-1}};$$

$$11. \text{ а) } y = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } y = \sqrt{x}(x-1);$$

$$12. \text{ а) } y = \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 4}; \quad \text{б) } y = x(\ln x + 1);$$

- | | |
|---|--|
| 13. a) $y = \frac{21-x^2}{7x+9};$ | б) $y = \ln \frac{x}{x-3} + 1;$ |
| 14. a) $y = \frac{x^3}{x^2-1};$ | б) $y = x + \ln(1-2x);$ |
| 15. a) $y = \frac{x^2}{4x^2-1};$ | б) $y = x + \frac{\ln x}{x};$ |
| 16. a) $y = \frac{x^2}{x^4-1};$ | б) $y = 2 \ln \frac{x}{x+1} - 1;$ |
| 17. a) $y = \frac{x^3}{x^2-1};$ | б) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x;$ |
| 18. a) $y = \frac{x^2+2x-1}{2x+1};$ | б) $y = \sin^3 x + \cos^3 x;$ |
| 19. a) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x};$ | б) $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x};$ |
| 20. a) $y = \frac{3x^2}{x^2+9};$ | б) $y = x - 2 \sin^2 x;$ |
| 21. a) $y = \frac{x^3}{3-x^2};$ | б) $y = \sin x - \sin^2 x;$ |
| 22. a) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2};$ | б) $y = \cos 3x + 3 \cos x;$ |
| 23. a) $y = \sqrt[3]{x^2(3-x)};$ | б) $y = \sin x \sin 3x;$ |
| 24. a) $y = x + \frac{4}{x+2};$ | б) $y = \cos x \cos 2x;$ |
| 25. a) $y = \frac{1}{x} + 4x^2;$ | б) $y = e^{\cos x};$ |
| 26. a) $y = \frac{4x^2-3x}{4x^2-1};$ | б) $y = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}};$ |
| 27. a) $y = \frac{x^2-3x+4}{x-1};$ | б) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}};$ |
| 28. a) $y = \frac{x^2+16}{4x};$ | б) $y = x - \sqrt{x^2-2x};$ |
| 29. a) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}};$ | б) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}};$ |
| 30. a) $y = \frac{3x-x^2-3}{x-1};$ | б) $y = \frac{x}{2} + 2 \arctg x;$ |

8. Найбільші та найменші значення функції.

Задача 2.17. Знайти найбільші та найменші значення функції на відрізку.

1. $y = x - 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 5]$.

16. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8$, $x \in [-4, -1]$.

2. $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}$, $x \in [-3, 3]$.

17. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $x \in [1, 5]$.

3. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $x \in [-3, 4]$.

18. $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-2, 2]$.

4. $y = \frac{9}{x} + \frac{25}{1-x}$, $x \in (0, 1)$.

19. $y = \sqrt[3]{100 - x^2}$, $x \in [-6, 8]$.

5. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x \in [0, 1]$.

20. $y = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 2x + 5}$, $x \in [-5, 1]$.

6. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

21. $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$, $x \in [-4, 2]$.

7. $y = x - 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 5]$.

22. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$, $x \in [-1, 7]$.

8. $y = x - 2 \ln x$, $x \in [\frac{3}{2}, e]$.

23. $y = xe^{-x}$, $x \in [-1, 3]$.

9. $y = x \ln \left(\frac{x}{5} \right)$, $x \in [1, 5]$.

24. $y = \frac{-2x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5}$, $x \in [-2, 1]$.

10. $y = (x-3)e^{|x+1|}$, $x \in [-2, 4]$.

25. $y = \frac{x^3 - 16x + 16}{x}$, $x \in [1, 4]$.

11. $y = 2 \sin x + \sin 2x$, $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$.

26. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$, $x \in [1/2, 2]$.

12. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $x \in [0, 3]$.

27. $y = \arctg \frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0, 1]$.

13. $y = \sin 2x - x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

28. $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$, $x \in [-1, 2]$.

14. $y = x^2 \ln x$, $x \in [1, e]$.

29. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$, $x \in [1, 4]$.

15. $y = x^2 + 4x + \frac{16}{x+2} - 9$, $x \in [-1, 2]$.

30. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, $x \in [1, 9]$.

Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Теорія: [1, гл.7], [2, гл.9,10].

Методика розв'язання: [4, том 1, гл.10-12], [5, гл.4-5].

1. Невизначений інтеграл.

Задача 3.1. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}{x^2} dx.$

2. $\int (1-x)(1-2x)(a-3x) dx.$

3. $\int (2a + \sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x})^2 dx.$

4. $\int x^2(3-x)^2 dx.$

5. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx.$

6. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

7. $\int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}} dx.$

8. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$

9. $\int \frac{2 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

10. $\int \frac{x^2 - 5x + 2}{\sqrt{x}} dx.$

11. $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx.$

12. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx.$

13. $\int \frac{(x+1)^2}{x\sqrt{x}} dx.$

14. $\int \frac{\sqrt{x} + x^2 \sin x}{x^2} dx.$

15. $\int (\sin 2x - \cos x + 1) dx.$

16. $\int (e^x + 3)^2 dx.$

17. $\int x^3(2x + \sqrt{x})^2 dx.$

18. $\int \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

19. $\int \frac{5 \cdot 5^x - 2 \cdot 3^x}{3^x} dx.$

20. $\int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - xe^{2x}}{x} dx.$

21. $\int \frac{1 + \cos x + x^2 \cos x}{1 + x^2} dx.$

22. $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x dx.$

23. $\int \frac{x^2 \sin x - x}{x^2} dx.$

24. $\int \frac{3x^2}{2 + 2x^2} dx.$

25. $\int \frac{x - x^2 e^x + 3x^4}{x^2} dx.$

26. $\int \frac{e^x \sqrt{1+x^2} - 4}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

27. $\int \frac{3x^2}{2x^4 - 2x^2} dx.$

28. $\int \frac{3^x + 4 \cdot 5^x}{3^x} dx.$

29. $\int \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x^3} dx.$

30. $\int \frac{1 - 5x^2}{x^2(1-x^2)} dx.$

Задача 3.2. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$
2. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx.$
3. $\int \frac{1}{\arctg^5 x \sqrt{1-x^2}} dx.$
4. $\int \frac{tg(x+11)}{\cos^2(x+11)} dx.$
5. $\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$
6. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx.$
7. $\int \frac{2\arctgx + x}{1 + x^2} dx.$
8. $\int \frac{x - \cos x}{x^2 - 2 \sin x} dx.$
9. $\int x^2 \sin(3 + x^2) dx.$
10. $\int \frac{2^x}{4^x + 1} dx.$
11. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 1} dx.$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{4 - tg^2 x}} dx.$
13. $\int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
14. $\int \frac{\frac{1}{x} + x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
15. $\int \frac{1}{x(\ln x + 54)} dx.$
16. $\int \frac{2x^2 - x^5}{x^6 + 1} dx.$
17. $\int \frac{1}{x\sqrt{16 + \ln^2 x}} dx.$
18. $\int \cos x \cdot e^{5\sin x - 2} dx.$
19. $\int x3^{1-x^2} dx.$
20. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln x - 3}}{x} dx.$
21. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx.$
22. $\int \sqrt{\frac{\arcsin^7 x}{1-x^2}} dx.$
23. $\int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$
24. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$
25. $\int \frac{2^x}{4^x + 2^{x+1} + 1} dx.$
26. $\int \frac{1}{\arctgx \sqrt{1-x^2}} dx.$
27. $\int x^2(1+x^3)^{12} dx.$
28. $\int \frac{2 + \arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$
29. $\int \frac{2^{\arctg 2x}}{4x^2 + 1} dx.$
30. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^4}} dx.$

Задача 3.3. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int (2-4x)3^{-2x} dx.$
2. $\int (11+5x) \sin 3x dx.$
3. $\int \cos 3x \cdot e^{2x} dx.$
4. $\int \sin(\ln x) dx.$
5. $\int x \ln^2 x dx.$
6. $\int x \cos^2 \frac{x}{2} dx.$
7. $\int (1+7x) \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$
11. $\int \cos 3x \cdot (x^2 + 4) dx.$
12. $\int \arctg \frac{1}{x} dx.$
13. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$
14. $\int x \arcsin x dx.$
15. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$
16. $\int (3-9x)6^{-3x} dx.$
17. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$
21. $\int x \cdot \arctg^2 x dx.$
22. $\int x \sin x \cos x dx.$
23. $\int 2^x \cos x dx.$
24. $\int (x+5)3^{-3x} dx.$
25. $\int e^{2x} \sin x dx.$
26. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx.$
27. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$

8. $\int \arccos 2x dx.$ 18. $\int x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx.$ 28. $\int (1+x) \cos 7x dx.$
 9. $\int \sin 2x \cdot e^{-x} dx.$ 19. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$ 29. $\int x^3 \ln(x+1) dx.$
 10. $\int x^2 \ln x dx.$ 20. $\int \cos(\ln x) dx.$ 30. $\int x^2 \cos 3x dx.$

Задача 3.4. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int \frac{5x^4 + 9x^2 - 2x + 5}{x^3 - 4x} dx.$ 16. $\int \frac{2x^4 - 3x^2 - 2x + 5}{(x+2)^2(x-5)} dx.$
 2. $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 3}{x(x^2 + 2x + 1)} dx.$ 17. $\int \frac{3x^5 - 2x^4 - 2x + 3}{9x^3 - 6x^2 + x} dx.$
 3. $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 7x + 5}{(x-1)(x-2)^2} dx.$ 18. $\int \frac{2x^4 + x^2 - 2x - 3}{(x-3)^2(x+2)} dx.$
 4. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 7x + 2}{(x+1)^2(x-5)} dx.$ 19. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 - 2x + 7}{(x-5)^2(x+1)} dx.$
 5. $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 15}{(x-5)(x+2)^2} dx.$ 20. $\int \frac{2x^4 + 2x^2 - 3x - 1}{x^2(x+2)} dx.$
 6. $\int \frac{4x^4 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 6x^2} dx.$ 21. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 4x^2 + x} dx.$
 7. $\int \frac{2x^3 + 9x^2 + 6x - 5}{(x+4)^2(x-1)} dx.$ 22. $\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 5x + 1}{(x-3)^2(x+1)} dx.$
 8. $\int \frac{x^4 - 2x^3 - 2x + 3}{(x-4)^2 x} dx.$ 23. $\int \frac{x^4 + 5x^2 - 2x + 3}{(x-2)^2(x+4)} dx.$
 9. $\int \frac{3x^4 - 2x^2 - 2x + 1}{(x-2)^2(x+2)} dx.$ 24. $\int \frac{4x^3 - 2x^2 + x + 7}{(x-8)^2(x+1)} dx.$
 10. $\int \frac{3x^4 + 9x^2 + 4x + 1}{x^2(x+7)} dx.$ 25. $\int \frac{4x^4 - 2x^2 - 4x + 3}{(x+7)^2(x+2)} dx.$
 11. $\int \frac{3x^4 - 5x^2 - 4x + 2}{(x+3)^2(x+1)} dx.$ 26. $\int \frac{x^4 - 2x^2 - 2x + 5}{(x-4)^2(x+1)} dx.$
 12. $\int \frac{5x^5 - 2x^3 - 2x + 1}{(x-1)^2(x+3)} dx.$ 27. $\int \frac{x^4 - x^2 - 2x + 4}{x^2(x+3)} dx.$
 13. $\int \frac{x^4 + 2x^2 - 5x + 3}{(x^2 + 4x + 4)x} dx.$ 28. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 - 7x + 11}{(x-1)^2(x+2)} dx.$
 14. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 3}{(x-1)^2(x+6)} dx.$ 29. $\int \frac{x^4 - 2x^2 - x + 3}{x^2(x+4)} dx.$
 15. $\int \frac{5x^4 + 4x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$ 30. $\int \frac{3x^4 - 3x^2 - x + 5}{(x-5)^2(x+3)} dx.$

Задача 3.5. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int \frac{2x-3}{x^3-2x^2+3x-6} dx.$

2. $\int \frac{x-1}{x^3-3x^2+2x-6} dx.$

3. $\int \frac{x}{x^3-x^2+4x-4} dx.$

4. $\int \frac{2x+4}{x^3+6x^2+10x+8} dx.$

5. $\int \frac{x-5}{(x-1)(x^2+x+2)} dx.$

6. $\int \frac{x-3}{x^3-6x^2+x-6} dx.$

7. $\int \frac{x^2-1}{x^3+4x^2+7x+6} dx.$

8. $\int \frac{x-2}{(x+1)(x^2+x+1)} dx.$

9. $\int \frac{-x-5}{(x-2)(x^2+2x+3)} dx.$

10. $\int \frac{x-4}{x^3+4x-16} dx.$

11. $\int \frac{3x+2}{(x+3)(x^2+3x+4)} dx.$

12. $\int \frac{3x^2-5}{x^3-3x^2+10x-8} dx.$

13. $\int \frac{x^2-5x}{x^3+6x^2+3x-10} dx.$

14. $\int \frac{x^2}{x^3+x^2+10x+10} dx.$

15. $\int \frac{x^2-5x}{x^3-8} dx.$

16. $\int \frac{x-5}{x^3+27} dx.$

17. $\int \frac{3x-7}{x^3+3x^2+4x-8} dx.$

18. $\int \frac{5}{x^3+5x^2+6x+8} dx.$

19. $\int \frac{x+15}{(x-2)(x^2+x+4)} dx.$

20. $\int \frac{x-3}{(x+2)(x^2+2x+2)} dx.$

21. $\int \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x-4} dx.$

22. $\int \frac{5x-1}{x^3-2x^2+x+4} dx.$

23. $\int \frac{x^2-1}{x^3+64} dx.$

24. $\int \frac{-x-1}{(x-4)(x^2+2x+5)} dx.$

25. $\int \frac{x^2-5}{x(x^2+2x+4)} dx.$

26. $\int \frac{x+2}{(x+2)(x^2+3)} dx.$

27. $\int \frac{x+5}{(x-5)(x^2+x+3)} dx.$

28. $\int \frac{-x^2-5x-2}{(x-1)(x^2+x+4)} dx.$

29. $\int \frac{x}{(2x-3)(x^2+x+2)} dx.$

30. $\int \frac{5}{(x-4)(x^2+2x+7)} dx.$

Задача 3.6. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int \frac{dx}{3+\sin x-\cos x}.$

11. $\int \frac{dx}{9+4\sin x+\cos x}.$

21. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}.$

2. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + 2 \cos x}$.	12. $\int \frac{dx}{1 + 6 \cos^2 x}$.	22. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x) \cos x}$.
3. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$.	13. $\int tg^4 x dx$.	23. $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}$.
4. $\int \frac{dx}{2 + \sin^2 x}$.	14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x}$.	24. $\int \frac{\sin^7 x dx}{1 + \cos^2 x}$.
5. $\int \frac{dx}{4 + \sin x}$.	15. $\int \frac{dx}{2 \sin x - 3 \cos x}$.	25. $\int \frac{dx}{33 + 3 \sin x + \cos x}$.
6. $\int \frac{dx}{3 - \cos^2 x}$.	16. $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos^2 x}$.	26. $\int \frac{(1 + tg^2 x) dx}{2 + \sin^2 x}$.
7. $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x}$.	17. $\int \frac{\cos^5 x dx}{3 + \sin x}$.	27. $\int \frac{dx}{4 + 5 \sin 2x}$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$.	18. $\int \frac{\sin^5 x dx}{1 + \cos x}$.	28. $\int \frac{\sin^4 x dx}{2 \cos^2 x - 3}$.
9. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{3} \sin x - \cos x}$.	19. $\int \frac{dx}{4 + 7 \cos x}$.	29. $\int \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$.
10. $\int \frac{dx}{5 - \cos x}$.	20. $\int \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \sin x - \cos x}$.	30. $\int \frac{dx}{2 + \sin x - 2 \cos x}$.

Задача 3.7. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$.	11. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.	21. $\int \frac{tg^3 x}{\cos^3 x} dx$.
2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx$.	12. $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$.	22. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^{10} x} dx$.
3. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.	13. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^6 x} dx$.	23. $\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} dx$.
4. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} dx$.	14. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.	24. $\int \frac{1}{\sin^6 x \cos^4 x} dx$.
5. $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$.	15. $\int \frac{tg^3 x}{1 + tg x} dx$.	25. $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$.
6. $\int \frac{1}{\cos^4 2x} dx$.	16. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$.	26. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[6]{\sin^5 x}} dx$.
7. $\int \frac{tg^4 x}{\cos^4 x} dx$.	17. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$.	27. $\int \sin^6 x dx$.
8. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.	18. $\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} dx$.	28. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.
9. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos x}} dx$.	19. $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx$.	29. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.

10. $\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}} dx.$

20. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx.$

30. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$

Задача 3.8. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+4}} dx.$

11. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$

21. $\int \frac{x}{2 - \sqrt[3]{2x+1}} dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}} dx.$

12. $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[6]{x+3} + 1} dx.$

22. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx.$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$

13. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[6]{x-2}} dx.$

23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx.$

4. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

14. $\int \frac{1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} dx.$

24. $\int \frac{2}{\sqrt{x}(x-1)} dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt[3]{x+1} - 1} dx.$

15. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 2} dx.$

25. $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x + \sqrt[3]{x+2}} dx.$

6. $\int \frac{2 + \sqrt[4]{x}}{x - \sqrt{x}} dx.$

16. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{1 - \sqrt{x+1}} dx.$

26. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{1 + \sqrt[3]{2x-3}} dx.$

7. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} + 2} dx.$

17. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{x})^2} dx.$

8. $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx.$

18. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$

28. $\int \frac{1}{x(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})} dx.$

9. $\int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} dx.$

19. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$

29. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{4 - \sqrt{x}} dx.$

10. $\int \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[6]{x-2}} dx.$

20. $\int \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx.$

30. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{3x-1} - \sqrt{3x-1}} dx.$

Задача 3.9. Знайти невизначений інтеграл.

1. $\int x^4 \sqrt{x^2 + 4} dx.$

11. $\int \frac{1}{(81 + x^2)\sqrt{81 + x^2}} dx.$

21. $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$

2. $\int x^3 \sqrt{1 - x^2} dx.$

12. $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$

22. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^4} dx.$

13. $\int \sqrt{36 - x^2} dx.$

23. $\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$

4. $\int \frac{1}{(9+x^2)^{3/2}} dx.$	14. $\int \frac{1}{\sqrt{(64-x^2)^3}} dx.$	24. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$
5. $\int \frac{1}{(5-x^2)^{3/2}} dx.$	15. $\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx.$	25. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$
6. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$	16. $\int \frac{1}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}} dx.$	26. $\int x^3\sqrt{9-x^2} dx.$
7. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$	17. $\int \frac{1}{x\sqrt{2+x^2}} dx.$	27. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}} dx.$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx.$	18. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^3} dx.$	28. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4} dx.$
9. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$	19. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(8-x^2)^3}} dx.$	29. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx.$
10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx.$	20. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} dx.$	30. $\int x^4\sqrt{4-x^2} dx.$

Задача 3.10. Знайти невизначений інтеграл (теорема Чебишова).

1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$	11. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$	21. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx.$
2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx.$	12. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)} dx.$	22. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{2+\sqrt[4]{x^3}}} dx.$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx.$	13. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$	23. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}} dx.$
4. $\int x^3\sqrt{(1-x^2)^3} dx.$	14. $\int x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$	24. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3} dx.$	15. $\int \sqrt[3]{3x-x^3} dx.$	25. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x^3})^{1/3}} dx.$
6. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^3}} dx.$	16. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^3}} dx.$	26. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
7. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^3}} dx.$	17. $\int \frac{1}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}} dx.$	27. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx.$
8. $\int \sqrt{x^3+x^4} dx.$	18. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$	28. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}} dx.$

$$9. \int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx. \quad 19. \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx. \quad 29. \int \sqrt{x^3+x^4} dx.$$

$$10. \int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} dx. \quad 20. \int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x} dx. \quad 30. \int \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt[3]{x}+1)^2} dx.$$

Задача 3.11. Знайти невизначений інтеграл.

$$1. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-1}} dx. \quad 16. \int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{3x^2+1}} dx.$$

$$2. \int \frac{1}{(x-2)\sqrt{3x^2-8x+5}} dx. \quad 17. \int \frac{x}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}} dx.$$

$$3. \int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x+2}} dx. \quad 18. \int \frac{x+3}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}} dx.$$

$$4. \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} dx. \quad 19. \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} dx.$$

$$5. \int (3x^2-2x+1)\sqrt{x^2+4x+1} dx. \quad 20. \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx.$$

$$6. \int \frac{x^2-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx. \quad 21. \int \frac{1}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x+4}} dx.$$

$$7. \int (2x^2-2x+1)\sqrt{2x^2-3x+6} dx. \quad 22. \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx.$$

$$8. \int \frac{2x^2+5}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx. \quad 23. \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$9. \int (3x^2-x+2)\sqrt{x^2+6x+8} dx. \quad 24. \int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+5}} dx.$$

$$10. \int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx. \quad 25. \int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} dx.$$

$$11. \int \frac{1}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} dx. \quad 26. \int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2-2x}} dx.$$

$$12. \int \frac{1}{x^3\sqrt{2x^2+2x+1}} dx. \quad 27. \int \frac{1}{(1+\sqrt{x^2+x})^2} dx.$$

$$13. \int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}} dx. \quad 28. \int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} dx.$$

$$14. \int \frac{1}{(x^2+4x+7)^{\frac{3}{2}}} dx. \quad 29. \int \frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} dx.$$

$$15. \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^{\frac{5}{2}}} dx.$$

$$30. \int \frac{1 - x + x^2}{\sqrt{-x^2 + x + 1}} dx.$$

2. Визначений інтеграл та його застосування.

Задача 3.12. Знайти площу області, яка обмежена

- а) лініями в декартовій системі координат;
- б) лініями в параметричній формі;
- в) лініями в полярній системі координат.

Зробити малюнки.

$$1. \text{ а) } y = \frac{x^2}{2}, y = 2 - \frac{3x}{2}.$$

$$\text{в) } \rho = 1 + \cos 3\varphi.$$

$$\text{б) } x = \cos t, y = 3 + \sin t.$$

$$2. \text{ а) } y = x - \pi/2, y = \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

$$\text{в) } \rho = 2 \sin^2 2\varphi.$$

$$\text{б) } x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi], y = 0.$$

$$3. \text{ а) } y = x, y = \frac{\pi}{2} \sin x, x \geq 0.$$

$$\text{в) } \rho^2 = 3 \cos 3\varphi.$$

$$\text{б) } x = 16 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, x = 2, x \geq 2.$$

$$4. \text{ а) } y = e^x \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{в) } \rho = 3 - \cos 2\varphi.$$

$$\text{б) } x = 3 \cos t, y = 8 \sin t, y = 4\sqrt{3}, y \geq 4\sqrt{3}.$$

$$5. \text{ а) } y = |\ln x|, y = 0, x = \frac{1}{e}, x = e.$$

$$\text{в) } \rho = 1 + \sin 3\varphi.$$

$$\text{б) } x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t), y \geq 6, x \in [0, 8\pi].$$

$$6. \text{ а) } y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}, y = 4.$$

$$\text{в) } \rho = \sin \varphi - \cos \varphi.$$

$$\text{б) } x = 6 \cos t, y = 2 \sin t, y = \sqrt{3}, y \leq \sqrt{3}.$$

$$7. \text{ а) } y = \sin^2 x, y = x \sin x, x \in [0, \pi].$$

$$\text{в) } \rho = 1 + \sin 3\varphi.$$

$$\text{б) } x = \frac{3}{4} \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t.$$

$$8. \text{ а) } y = \ln(1 + x), y = -xe^{-x}, x = 1.$$

$$\text{в) } \rho = 2 \cos \varphi, \rho = \cos \varphi.$$

$$\text{б) } x = 2 \cos t, y = 6 \sin t, y = 3, y \geq 3.$$

$$9. \text{ а) } y = 6x^2 - 5x + 1, y = \cos \pi x, x \in [0, \frac{1}{2}].$$

$$\text{в) } \rho = 2 - \cos \varphi.$$

$$\text{б) } x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 3, y \geq 3, x \in [0, 4\pi].$$

10. a) $y = \frac{6}{x+5}, y = |x|, x \geq -2.$ B) $\rho = 2 \sin 3\varphi.$
 б) $x = \sqrt{2} \cos t, y = 4\sqrt{2} \sin t, y = 4, y \geq 4.$
11. a) $y = x - x^2, y = x\sqrt{1-x^2}.$ B) $\rho = \sin \varphi, \rho = \cos \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}].$
 б) $x = 2 \cos t, y = 3 + 6 \sin t, y = 6, y \geq 6.$
12. a) $y = \sin 2x, y = \sin x, x \in [\frac{\pi}{3}, \pi].$ B) $\rho = 3 - \sin \varphi.$
 б) $x = 2\sqrt{2} \cos t, y = 2\sqrt{2} \sin t, y = 3, y \geq 3.$
13. a) $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{1}{1+x^2}.$ B) $\rho^2 = 3 \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right).$
 б) $x = 8 \cos^3 t, y = 8 \sin^3 t, x = 1, x \geq 1.$
14. a) $y = (x^2 - 2x)e^x, y = 0, x \geq 0.$ B) $\rho = 1 + \sin 2\varphi.$
 б) $x = 8 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t, x = 3\sqrt{3}, x \geq 3\sqrt{3}.$
15. a) $x^2 + y^2 = 8, 2y = x^2, y \geq 0.$ B) $\rho = 3 - \sin \varphi.$
 б) $x = 6 \cos t, y = 10 \sin t, y = 5\sqrt{3}, y \geq 5\sqrt{3}.$
16. a) $x = y^2(y-1), x = 0.$ B) $\rho = 4 \cos^2 \left(2\varphi - \frac{\pi}{4} \right).$
 б) $x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, y = \sqrt{2} \sin^3 t, x = 1, x \geq 1.$
17. a) $y^2 + x = 4, y^2 - 3x = 12.$ B) $\rho = 3 \sin 4\varphi.$
 б) $x = 16 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, x = 2, x \geq 2.$
18. a) $x^2 + y^2 = 2, y^2 = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}.$ B) $\rho = 1 + \cos 3\varphi.$
 б) $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), y = 9, y \geq 9, x \in [0, 12\pi].$
19. a) $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$ B) $\rho = 3 - \cos 2\varphi.$
 б) $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, x = \frac{3}{\sqrt{2}}, x \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$
20. a) $y = \sin^2 x \cdot \cos x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}.$ B) $\rho = 2 + \cos 2\varphi.$
 б) $x = 10(t - \sin t), y = 10(1 - \cos t), y = 15, y \geq 15, x \in [0, 20\pi].$
21. a) $y = x^2 \sqrt{4-x^2}, y = 0, x = 1.$ B) $\rho = 2 + \sin \varphi.$
 б) $x = \sqrt{2} \cos t, y = 4\sqrt{2} \sin t, y = 4, y \geq 4.$
22. a) $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 5.$ B) $\rho = 2 - \cos 3\varphi.$
 б) $x = 8 \cos^3 t, y = 8 \sin^3 t, x = 1, x \geq 1.$
23. a) $y = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}, y = 0, x = 0, x = e^4.$ B) $\rho = \operatorname{sh} \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}].$

- б) $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 1, y \geq 1, x \in [0, 4\pi]$.
24. а) $y = \ln x, y = \ln^2 x$. б) $\rho = 4\sqrt{\varphi}, \varphi \in [0, 1]$.
- б) $x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, y = \sqrt{2} \sin^3 t, x = \sqrt{2}, x \geq \sqrt{2}$.
25. а) $y = x^2 \operatorname{tg} x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}$. б) $\rho = 5 \cos 4\varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$.
- б) $x = 2\sqrt{2} \cos t, y = 5\sqrt{2} \sin t, x = 5, x \geq 5$.
26. а) $y = \sin \frac{x}{2}, y = \cos \frac{x}{2}, x = 0$. б) $\rho = 2 \operatorname{tg} 2\varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$.
- б) $x = 24 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t, x = 9\sqrt{3}, x \geq 9\sqrt{3}$.
27. а) $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = 0$. б) $\rho = 4\varphi, \varphi \in [0, 2]$.
- б) $x = 8(t - \sin t), y = 8(1 - \cos t), y = 12, y \geq 12, x \in [0, 16\pi]$.
28. а) $y^2 = x(1-x)^2$. б) $\rho = 3\sqrt{\varphi}, \varphi \in [0, 16]$.
- б) $x = 2 \cos t, y = 6 \sin t, y = 3, y \geq 3$.
29. а) $x = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3$. б) $\rho = \frac{2}{\varphi\sqrt{\varphi}}, \varphi \in [1, 2]$.
- б) $x = \sqrt{2} \cos^3 t, y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, y = 1, y \geq 1$.
30. а) $y = (x-2)^3, y = 4x - 8$. б) $\rho = 7 \operatorname{tg} \varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
- б) $x = 2 \cos t, y = 6 \sin t, x = 1, x \geq 1$.

Задача 3.13. Знайти довжину дуги кривої, яка задана

- а) лініями в декартовій системі координат;
 б) лініями в параметричній формі;
 в) лініями в полярній системі координат.

1. а) $y = 2\sqrt{x}, x \in [0, 1]$. б) $\rho = 1 + \sin \varphi, \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- б) $x = 2(t \sin t + \cos t), y = 2(\sin t - t \cos t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. а) $x = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}, y \in [0, 3]$. б) $\rho = 3(1 - \sin \varphi), \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- б) $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. а) $y = \ln(x^3 - 1), x \in [2, 3]$. б) $\rho = 3\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$.
- б) $x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. а) $y = 2 + \operatorname{ch} x, x \in [0, 2]$. б) $\rho = e^{\frac{4\varphi}{3}}, \varphi \in [0, \pi]$.

- б) $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, t \in [0, \pi]$.
5. а) $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, x \in [0, \frac{8}{9}]$. б) $\rho = \frac{1}{\varphi}, \varphi \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- б) $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, t \in [0, \pi]$.
6. а) $y = \ln \sin x, x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. б) $\rho = 2e^\varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
7. а) $y = e^x + 1, x \in [0, 1]$. б) $\rho = 1 + \cos \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = (t^2 - 2) \sin t - 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
8. а) $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}, x \in [0, 1]$. б) $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \varphi \in [0, \pi]$.
- б) $x = e^{2t} \sin t, y = e^{2t} \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
9. а) $y = \ln(x^2 - 1), x \in [3, 5]$. б) $\rho = 1 - \sin \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
- б) $x = e^t (\cos t + \sin t), y = e^t (\cos t - \sin t), t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
10. а) $y = \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x}, x \in [1, 2]$. б) $\rho = 1 - \cos \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = 2t, y = e^{2t}, t \in [0, 1]$.
11. а) $y^2 = (x-1)^3, x \in [1, 2]$. б) $\rho = 6 \cos \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
- б) $x = t^2 - 1, y = t^2 + t + 1, t \in [-\frac{1}{4}, 0]$.
12. а) $y = \frac{x^2}{2} - 1, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. б) $\rho = 6 \cos^3 \frac{\varphi}{3}, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = 8t^3, y = 6t^2 - 3t^4, t \in [0, \sqrt{2}]$.
13. а) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, x \in [0, 2]$. б) $\rho = 2\varphi, \varphi \in [0, \frac{1}{2}]$.
- б) $x = 2t, y = \ln(\cos 2t), t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
14. а) $y = e^{2x}, x \in [0, 1]$. б) $\rho = 3(1 + \sin \varphi), \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = 2t, y = \ln(\sin 2t), t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.
15. а) $y = 3 - e^{2x}, x \in [\ln \sqrt{2}, \ln \sqrt{5}]$. б) $\rho = 5\varphi, \varphi \in [0, 1]$.

- б) $x = 3t, y = 3\ln(1-t^2), t \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.
16. а) $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$. б) $\rho = e^{\frac{12}{5}\varphi}, \varphi \in [0, 1]$.
- б) $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
17. а) $y = \ln x - \ln 2, x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$. б) $\rho = 5(1 - \cos \varphi), \varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$.
- б) $x = \ln t, y = \arcsin t, t \in [\frac{1}{e}, \frac{1}{2}]$.
18. а) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, x \in [1, 2]$. б) $\rho = 4\varphi, \varphi \in [0, \pi]$.
- б) $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, t \in [0, 1]$.
19. а) $y = \sqrt{(x-1)^3}, x \in [2, 3]$. б) $\rho = 3\sin^3 \frac{\varphi}{3}, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
20. а) $y = 7 - e^x, x \in [\ln \sqrt{8}, \ln \sqrt{15}]$. б) $\rho = \frac{2}{1 + \cos \varphi}, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = e^{-t} \sin 5t, y = e^{-t} \cos 5t, t \in [0, 1]$.
21. а) $y = \arccos e^{-x}, x \in [0, 1]$. б) $\rho = \frac{2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- б) $x = 3(t^2 - 2)\sin t + 6t \cos t, y = 3(2 - t^2)\cos t + 6t \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
22. а) $y = \ln x, x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$. б) $\rho = 3\cos \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
- б) $x = \frac{1}{3}t^3 + 9, y = 2 - \frac{t^2}{3}, t \in [0, 3]$.
23. а) $y = \arcsin e^x, x \in [-\ln 7, -\ln 2]$. б) $\rho = 4(1 + \sin \varphi), \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- б) $x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{\cos 2t}{4}, y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$.
24. а) $y = \ln 3 - \ln x, x \in [\sqrt{5}, 3]$. б) $\rho = 3\varphi, \varphi \in [1, 3]$.
- б) $x = \frac{1}{2}(t^2 - 2t), y = \frac{1}{3}(t-1)^3, t \in [1, 2]$.
25. а) $y = 6 + \ln \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{3}]$. б) $\rho = 3\cos \varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
- б) $x = 6t, y = 3\ln(\cos 2t), t \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

26. а) $y = chx + 7, x \in [0, 3]$. в) $\rho = 2e^{\frac{24\varphi}{7}}, \varphi \in [0, 1]$.
 б) $x = 4t, y = 4 \ln(t^2 - 1), t \in [3, 5]$.
27. а) $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 6), x \in [0, 1]$. в) $\rho = \frac{2}{\varphi^2}, \varphi \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.
 б) $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t, t \in [0, \pi]$.
28. а) $y = \frac{1}{2}(3 - e^x - e^{-x}), x \in [0, 3]$. в) $\rho = 2e^{2\varphi}, \varphi \in [0, 2]$.
 б) $x = e^{t^2} \cos(t^2), y = e^{t^2} \sin(t^2), t \in [0, 2]$.
29. а) $y = \ln \frac{5}{2x}, x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$. в) $\rho = \sin^4 \frac{\varphi}{4}, \varphi \in [0, \pi]$.
 б) $x = e^{t^2} \cos(t^2), y = e^{t^2} \sin(t^2), t \in [0, 2]$.
30. а) $x = \frac{1}{4} \ln(4y + \sqrt{16y^2 - 1}), y \in [1, 2]$. в) $\rho = 2 \cos \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
 б) $x = 3t \sin 5t, y = 3t \cos 5t, t \in [-1, 0]$.

Задача 3.14. Знайти об'єм тіла

а) утворений обертанням відносно осі OX або OY області, яка обмежена кривими;

б) обмеженого поверхнями (методом поперечного перерізу).

1. а) $y = 2 \sin x, y = 0, x \in [0, \pi], OX$. б) $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, z = 0, z = 1$.
2. а) $y^3 = 4x^2, y = 2, OY$. б) $x^2/4 + y^2/2 = z, z = 1$.
3. а) $2y^2 = x^3, x = 4, OX$. б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, z = 0, z = 1, y \geq 0$.
4. а) $y = \sqrt{4 - x^2}, x \in [0, 1], OX$. б) $z = x^2 + 4y^2, z = 1$.
5. а) $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t, OX$. б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 1$.
6. а) $y = x^2, x = y^2, OY$. б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 8$.
7. а) $y = 1 - \cos 2x, y = 0, x = \pi/2, OX$. б) $x^2/16 + y^2/9 + z^2/4 = 1, z = 0, z = 1$.
8. а) $y = 1 - \frac{x^2}{2}, y = 1 - x, OY$. б) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 9, z = 0, z = x, x \geq 0$.
9. а) $y = x^2 + 1, y = 0, x = \pm 2, OX$. б) $z = 4x^2 + 9y^2, z = 2$.
10. а) $y = x^3 + 1, y = 1, x = 1, OX$. б) $-z^2 + y^2 + \frac{x^2}{4} = 4, z = 2, z = 1$.

11. a) $y = \sin^2 x, x \in [0, \pi], OX.$

12. a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, y = \pm 6, OY.$

13. a) $y = \sqrt{x}e^x, x \in [0, 1], OX.$

14. a) $x = 3\cos^3 t, y = 3\sin^3 t, OX.$

15. a) $y = e^{2-x}, x \in [0, 1], OX.$

16. a) $y = x^2, x = y^2, OX.$

17. a) $y = 2x^3 - 1, x \in [1, 2], OX.$

18. a) $x = \cos t, y = 3\sin t, OY.$

19. a) $y^2 = (x+5)^3, x = 0, OY.$

20. a) $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t),$
 $y = 0, x \in [0, 6\pi], OX.$

21. a) $y = \sqrt{x-1}, y \in [0, 1], OY.$

22. a) $y = \ln x, x \in [1, e], OY.$

23. a) $y = \arccos \frac{x}{5}, x \leq 0, OY.$

24. a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, y = 0, x = 0, OY.$

25. a) $y = \sqrt[4]{x}, x \leq 1, OY.$

26. a) $x = t, y = 2t^2, y = 4, OY.$

27. a) $y^2 = x - 2, OY.$

28. a) $y^2 = x, x + y = 2, y \geq 0, OY.$

29. a) $y = \sqrt[6]{x}, y \leq 1, OY.$

30. a) $y = \ln \frac{x}{2}, x \in [1, 2e], OX.$

б) $x^2 + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1, z = 3.$

б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, z = 0, z = 1.$

б) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1, z = 0, z = y\sqrt{3}, y \geq 0.$

б) $z = x^2 + 6y^2, z = 2.$

б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = -1, z > 0, z = 6.$

б) $\frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1, z = 0, z = 2.$

б) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1, z = 0, z = y\sqrt{3}, y \geq 0.$

б) $z = x^2 + 5y^2, z = 2.$

б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 1, z = 3.$

б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{64} = -1, z > 0, z = 10.$

б) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1, z = 1, z = 4.$

б) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{27} = 1, z = 0, z = \frac{y}{\sqrt{3}}, y \geq 0.$

б) $z = 4x^2 + 8y^2, z = 5.$

б) $x^2 + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 5.$

б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1, z = 12.$

б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 1, z = 3.$

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = 1, z = 0, z = 4.$

б) $z = 2x^2 + 18y^2, z = 5.$

б) $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 1, z = 1, z = 5.$

3. Невласні інтеграли.

Задача 3.15. а) Обчислити невластний інтеграл 1 роду;

б) Дослідити збіжність інтегралу (ознака порівняння).

1. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$

б) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)^2}};$

2. а) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2 - 1};$

б) $\int_1^{\infty} \frac{\sin 5x dx}{x^5 + 2x + 2};$

3. а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 2x};$

б) $\int_2^{\infty} \frac{(2 + \arcsin \frac{1}{x}) dx}{4 + x^5 \sqrt{x}};$

4. а) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^4 x dx}{x^2 + 1};$

б) $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{x \sqrt{x^2 - 4}};$

5. а) $\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(3x^2 + 27)^3}};$

б) $\int_1^{\infty} \frac{(4 + \sin x) dx}{\sqrt[3]{x}};$

6. а) $\int_0^{\infty} (x+1)^2 e^{-x} dx;$

б) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^3 + 2x + 2};$

7. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1};$

б) $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^3 + 1}};$

8. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2+x) \ln^2(x+2)};$

б) $\int_1^{\infty} \frac{(2 + \cos 3x) dx}{x^2 + 2};$

9. а) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx;$

б) $\int_1^{\infty} \frac{(\pi - \cos 2x) dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}};$

10. а) $\int_0^{\infty} (x-1)e^{-3x} dx;$

б) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x^3 + \sqrt{x^2 + x}}};$

11. а) $\int_1^{\infty} \frac{(2-3x) dx}{\sqrt{x^5}};$

б) $\int_1^{\infty} \frac{\cos^4 2x dx}{e^{3x}};$

12. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 - 2x + 5};$

б) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+2} dx}{x^3 + x + 3};$

13. а) $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 3}};$

б) $\int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{x^3 + 4}) dx}{x^4 + 2x + 1};$

14. а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln^3 x}};$

б) $\int_1^{\infty} \frac{(3 - \cos 2x) dx}{\sqrt[3]{x^2 + 5}};$

15. а) $\int_2^{\infty} (x+1) \cos 2x dx;$

б) $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x dx}{x^2 + 2};$

16.a) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x^2 + 2x}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(2x + x^2)dx}{\sqrt[3]{x^5 + 3x + 1}}$;
17.a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(1 + \sin 2x)dx}{\sqrt{x^3 + 3}}$;
18.a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(5 + \ln x)}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sin^2 2x}$;
19.a) $\int_4^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \cos^4 3x}$;
20.a) $\int_1^{\infty} e^{2x} \cos 4x dx$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[5]{x^7 + 2x - 1}}$;
21.a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(3x^2 + 5)dx}{x^4 + x^3 + 2}$;
22.a) $\int_3^{\infty} \frac{(2 \ln x - 3) dx}{x\sqrt{\ln x}}$	б) $\int_1^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{\sqrt[4]{x^5 - 2x^3 + 3}}$;
23.a) $\int_3^{\infty} \frac{(5 + \ln(x-2))dx}{x-2}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2 \sqrt[3]{x+1} + 2}$;
24.a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5 dx}{x^6 + 2}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{\arctg 2x dx}{x^2 \sqrt[5]{x+1}}$;
25.a) $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 3x + 5}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(4 + \cos \pi x) dx}{\sqrt[7]{x^5 + x^2 + 8}}$;
26.a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{5 + 3 \sin x}$;	б) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 2x)}$;
27.a) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{\ln x - 1}}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(3 + \sin 2x) dx}{\sqrt[3]{x^2 + x + 2}}$;
28.a) $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{\cos 2\pi x dx}{x^5 + 2x + 2}$;
29.a) $\int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{3x+2}} dx}{\sqrt{3x+2}}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(x^2 + 100x + 2)dx}{x^5 + 2x^3 - 12}$;
30.a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 27}$;	б) $\int_1^{\infty} \frac{(2x + \sqrt{x^3}) dx}{x^2 + 2x\sqrt{x} + 1}$;

Задача 3.16. а) Обчислити невласний інтеграл 2 роду;
 б) Дослідити збіжність інтегралу (ознака порівняння).

1. а) $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2} dx$;

б) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1} dx$;

$$2. \text{ a) } \int_0^1 \ln x \, dx;$$

$$3. \text{ a) } \int_2^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} \, dx;$$

$$4. \text{ a) } \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{x}{81x^4-18x^2+1} \, dx;$$

$$5. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} \, dx;$$

$$6. \text{ a) } \int_{1.5}^2 \frac{1}{(2-x)\ln^3(2-x)} \, dx;$$

$$7. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} \, dx;$$

$$8. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx;$$

$$9. \text{ a) } \int_0^2 \frac{x}{\sqrt[5]{9-x^2}} \, dx;$$

$$10. \text{ a) } \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx;$$

$$11. \text{ a) } \int_1^2 \frac{1}{x^2-4x+4} \, dx;$$

$$12. \text{ a) } \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}} \, dx;$$

$$13. \text{ a) } \int_0^1 \frac{1}{x^3-1} \, dx;$$

$$14. \text{ a) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \, dx;$$

$$15. \text{ a) } \int_0^1 \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \, dx;$$

$$16. \text{ a) } \int_0^1 \frac{1}{x^2(x-2)} \, dx;$$

$$17. \text{ a) } \int_3^4 \frac{x}{\sqrt[3]{x-3}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{e^x}{(x-3)^2} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^e \frac{\ln(x+1)}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}-1} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt[5]{x}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^5 \frac{\sin x}{(x-3)^2} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_9^{10} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(x-9)^5}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_4^6 \frac{x^2+7}{\sqrt{(x-4)^3}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x^2+x\sqrt{x}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_1^5 \frac{x+e^x}{(x-1)^2} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x+5}{\sqrt{1-x^4}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_{-1}^2 \frac{5-\sin x}{\sqrt{(x+1)^3}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{4+\cos x}{\sqrt[3]{x-2}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt[4]{1-x}} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_2^4 \frac{x^3+1}{(x-2)^2} \, dx;$$

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x^3-8}} \, dx;$$

$$18. \text{ a) } \int_2^5 \frac{x+5}{\sqrt{x^2-x-2}} dx;$$

$$19. \text{ a) } \int_0^1 \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$20. \text{ a) } \int_0^1 \frac{3^x}{1-9^x} dx;$$

$$21. \text{ a) } \int_{-1}^1 \frac{2+x}{x^2-1} dx;$$

$$22. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$23. \text{ a) } \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx;$$

$$24. \text{ a) } \int_4^5 \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}} dx;$$

$$25. \text{ a) } \int_0^3 \frac{4x^2}{\sqrt[5]{27-x^3}} dx;$$

$$26. \text{ a) } \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt[5]{\cos^3 2x}} dx;$$

$$27. \text{ a) } \int_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x-12} dx;$$

$$28. \text{ a) } \int_5^6 \frac{x}{\sqrt[3]{25-x^2}} dx;$$

$$29. \text{ a) } \int_0^1 \frac{x}{(x-2)^2} dx;$$

$$30. \text{ a) } \int_3^4 \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^3 \frac{x^2-x+1}{x^2\sqrt{x^4-1}} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^5 \frac{1}{\sqrt[4]{10x-25-x^2}} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x^2)^5}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\arccos x}{x^2\sqrt{x+5}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\cos^4 x}{x^2\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{б) } \int_3^5 \frac{\sin x+4}{(x-3)^4} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^{x^2}-1}} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{\cos^2 3x}{\sqrt{4-x^2}} dx;$$

$$\text{б) } \int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{(x-1)^5}} dx;$$

$$\text{б) } \int_3^4 \frac{e^x+x^4}{(x-3)^6} dx;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^0 \frac{2+\cos x}{\sqrt{(2+x)^3}} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt[4]{1-x}} dx;$$

Розділ 4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Теорія: [1, гл.6], [2, гл.12], [3, гл.11].

Методика розв'язання: [4, том 1, гл.8], [5, гл.6].

1. Частинні похідні та диференціали.

Задача 4.1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$1. z = \left(\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x}}{y^2} \right)^{\operatorname{arccos}(2y-x)} ;$$

$$16. z = \left(\sin \frac{\sqrt{x}}{\cos y} \right)^{\operatorname{arctg}(y^2-x)} ;$$

$$2. z = \left(\ln \left(2x - \frac{1}{y} \right) \right)^{\operatorname{tg}^2(\sqrt{xy})} ;$$

$$17. z = \left(\operatorname{tg} (2 \sin x - xy) \right)^{\ln \left(\frac{y}{x} \right)} ;$$

$$3. z = \left(\sin \frac{\sqrt[5]{y^2}}{2x} \right)^{\operatorname{arctg}(3xy-x)} ;$$

$$18. z = \left(\operatorname{arcsin} \frac{x-y}{2} \right)^{\cos^2(2y)} ;$$

$$4. z = \left(\frac{\sqrt{xy+y}}{y^2} \right)^{\cos(a+xy)} ;$$

$$19. z = \left(\sin \left(x + \frac{1}{xy} \right) \right)^{\operatorname{arctg}(y+x)}$$

$$5. z = \left(\operatorname{tg} (1+xy) \right)^{\ln(x+\sqrt{y})} ;$$

$$20. z = \left(\cos \frac{x-3}{y^2} \right)^{\operatorname{ctg}^3(2yx)} ;$$

$$6. z = \left(\ln (x^2 + y^2) \right)^{\operatorname{arccos} \left(\frac{x}{y} \right)} ;$$

$$21. z = \left(\operatorname{arcsin} \sqrt{2-xy} \right)^{\operatorname{ctg}(a-x)} ;$$

$$7. z = \left(\sin \frac{2x}{y} \right)^{\operatorname{ch}^3(y-x)} ;$$

$$22. z = \left(\ln \frac{x}{y^4} \right)^{\operatorname{arctg}(2y-\sin x)}$$

$$8. z = \left(\ln \sqrt{y-x} \right)^{\operatorname{arctg} \left(y - \frac{\pi}{x} \right)} ;$$

$$23. z = \left(\cos (x^4 + y^4) \right)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}xy}} ;$$

$$9. z = \left(\operatorname{tg} (x + \sqrt{xy}) \right)^{\cos^4(y-4x)} ;$$

$$24. z = \left(\ln \frac{y+x}{y-x} \right)^{\cos(4x)} ;$$

$$10. z = \left(\ln \frac{\sqrt{x}}{2^y} \right)^{\sin(2yx)} ;$$

$$25. z = \left(\frac{4x}{\operatorname{tgy}} \right)^{\operatorname{arcsin}(2y)}$$

$$11. z = \left(\operatorname{arcsin} \frac{x}{y^2+1} \right)^{\ln^2(y-x)} ;$$

$$26. z = \left(\ln \frac{\sqrt[5]{x}}{y} \right)^{\operatorname{arctg}(y+x)}$$

$$12. z = \left(\cos (2\sqrt{xy} + 3x) \right)^{\operatorname{arcsin}(3yx)} ;$$

$$27. z = \left(\cos \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)^{\ln(2y)}$$

$$13. z = \left(\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x+y}}{y} \right)^{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)} ;$$

$$28. z = \left(\sin (\sqrt{xy} + 2) \right)^{\operatorname{arctg}(y^2-x)} ;$$

$$14. z = \left(\cos \frac{x+y}{\sqrt[3]{y}} \right)^{\operatorname{arcsin}(1-x-y)}$$

$$29. z = \left(\operatorname{ctg}(x-y) \right)^{\operatorname{arccos} \left(\frac{x}{y} \right)} ;$$

$$15. z = \left(xy + \frac{1}{xy} \right)^{\ln(2y - \sin x)} ;$$

$$30. z = \left(\operatorname{ctg} \frac{y}{2x} \right)^{\arccos(x)} ;$$

Задача 4.2. Знайти частинні похідні складної функції.

1. $w = x^4 y^3 z$, якщо $x = t, y = t^2, z = \sin t$, $w'_t - ?$.

2. $w = x^2 - y^4$, якщо $x = u \cos v, y = u \sin v$, $w'_u, w'_v - ?$.

3. $w = x^2 + xy + y^2$, якщо $x = \cos t, y = \sin t$, $w'_t - ?$.

4. $w = \cos(2t + 4x^2 - y)$, якщо $x = \frac{1}{t}, y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$, $w'_t - ?$.

5. $w = x^2 y^4$, якщо $x = ue^v, y = ve^u$, $w'_u, w'_v - ?$.

6. $w = y^4 \sin x$, якщо $x = u \ln v, y = v \ln u$, $w'_u, w'_v - ?$.

7. $w = x^2 \ln y$, якщо $x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v$, $w'_u, w'_v - ?$.

8. $w = x^5 y - y^4 x$, якщо $x = u \cos v, y = u \sin v$, $w'_u, w'_v - ?$.

9. $w = \cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$, якщо $x = u \cos v, y = \frac{u^2}{v}$, $w'_u, w'_v - ?$.

10. $w = x^y - y^x$, якщо $x = u^2 + v^3, y = u^2 - v^2$, $w'_u, w'_v - ?$.

11. $w = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}$, якщо $x = t^5 - 1, y = e^{1+2t}$, $w'_t - ?$.

12. $w = xy \cdot \operatorname{arctg} xy$, якщо $x = t^2 + 1, y = t^3$, $w'_t - ?$.

13. $w = x^2 y^3$, якщо $x = \arcsin \frac{u}{v}, y = \sqrt{v^2 - u^2}$, $w'_u, w'_v - ?$.

14. $w = x \sin y + y \cos x$, якщо $x = \frac{u}{v}, y = uv$, $w'_u, w'_v - ?$.

15. $w = e^{xy} \sqrt{1-y}$, якщо $x = u \sin v, y = u^2$, $w'_u, w'_v - ?$.

16. $w = y^x \cdot x^{\frac{3}{2}}$, якщо $x = \sqrt{2t+3}, y = t \cos 2t$, $w'_t - ?$.

17. $w = xyz^3$, якщо $x = 2t^2 + 4, y = \ln^2 t, z = \operatorname{tg} t$, $w'_t - ?$.

18. $w = \sqrt{u-v}$, якщо $u = \sin \frac{x}{y}, v = \sqrt{\frac{x}{y}}$, $w'_x, w'_y - ?$.

19. $w = \operatorname{tg} x^2 y$, якщо $x = u \cdot \operatorname{tg} v, y = v \cdot \operatorname{tg} u$, $w'_u, w'_v - ?$.

20. $w = x^4 3^y$, якщо $x = u - \sin v, y = u + \cos v$, $w'_u, w'_v - ?$.

21. $w = 2^{\frac{1}{x+y}}$, якщо $x = ue^v, y = ve^u$, $w'_u, w'_v - ?$.

22. $w = \arccos \sqrt{x+2y}$, якщо $x = \frac{u}{v}, y = 3u - 2v$, $w'_u, w'_v - ?$.

23. $w = \ln(\sin y + \cos x)$, ЯКЩО $x = u \cos v$, $y = \frac{u^2}{v}$, $w'_u, w'_v - ?$.
24. $w = \sin x^2 y$, ЯКЩО $x = u2^v$, $y = v \operatorname{ctgu}$, $w'_u, w'_v - ?$.
25. $w = \cos\left(\frac{1}{x-y}\right)$, ЯКЩО $x = u - \sin v$, $y = u + \cos v$, $w'_u, w'_v - ?$.
26. $w = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, ЯКЩО $x = e^{2t}$, $y = \ln(5t + 7)$, $w'_t - ?$.
27. $w = \sin^3(5x - 9y)$, ЯКЩО $x = v^2 - \sqrt[3]{u}$, $y = v \cdot \operatorname{arctgu}$, $w'_u, w'_v - ?$.
28. $w = x^2 \ln y$, ЯКЩО $x = \frac{v}{u}$, $y = u^2 + v^4$, $w'_u, w'_v - ?$.
29. $w = \operatorname{arc} \sin^2 xy$, ЯКЩО $x = u \cos v$, $y = \frac{u^2}{v}$, $w'_u, w'_v - ?$.
30. $w = \sin xy + \cos \frac{x}{y}$, ЯКЩО $x = ue^{2v}$, $y = v \operatorname{ctgu}$, $w'_u, w'_v - ?$.

Задача 4.3. Наближено обчислити:

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $(1,03)^{2,04}$. | 11. $\ln 2,72 + (1,02)^{2,72}$ | 21. $(1,94)^2 e^{0,13}$ |
| 2. $\sqrt{(4,03)^2 + (2,94)^2}$. | 12. $(1,2 + 1,01)e^{1,2 \cdot 1,01}$. | 22. $5,02^{2,01}$. |
| 3. $\frac{\sqrt[3]{7,1+1}}{\sqrt{9,1}}$. | 13. $\sin^2 29^0 \cdot \operatorname{tg} 46^0$. | 23. $e^{1,14+1,11}$. |
| 4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,98}{1,02} - 1\right)$. | 14. $\ln\left(\sqrt[3]{0,99} + \sqrt[4]{1,02} - 1\right)$. | 24. $\sqrt{5,1^2 + 4,05^2}$. |
| 5. $(2,1)^{3,3}$. | 15. $(1,03)^{2,02} - \ln 1,03$. | 25. $\operatorname{arctg} \frac{0,98}{1,03}$. |
| 6. $\sin 32^0 \cdot \cos 61^0$. | 16. $\sqrt{2,01^2 + 2 \cdot 0,01 \cdot 15,02}$. | 26. $\sqrt{(1,01)^3 + (2,02)^3}$. |
| 7. $\frac{\sqrt[3]{4,1^2 + 11,2}}{\sqrt{2 \cdot 3,1^2 - 3 \cdot 2,2^2 + 3}}$. | 17. $\cos 59^0 \cdot \operatorname{ctg} 46^0$. | 27. |
| 8. $\ln \frac{e+0,1}{1,01}$. | 18. $\frac{4,4}{3,3} + \frac{3,3}{4,4}$. | 28. $(3,1)^{2,4}$. |
| 9. $\sqrt[3]{2 \cdot 2,02^2 + 1,03}$. | 19. $\sqrt[3]{4,08^2 - 2,05^3}$. | 29. $\sin 37^0 + \cos 62^0$. |
| 10. $(2,03)^2 (3,04)^3$. | 20. $\sin^2(61^0) \cos 32^0$. | 30. $e^{1,05} \cos 46^0$. |

Задача 4.4. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$:

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|--|
| 1. $z = (x - y)e^{xy}$; | 11. $z = \frac{y^3}{3x}$; | 21. $z = (x^2 + y^2)\sin\frac{x}{y}$; |
| 2. $z = (x + 4y)2^{x-y}$; | 12. $z = \frac{x}{x-y}$; | 22. $z = (x^2 - y^2)\cos\frac{y}{x}$; |
| 3. $z = x^4 y^3 + \frac{x}{y}$; | 13. $z = e^{x^2 - y^2}$; | 23. $z = (4xy + y)\cos(xy)$; |
| 4. $z = y\sin(3x + y)$; | 14. $z = (x - y)e^{x^2 - y}$; | 24. $z = xy\sin(x - y)$; |
| 5. $z = x^2 e^{xy}$; | 15. $z = (x - 2y^2)e^{x-y}$; | 25. $z = (x^2 + y^2)\sin\frac{x}{y}$; |
| 6. $z = xe^{x-y}$; | 16. $z = \cos^2(x - 4y)$; | 26. $z = \frac{\cos x}{\ln(xy)}$; |
| 7. $(x + 2y)\sin(xy)$; | 17. $z = xy^6 - \cos(x^4 y^3)$; | 27. $z = (x + y)\sin(x - y)$; |
| 8. $z = \cos^2(x - 4y)$; | 18. $z = tg^2(y - 3x)$; | 28. $z = y\ln(x + y)$; |
| 9. $z = x\cos(x - y)$; | 19. $z = (x + y)e^{\frac{x}{y}}$; | 29. $z = (x - 5y)e^{3x-6y}$; |
| 10. $z = \frac{y}{x}$; | 20. $z = \frac{2x}{y-1}$; | 30. $z = \frac{y}{x} + x^4\sqrt{y}$; |

2. Дотична площина та нормаль до поверхні.

Задача 4.5. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до неявно заданої поверхні в точці M_0 :

- $(x - 5)^2 + y^2 - (z + 1)^2 = 9, \quad M_0(4, 3, 0).$
- $xy^2 + x^3z + z^2y = 71, \quad M_0(1, 8, -1).$
- $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4, \quad M_0(6, 2, 3).$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 2yz - xz = 49, \quad M_0(0, 1, -8).$
- $x^2y + z^3 = 12, \quad M_0(2, 1, 2).$
- $xy + yz + zx = -4, \quad M_0(1, 2, -2).$
- $x^2y + 3xy - 2x + \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad M_0\left(\frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}\right).$
- $x^2 + y^2 - xz - yz = 0, \quad M_0(0, 2, 2).$
- $x^2z^3 - \sqrt{x^3y} = 0, \quad M_0(2, 2, 1).$

10. $3x - z^2 + 3\ln y + 2 = 0, \quad M_0(0, 1, \sqrt{2}).$
11. $\ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2} = x - 1, \quad M_0(0, 0, 1).$
12. $\arcsin \frac{x}{y} + z^2 = 0, \quad M_0(0, 2, 0).$
13. $\operatorname{tg} x - x + 2 \sin y + z + \operatorname{ctg} z = 3, \quad M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right).$
14. $xy - \frac{x}{y} = yz + \frac{1}{2}, \quad M_0(1, -1, 2).$
15. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{2}z^2 = 8, \quad M_0(1, -1, 2).$
16. $x\sqrt{y} + (z + y)\sqrt{x} = xz + 2, \quad M_0(1, 1, 1).$
17. $x^2 + y^2 - z^2 + 2yz + y - 2z = 2, \quad M_0(1, 1, 1).$
18. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x - z = 0, \quad M_0(1, 1, 1).$
19. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$
20. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, \quad M_0(1, 2, 1).$
21. $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x - 8 = 0, \quad M_0(-1, 1, 2).$
22. $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y - 13 = 0, \quad M_0(2, 1, -1).$
23. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = -4, \quad M_0(2, 1, -1).$
24. $x^2 + z^2 - 5yz + 3y - 46 = 0, \quad M_0(1, 2, -3).$
25. $x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y - 13 = 0, \quad M_0(3, 1, 2).$
26. $4y^2 - z^2 + 4yx - xz + 3z = 9, \quad M_0(1, -2, 1).$
27. $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3, \quad M_0(1, 2, 1).$
28. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14, \quad M_0(3, 1, 4).$
29. $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4, \quad M_0(1, 1, 2).$
30. $x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x + 5 = 0, \quad M_0(-2, 1, 0).$

3. Екстремуми функцій багатьох змінних.

Задача 4.6. Дослідити функцію на екстремум:

1. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$
2. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$
3. $z = xy^2(1 - x - y).$
4. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$
16. $z = (x - y + 1)^2.$
17. $z = xy \ln(x^2 + y^2).$
18. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$
19. $z = y^2 x^3(4 - y - x).$

5. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. 20. $z = e^{x+2y} (x^2 - xy + 2y^2)$.
6. $z = (x^2 + y) \sqrt{e^y}$. 21. $z = x^2 y (2 - x + y)$.
7. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$. 22. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.
8. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. 23. $z = (5x + 7y - 25) e^{-(x^2 + xy + y^2)}$.
9. $z = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$. 24. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
10. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. 25. $z = 2x + 2y - x^2 - y^2$.
11. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$. 26. $z = 4xy + \frac{5}{x} + \frac{6}{y}$.
12. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. 27. $z = x^3 + y^3 - 3\ln x - 54\ln y$.
13. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. 28. $z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y$.
14. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. 29. $z = -3x^4 - 3y^4 + 12x + 12y$.
15. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$. 30. $z = 3xy + \frac{7}{x} + \frac{9}{y}$.

Задача 4.7. Знайти точки умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови зв'язку $\varphi(x, y) = c$.

№	$z = f(x, y)$	$\varphi(x, y) = c$	№	$z = f(x, y)$	$\varphi(x, y) = c$
1	$z = \frac{xy}{5} + \frac{x}{6} - \frac{y}{6}$,	$x^2 + y^2 = 1$, $x < 0, y > 0$	16	$z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$,	$x^2 + y^2 = 1$
2	$z = \frac{5xy}{2} - 3x - 3y$,	$x^2 + y^2 = 1$, $x < 0, y < 0$	17	$z = 2xy - 3x$	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$
3	$z = -\frac{xy}{3} + \frac{x}{7} - \frac{y}{7}$,	$x^2 + y^2 = 1$, $x > 0, y < 0$	18	$z = x^{-3} + \frac{3}{2}y^{-8}$,	$x^2 + 4y^2 = 5$, $x > 0, y > 0$
4	$z = \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{y^5 \sqrt[3]{y}}$,	$x^2 + 2y^4 = 3$, $x > 0, y > 0$	19	$z = x^{\frac{5}{8}} - \frac{25}{6}y^{-\frac{3}{4}}$,	$x^2 + 5y^2 = 6$
5	$z = x^2 - y^2$,	$2x - y = 3$	20	$z = \frac{22}{7}x^7 + y^{11}$,	$x^3 + \frac{1}{2}y^3 = \frac{3}{2}$, $x > 0, y > 0$
6	$z = xy^2$,	$x + 2y = 1$	21	$z = 6x^{-5} + y^{-24}$,	$5x^2 + 2y^4 = 7$, $x > 0, y > 0$
7	$z = \cos^2 x + \cos^2 y$,	$x - y = \frac{\pi}{4}$	22	$z = e^{\frac{x}{2}} (x + y^2)$	$x - 2y = 1$
8	$z = 5 - 3x - 4y$,	$x^2 + y^2 = 25$	23	$z = (x - 2)^2 + 2y^2$,	$x - 3y = 5$
9	$z = 1 - 4x - 8y$,	$x^2 - 8y^2 = 8$	24	$z = xy(x + y)$,	$x - y = 1$

10	$z = x^2 + xy + y^2,$	$x^2 + y^2 = 1$	25	$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$	$x^2 + y^2 = 1$
11	$z = 2x^2 + 12xy + y^2,$	$x^2 + 4y^2 = 25$	26	$z = xy(x - y),$	$x + y = 1$
12	$z = x^2 + y^2,$	$3x + 2y = 6$	27	$z = 4x^2 + 4xy - 2y^2 + 1,$	$2x + y = 2$
13	$z = xy,$	$x + y = 1$	28	$z = (x - 2)^2 - 2y^2,$	$x^2 + y^2 = 4$
14	$z = 2x^2 + 6xy + 2y^2 - 1,$	$4x^2 + y^2 = 25$	29	$z = \frac{7}{10}x^5 + y^7,$	$x^3 + 2y^3 = 3,$ $x > 0, y > 0$
15	$z = 2x + y,$	$x^3 + y^2 = 1$	30	$z = -\frac{7}{3}x^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{y^{\frac{5}{3}}\sqrt{y^3}},$	$7x^2 + 4y^4 = 11,$ $x > 0, y > 0$

Задача 4.8. Знайти найбільше та найменше значення функції в заданій області:

- $z = x^2 - xy + y^2 - 4x, \quad x = 0, y = 0, 2x + 3y = 12.$
- $z = x^2 + 3y^2 + x - y, \quad x = 1, y = 1, x + y = 1.$
- $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$
- $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad x = 0, y = 0, x + y = 3.$
- $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \quad x^2 + y^2 \leq 25.$
- $z = x^2 + y^2 + xy, \quad |x| + |y| \leq 1.$
- $z = 4x^2 + y^2 - 2y, \quad x = 0, y = 0, y - x = 1.$
- $z = xy - 2x - y, \quad x = 0, x = 3, y = 0, y = 4.$
- $z = \frac{x^2}{2} - xy, \quad y = \frac{x^2}{3}, y = 3.$
- $z = 2x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 16.$
- $z = -x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 9.$
- $z = x^2 - y^2, \quad |x| + |y| \leq 2.$
- $z = x^2 + y^2 + 2xy, \quad x = 0, y = 0, x + y \leq 3.$
- $z = 2y + x, \quad y \geq x^2, y - 2x \leq 3.$
- $z = y^2 - 2x^2, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 100.$
- $z = x^2 + y^2 - xy + 1, \quad y \geq x^2 - 1, y \leq 4.$
- $z = 2x + y - xy, \quad x \in [0, 4], y \in [0, 4].$
- $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad x \in [0, 1], y \in [0, 2].$
- $z = x^2 + y^2 - xy + x + y, \quad x = 0, y = 0, x + y = -3.$
- $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, \quad x \in [0, 2], y \in [-1, 1].$
- $z = x - x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 9.$

22. $z = 5x - 3y, \quad y \geq x, \quad y \geq -x, \quad y \leq 4.$
23. $z = (x - y^2)(x - 1)^{\frac{2}{3}}, \quad x = 2, \quad x = y^2.$
24. $z = x^2 y(4 - x - y), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6.$
25. $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2 y}{6} - \frac{xy^2}{8}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$
26. $z = x^2 y - 5x^3 y - 9x^2 y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = (x - 1)^2.$
27. $z = x^2 + 2y^2 - x, \quad x^2 + y^2 \leq 100, \quad y \geq 0.$
28. $z = x^2 + x + y^2 - 4y - 1, \quad x \in [-1, 0], \quad y - x \leq 1.$
29. $z = 5x + 4y + 4, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$
30. $z = x^2 - 5y^2 - 2, \quad x \in [0, 2], \quad y - x \leq 0.$

Задача 4.9.

1. Які розміри прямокутного паралелепіпеду найбільшого об'єму, який вписано в кулю діаметром d .
2. Які мусять бути розміри прямокутної коробки (без верхньої кришки), яка має об'єм V з мінімальними витратами матеріалу?
3. Додатне число A розкласти на n додатних співмножників таким чином, що сума їх обернених величин була мінімальною.
4. Знайти розміри циліндричного сосуда найбільшої місткості з поверхнею S .
5. Сума ребер прямокутного паралелепіпеду дорівнює q . Знайти розміри паралелепіпеду найбільшого об'єму.
6. Знайти прямокутник відомого периметру $2p$, який обертанням навколо однієї з сторін утворює тіло обертання найбільшого об'єму.
7. Знайти конус обертання об'єму V з мінімальною повною поверхнею.
8. В на півкулю радіусу R вписано прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму. Знайти його розміри.
9. В даний прямий круговий конус з радіусом основи R та висотою h вписано прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму. Знайти його розміри.
10. В кулю діаметру d вписати циліндр з найменшою повною поверхнею.
11. Знайти розміри конусу найбільшого об'єму, якщо його бічна поверхня дорівнює S .
12. З усіх прямокутних трикутників з заданою площею S знайти той, де гіпотенуза має найменше значення.
13. Відоме додатне число a розкласти на три доданки таким чином, щоб сума їх квадратів була найменшою.

14. В еліпсоїд $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.
15. З усіх трикутників, які вписані в коло радіуса r , знайти той площа якого найбільша.
16. З усіх трикутників з основою a та кутом α при вершині знайти трикутник найбільшої площі.
17. Знайти трикутник відомого периметру $2p$, який при обертанні навколо однієї з сторін утворює тіло обертання найбільшого об'єму.
18. Знайти прямокутний паралелепіпед з довжиною діагоналей d , який має найбільший об'єм.
19. З усіх трикутників, які вписані в коло радіуса r , знайти той площа якого найбільша.
20. Знайти зовнішні розміри котла циліндричної форми з товщиною стінок k та об'ємом V таким чином, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу.
21. Знайти розміри конусу з найменшою бічною поверхнею за умови, що його об'єм дорівнює V .
22. На гіперболі $x^2 - y^2 = 4$ знайти точку, яка найменше віддалена від точки $A(0, 2)$.
23. В еліпс $x^2 + 3y^2 = 12$ вписати рівнобедрений трикутник з основою, яка паралельна більшій осі еліпсу таким чином, щоб площа трикутника була найбільшою.
24. На параболі $y^2 = 4x$ знайти точку, яка найменше віддалена від прямої $x - y + 4 = 0$.
25. Які розміри конічного шатра найбільшого об'єму із відомої кількості матеріалу площею S ?
26. В даний прямий круговий конус вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.
27. На параболі $y = 2x^2 + 1$ знайти точку яка найменше віддалена від точки $A(10, 0)$.
28. Знайти прямокутний трикутник найбільшої площі, якщо сума його катету та гіпотенузи дорівнює d .
29. В кулю радіуса r вписати циліндр найбільшого об'єму.
30. Знайти найменше значення суми m -ї та n -ї степені $m, n > 0$ двох додатних чисел, добуток яких дорівнює a .

Розділ 5. Диференціальні рівняння.

Теорія: [1, гл.8], [2, гл.11], [3, гл.13,14].

Методика розв'язання: [4, том 2, гл.14], [5, гл.10].

1. Диференціальні рівняння першого порядку.

Задача 5.1. Інтегрувати диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

1. $(y^2 - 1)(x + 2)dx - x^2 y dy = 0.$

2. $2x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0.$

3. $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0.$

4. $4^{x+4y} dy = x dx.$

5. $y' \sin x = y \ln y.$

6. $x e^{-2y} dx - \sqrt{x^4 - 1} dy = 0.$

7. $(1 + x^2)y^3 dx - (1 + y^2)x^3 dy = 0.$

8. $2x\sqrt{1 + y^2} dx + e^{-x^2} dy = 0.$

9. $y' = 2\sqrt{y-1} \sin x + y' \sin^2 x.$

10. $(y^2 \cos^3 x - y^2) dy = -(1 + y^3) \sin x \cos^2 x dx.$

11. $(y + 4x^2 y) y' = y^2 - 4.$

12. $y' \cos^2(e^x) + e^x y^3 = y e^x.$

13. $(x+1)y - \sqrt{x^2 + 1}(y^3 - 1)y' = 0.$

14. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$

15. $(y + e^x y) y' + \frac{1}{2} y^4 = \frac{1}{2}.$

16. $\sqrt{y} dx - \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x} dy = -y dx.$

17. $y' - \cos \frac{x}{2} = \sqrt{y} \cos \frac{x}{2}.$

18. $xy(1 + x^2) y' = 1 + y^2.$

19. $\sec^2 x \cdot \operatorname{tgy} dx + \sec^2 y \cdot \operatorname{tgx} dy = 0.$

20. $\operatorname{ctgy} dx - x \ln x dy = 0.$

21. $xy^3 dx + (x^2 - 1)(y^2 + 1) dy = 0.$

22. $xy - (x^2 + 1) y' = 0.$

23. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}.$

24. $e^{\sqrt{y}} y' - \sqrt{xy} = \sqrt{y}.$

25. $(x^2 y - x^2) dy = (xy^2 + y^2) dx.$

26. $\sin x dy - y \ln y dx = 0.$

27. $\sqrt{\frac{1-y^3}{x}} dx + 3y^2 \cos^2 \sqrt{x} dy = 0.$

28. $(4y + x^2 y) y' = \sec(y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$

29. $e^y (y' + 1) = 1.$

30. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^3(y-1)^3}{(x+1)y} = 0.$

Задача 5.2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння або звідного до нього.

1. $(x^2 - 4xy + y^2) dx + 2x^2 dy = 0.$

16. $3(x^3 + xy^2) y' = x^3 + 3x^2 y + 3y^3.$

2. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0.$
3. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$
4. $x^2y' = x^2 + xy + y^2.$
5. $(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0.$
6. $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0.$
7. $(6x + y - 1)dx + (4x + y - 2)dy = 0.$
8. $xdy - (\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx = 0.$
9. $(3x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0.$
10. $(3x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0.$
11. $2y - x = 2yy'.$
12. $xy' = y + \sqrt{4x^2 - y^2}, x > 0.$
13. $x' = \frac{x}{y} + 4\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}.$
14. $y \sin^2 \frac{x}{y} dx = \left(x \sin^2 \frac{x}{y} + y \cos^4 \frac{x}{y} \right) dy.$
15. $(x - y - \sqrt{xy})dx + \sqrt{xy} dy = 0.$
17. $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2 \right) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0.$
18. $(xy^3 - 2x^4)dy = (xy^3 - 2x^3y + y^4)dx.$
19. $\left(x \operatorname{ctg} \frac{x}{y} - y \right) dx + x dy = 0.$
20. $(x - 2)dx + (y - 2x + 1)dy = 0.$
21. $yx' = x + 2y\sqrt{\frac{x+y}{y}}.$
22. $(5x - 7y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0.$
23. $xy' - x \cos \frac{y}{x} - y = 0.$
24. $4x^2 + xy - 3y^2 + (y^2 + 2xy - 5x^2)y' = 0.$
25. $xdy = \left(1 + 2\sqrt{\ln \frac{y}{x}} \right) y dx.$
26. $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0.$
27. $(y^3 + 2x^2y)dx + (2x^3 + 2xy^2)dy = 0.$
28. $x^2yx' = x^3 + y(x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}.$
29. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$
30. $((x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2)dx = xydy.$

Задача 5.3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку.

1. $y' - y = x - 1, \quad y(0) = 1.$
2. $xy' - 2y + 3x^3 \sin 3x = 0, \quad y(\pi) = \pi^3.$
3. $y' + xy = x^3, \quad y(0) = -2.$
4. $y' \operatorname{arctg} x - y \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}^2 x, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$
5. $x \ln x \cdot y' + y = 2 \ln x, \quad y(e) = 0.$
6. $y' - 2xy = \cos x - 2x \sin x, \quad y(0) = 1.$
7. $y' + y \operatorname{tg} x = x \cos^2 x, \quad y(0) = 1.$

8. $xy' + y = x \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
9. $(2x - 4y^2)dy + y dx = 0, \quad y(1) = 1.$
10. $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0, \quad y(0) = -1.$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^2}, \quad y(1) = 1.$
12. $y dx + (2x - 10y^2)dy = 0, \quad y(0) = 1.$
13. $x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1, \quad y(1) = 1.$
14. $dx + (x - e^{-y} \sec^2 y)dy = 0, \quad y(2) = 0.$
15. $e^{x^2} dy + (2xye^{x^2} - x \sin x)dx = 0, \quad y(0) = 1.$
16. $y' + y \cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 1.$
17. $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x, \quad y(0) = 0.$
18. $y' \cos x + y \sin x = 3 \sin^2 x \cos^3 x, \quad y(\pi/4) = 5/4.$
19. $2xy' + y = 4\sqrt{x} \cos 2x, \quad y(\pi) = \pi.$
20. $xy' - 6y = 2x^4(e^x + 1), \quad y(1) = (e + 1)^2.$
21. $xy' - 2y = 2x^4 e^{x^2}, \quad y(1) = 2e.$
22. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x - x^2 \operatorname{ctg} x, \quad y(1) = 2.$
23. $x^2 y' = \frac{1}{1 + x^2} - 2xy, \quad y(1) = -\frac{\pi}{4}.$
24. $2\sqrt{x^2 + 1}(y - y') = xe^{-2x}, \quad y(0) = 1.$
25. $x^3 y' - xy \operatorname{tg} \frac{1}{x} + 2 \cos \frac{1}{x} = 0, \quad y\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\pi^2.$
26. $2\sqrt{x}y' - y = e^{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 2e.$
27. $(y' \sin x + 1) \cos x = y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$
28. $xy' = y + 2x \ln x, \quad y(1) = 1.$
29. $y' = \frac{y}{2(x+1)} + \frac{2\sqrt{x+1}}{\cos^2 2x}, \quad y(0) = 0.$
30. $y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}.$

Задача 5.4. Методом Бернуллі зінтегрувати диференціальне рівняння:

1. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$.
2. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 2xy^2$.
3. $xy' + y = y^2 \ln x$.
4. $(x^2 y^3 + xy)y' = 1$.
5. $3y' - y \sin x + 3y^4 \sin x = 0$.
6. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
7. $\cos x \cdot y' - y \sin x = y^4$.
8. $xy' + y = xy^2 \ln x$.
9. $y' + \frac{y}{x} = y^4(1-x^2)$.
10. $y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x$.
11. $y' + xy = y^2(\sin x + \cos x)$.
12. $(1+x^2)y' = xy + x^2 y^2$.
13. $xy dx + (x^2 + y^2 + 1)dy = 0$.
14. $(x^3 y - 3x^2 y + y^3)dx + 2x^3 dy = 0$.
15. $(x^2 + y^2 + 2x - 2y)dx + 2(y-1)dy = 0$.
16. $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$.
17. $8xy' - y = -\frac{1}{y^3 \sqrt{x+1}}$.
18. $(xy + x^2 y^3)y' = 1$.
19. $x^2 y' + 2x^3 y = y^2(1+2x^2)$.
20. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 16}$.
21. $2 \sin x \cdot y' + y \cos x = y^3(x \cos x - \sin x)$.
22. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.
23. $2y' = \frac{y}{x \ln x} + \frac{\ln x}{y}$.
24. $y' - \frac{y}{6x} = \frac{x\sqrt{x}}{3y^2 \sqrt{x^2 - 1}}$.
25. $xy' - 6y = 2x^4(e^x + 1)\sqrt{y}$.
26. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{\cos^3 x}{2y}$.
27. $2\sqrt{x^2 + 1}(y - y') = xy^3 e^{-2x}$.
28. $y' + 4y \operatorname{tg} 2x = 4\sqrt{y} \operatorname{ctg} 2x \cos 2x$.
29. $3xy^2 y' + y^3 - 2x = 0$.
30. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$.

Задача 5.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння в повних диференціалах:

1. $(2x \sin y - y^2 \sin x)dx + (x^2 \cos y + 2y \cos x + 1)dy = 0$.
2. $(x \ln y - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0$.
3. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$.
4. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0$.

5. $(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0.$
6. $(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$
7. $(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0.$
8. $(\cos(x + y^2) + 3y)dx + (2y \cos(x + y^2) + 3x)dy = 0.$
9. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$
10. $(4x - y)dx + (6y - x)dy = 0.$
11. $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 6y^2)dy = 0.$
12. $(2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 4y^3)dy = 0.$
13. $\left(x^3 + \frac{y}{x}\right)dx + (y^2 + \ln x)dy = 0.$
14. $(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0.$
15. $(\cos x + \ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + e^y\right)dy = 0.$
16. $(x + \arctgy)dx + \frac{x + y}{1 + y^2}dy = 0.$
17. $(3x^2y^3 + y^4)dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)dy = 0.$
18. $(e^x \sin y + tgy)dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0.$
19. $\left(\frac{2x}{y} - \frac{3y^2}{x^4}\right)dx + \left(\frac{2y}{x^3} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy = 0.$
20. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$
21. $\left(\frac{1}{1 + x^2} + 3x^2e^y\right)dx + (x^3e^y + 2)dy = 0.$
22. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$
23. $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0.$
24. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$
25. $\left(\sin y + y \sin y + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$
26. $\left(1 + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0.$
27. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$
28. $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0.$
29. $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0.$

$$30. \left(xe^x + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

2. Диференціальні рівняння, що дозволяють зниження порядку.

Задача 5.6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

- | | |
|---|--|
| 1. $xy'' + y' = 0.$ | 16. $2\sqrt{xy''} = \sqrt{1 - y'^2}.$ |
| 2. $xy'' = (1 + 2x^2)y'.$ | 17. $y' + 2xy'' = e^{\sqrt{x}}.$ |
| 3. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$ | 18. $xy'' = y' + 2x^3 \cos(x^2).$ |
| 4. $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0.$ | 19. $y' \ln x + y'' x \ln x = y'.$ |
| 5. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$ | 20. $x^2 y'' + xy' = 2 \ln x.$ |
| 6. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0.$ | 21. $xy'' = (2x^2 + 1)y'.$ |
| 7. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$ | 22. $y'' \cos x + y' \sin x = e^{\sin x} \cos^3 x.$ |
| 8. $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}.$ | 23. $y'' = 2\sqrt{y'} \cos x.$ |
| 9. $xy'' + y' + x = 0.$ | 24. $y''(1 - x^2) = 1 + xy', \quad x < 1.$ |
| 10. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x.$ | 25. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$ |
| 11. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0.$ | 26. $x^2 y'' + xy' = 1.$ |
| 12. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0.$ | 27. $2xy'y'' + x^2 y' = 0.$ |
| 13. $y'' \sin^2 x + y' \sin 2x = 1.$ | 28. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$ |
| 14. $xy'' = (1 + y'^2) \operatorname{arctg} y'.$ | 29. $y'' x \ln x = y'.$ |
| 15. $y'' - y' \operatorname{ctg} x + \sin^2 x = 0.$ | 30. $xy'' - y' = x^2 e^x.$ |

Задача 5.7. Знайти загальний розв'язок рівняння:

- | | |
|---|---|
| 1. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$ | 16. $y''y - (y')^2 = yy'.$ |
| 2. $2yy'' - y'^2 = 1.$ | 17. $3(yy')^2 \left((y')^2 + yy'' \right) = y'.$ |
| 3. $yy'' - y'^2 - y^2 \ln y = 0.$ | 18. $(y' - y'') \cos^2 y = (y')^2 \sin 2y.$ |
| 4. $yy'' - y' \left(2\sqrt{yy'} - y' \right) = 0.$ | 19. $y'' + 2\sqrt{y'(1-y')} = 0.$ |

5. $y''(y-1) - 2y'^2 = 0.$
6. $y'' = 1 + y'^2.$
7. $y'' \cdot y^3 = 1.$
8. $yy'' + y'^2 = 1.$
9. $yy'' - y'(1+y') = 0.$
10. $(y'')^2 = y'.$
11. $y'' = y'^2 - y.$
12. $yy'' - y'^2 = y^4.$
13. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$
14. $2yy'' = yy' + y'^2.$
15. $y''y = y'^2 \ln y'.$
20. $y''y = y'(1+(y')^2) \operatorname{arctg} y'.$
21. $(y')^2 + yy'' = 2yy'.$
22. $(y')^3 = y(y')^2 - y^2 y''.$
23. $y'' + 2(y')^2 = y'e^{-y}.$
24. $(y')^2(1+3\cos 2y) + y'' \sin 2y = 0.$
25. $y'' \sin y \cos y + y' \operatorname{ctg} y = (y')^2 \sin^2 y.$
26. $yy'' - (y')^2 = 2y^3 y'.$
27. $y'' = y' + (y')^3.$
28. $(y')^3 = (y')^2 - yy''.$
29. $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0.$
30. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2.$

3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

Задача 5.8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y'' - y' = x^2 + 1.$
2. $y'' - 3y' = x^3 - 9x.$
3. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$
4. $y'' - 2y' = 2 - x.$
5. $y'' + 4y = \cos 2x.$
6. $y'' + 9y = \sin 3x.$
7. $y'' - 2y' = x^2 - 2.$
8. $y''' - 7y'' + 6y' = x^2.$
9. $y''' - 4y' = x^2.$
10. $y'' + 2y' = x^2 + x + 1.$
11. $y'' - 3y' = x^3 + x^2 - x + 1.$
12. $y'' - 2y' = 5e^{2x}.$
13. $y'' + y = x \cos x.$
14. $y'' + 3y' = x + 3.$
15. $y'' + 4y' + 4 = xe^{-2x}.$
16. $y'' - 4y' = x^2 - 9.$
17. $y'' - 4y = 3e^{2x}.$
18. $y'' + y = x \sin x.$
19. $y'' + 4y' + 3y = 7e^{2x}.$
20. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x.$
21. $y''' - y = \sin x.$
22. $y'' - 2y' + y = 2e^x.$
23. $y'' - y' = 5xe^x.$
24. $y'' - 5y' + 6y = 12xe^{-x}.$
25. $y'' + 16y = 4 \cos 4x.$
26. $y'' + 3y' = x^3 - 2x + 1.$
27. $y'' + y = \cos x + 2 \sin x.$
28. $y'' + 4y = 2x \sin 2x.$
29. $y'' + 4y' = 11 - 2x.$
30. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}.$

Задача 5.9. Розв'язати задачу Коші:

1. $y'' - 5y' + 6y = \sin x + (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
2. $y'' + 9y = 3\cos 3x + 6e^{3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
3. $y'' - 4y' + 5y = x\cos x + 2x^2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
4. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x} + 10\sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
5. $y'' + y = 2\cos x - xe^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3 + xe^{3x}$, $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}$.
7. $y'' - 4y' + 4y = x + 13 - e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.
8. $y'' + 4y = 2x + 4\sin 2x + 4\cos 2x$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$.
9. $y'' - y' = x - 5e^{-x}(\sin x + \cos x)$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$.
10. $y'' - 2y' + 2y = x - 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi$.
11. $y'' + 4y = x \sin^2 x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
12. $y'' - 8y' + 16y = 18xe^{4x} + 40\cos 2x + 20\sin 2x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 13$.
13. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(12\sin 3x - 6\cos 3x) + e^{-x}(24 - 18x)$, $y(0) = y'(0) = 3$.
14. $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}(5\cos 5x + 311\sin 5x) - e^{-3x}(12x + 6)$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -17$.
15. $y'' - 4y' + 3y = (10 - 8x)e^x + 102e^{-2x}\sin 3x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -13$.
16. $y'' - 7y' + 10y = (12x + 4)e^{5x} - e^{4x}(6\cos 2x + 22\sin 2x)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 24$.
17. $y'' + 4y' + 4y = (10 - 18x)e^{-2x} - 52\cos 4x - 36\sin 4x$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -17$.
18. $y'' - 8y' + 25y = (13x + 22)e^{2x} + e^{4x}(12\cos 3x - 6\sin 3x)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 26$.
19. $y'' - 5y' + 6y = (6x + 5)e^{3x} - 580e^{-3x}\cos 2x$, $y(0) = 11$, $y'(0) = -66$.
20. $y'' - 6y' + 10y = (6x + 2)e^{2x} - e^{3x}(6\cos x + 2\sin x)$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 12$.
21. $y'' + 8y' + 16y = (6x - 8)e^{-4x} + 90e^{5x}(2\cos 3x + \sin 3x)$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 28$.
22. $y'' + 10y' + 29y = (10x - 1)e^{-4x} + e^{-5x}(16\cos 2x - 12\sin 2x)$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 16$.
23. $y'' - y' - 12y = e^{4x}(12 - 14x + \cos x - 43\sin x)$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 17$.
24. $y'' + 2y' + y = (24x - 6)e^{-x} + e^{3x}(13\cos 5x - 129\sin 5x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 21$.
25. $y'' + 4y' + 20y = (82x - 21)e^{3x} + 16e^{-2x}(-\cos 4x + \sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
26. $y'' + 6y' + 13y = (5x + 12)e^{-2x} + e^{-3x}(8\cos 2x - 12\sin 2x)$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -10$.
27. $y'' - y' - 6y = -(20x + 11)e^{-2x} - 78e^x \sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$.
28. $y'' + 2y' - 8y = (24x + 2)e^{-4x} + e^{2x}(3\cos x - 19\sin x)$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -2$.
29. $y'' + 8y' + 17y = (2x - 2)e^{-3x} - e^{-4x}(8\cos x + 6\sin x)$, $y(0) = -8$, $y'(0) = 42$.
30. $y'' - 6y' + 9y = (30x + 10)e^{3x} + 2\cos 5x - 76\sin 5x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 25$.

Задача 5.10. Методом Лагранжа розв'язати диференціальні рівняння:

$$1. \quad y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$2. \quad y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}.$$

$$3. \quad y'' + y = \frac{1}{(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$4. \quad y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

$$5. \quad y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

$$6. \quad y'' + 4y = \sec 2x.$$

$$7. \quad y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x \sqrt{\sin x \cos x}}.$$

$$8. \quad y'' + y = \frac{x^2 + 2}{x^3}.$$

$$9. \quad y'' - 5y' + 6y = \frac{e^{4x}}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

$$10. \quad y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{-2x}}{\sin^3 x}.$$

$$11. \quad y'' - 4y' + 3y = \frac{2e^{3x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}.$$

$$12. \quad y'' + 3y' + 2y = -\sin(e^x).$$

$$13. \quad y'' - 5y' + 4y = -\frac{9e^{7x}}{(e^{3x} + 1)^2}.$$

$$14. \quad y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x} \frac{\cos 2x}{\sin^4 2x}.$$

$$15. \quad y'' - y' - 2y = -\frac{9e^{5x}}{e^{3x} - 1}.$$

$$16. \quad y'' - 4y' + 4y = \frac{2}{x} e^{2x} \ln x.$$

$$17. \quad y'' + y' - 6y = -50 \frac{e^{12x}}{(e^{10x} + 1)^2}.$$

$$18. \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}}.$$

$$19. \quad y'' - 10y' + 25y = e^{5x} \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}.$$

$$20. \quad y'' - 4y' + 13y = -\frac{18e^{2x}}{\cos^3 3x}.$$

$$21. \quad y'' - y = -\frac{8e^{3x}}{(1 - 4e^{4x})^2}.$$

$$22. \quad y'' + 8y' + 16y = e^{-4x} \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$23. \quad y'' + 2y' - 3y = 16e^{-7x} \cos(e^{-4x}).$$

$$24. \quad y'' - 6y' + 9y = \frac{3e^{3x}}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$25. \quad y'' + 2y' + y = -e^{-x} \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$26. \quad y'' + 6y' + 8y = -4 \sin(2e^{2x}).$$

$$27. \quad y'' - 12y' + 36y = -\frac{x+2}{x^3} e^{6x}.$$

$$28. \quad y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{x^2 + 4}.$$

$$29. \quad y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{3x}}{(e^x + 1)^2}.$$

$$30. \quad y'' + 6y' + 13y = \frac{12 \operatorname{ctg}^2 2x}{e^{3x} \sin^3 2x}.$$

4. Системи диференціальних рівнянь. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.

Задача 5.11. Розв'язати лінійну систему диференціальних рівнянь:

$$1. \begin{cases} x' = -y + t^2 + 6t + 1, \\ y' = x - 3t^2 + 3t + 1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = 3x + y + e^{2t}, \\ y' = -x - 5y + e^t. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x' = -5x + 2y + 40e^t, \\ y' = x - 6y + 9e^{-t}. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = 3x + 3y + 5e^{5t}, \\ y' = x + 5y - e^{5t}. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x' = 5x + 8y + 2e^{-t}, \\ y' = x + 3y + 3e^{-t}. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = 2x + 7y - 2\cos t - \sin t, \\ y' = x + 8y - \cos t. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x' = 5x + y - \cos t, \\ y' = x + 5y - 5\cos t - \sin t. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x' = 2x + 9y - 9\sin t, \\ y' = x + 10y - \cos t - 10\sin t. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x' = x - 16y - t + 1, \\ y' = x + 11y - t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x' = 3x - 5y + 5t, \\ y' = x + 9y - 9t + 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x' = -4x + 16y + 4\cos 2t, \\ y' = x + 2y - \cos 2t. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x' = -5x - 7y + 5\sin t, \\ y' = x + y - 2\cos t. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x' = -5x + 7y + 3e^t, \\ y' = x + y - e^t. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x' = x + y + t, \\ y' = x - 2y + 2t. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x' = -5x - y + e^t, \\ y' = x - 3y + e^{2t}. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x' = -x + 3y + 9 - 20t, \\ y' = -10x + 10y + 1. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x' = 2x + 9y - e^{4t}, \\ y' = -x - 4y + 12e^{4t}. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x' = -13x - 25y, \\ y' = 4x + 7y - 9t - 6. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x' = 6x - 15y + 3t + 5, \\ y' = 6x - 13y + t + 2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x' = 8x - 9y, \\ y' = 4x - 4y - 25e^{\frac{t}{3}}. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x' = 10x + 4y - 25e^{-t}, \\ y' = -9x - 2y. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x' = -11x - 4y + 20\cos 2t, \\ y' = 9x + y. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x' = -6x + 7y - 7\sin 2t, \\ y' = x + 2y + 2\cos 2t - 2\sin 2t. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x' = -2y + 3, \\ y' = 2x - 2t. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x' = x + y + \sin t, \\ y' = -x + y + \cos t. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x' = x - y + 2\sin t, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x' = 3x - y/2 - 3t^2 - t/2 + 3/2, \\ y' = 2y - 2t - 1. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = -2x + 2t. \end{cases}$$

Задача 5.12. Розв'язати лінійну систему диференціальних рівнянь:

$$1. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$16. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$2. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$17. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$3. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$18. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$4. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$19. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$5. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$20. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$6. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$21. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$7. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$22. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$8. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$23. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -13 & -36 & 6 \\ 4 & 11 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$9. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$24. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 4 \\ -6 & -6 & 8 \\ -15 & -8 & 10 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$10. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$25. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -13 & -46 & 8 \\ 5 & 18 & -3 \\ 5 & 20 & -3 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$11. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$26. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -11 & -32 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \\ -6 & -28 & 6 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$12. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$27. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -28 \\ 0 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & -17 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$13. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$28. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -4 \\ 31 & 14 & -22 \\ 23 & 8 & -13 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$14. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$29. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & -15 & 22 \\ 6 & -6 & 8 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$15. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

$$30. \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -18 & 6 & 26 \\ 18 & -7 & -27 \\ -17 & 6 & 25 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

Задача 5.13.

1. Знайти криві, у яких тангенс кута між дотичною та додатним напрямком OX прямо пропорційний ординаті точки дотику.
2. Знайти криві, у яких під нормаль в довільній точці є сталою p .
3. Знайти криві, для яких сума довжин відрізків нормалі (від точки дотику до осі OX) та під нормалі є сталою p .
4. Знайти криві, у яких відрізок дотичної, який розташований між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.
5. Знайти криву, для якої трикутник, який утворений OY , дотичною та радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений.
6. Знайти криву, під дотична якої є середнє арифметичне координат точки дотику.
7. Знайти криву, у якої відношення відрізка, який відсікається дотичною від осі OY , до відрізка, який відсікається нормаллю від осі OX , є стала k .
8. Знайти криву, у якої відношення відрізка, який відсікається нормаллю від осі OX , до радіус-вектору точки дотику є стала k .
9. Знайти криву, для якої трикутник, утворений нормаллю та осями координат, мав таку ж само площу, як трикутник, утворений дотичною, нормаллю та віссю OX .
10. Знайти криву, в кожній точці якої довжина відрізка від точки дотику до точки A – перетину дотичної з OX дорівнює відрізку OA .

11. Знайти криву, для якої площа трикутника, який утворений OX , дотичною та радіус-вектором точки дотику, є сталою a^2 .
12. Знайти криву, дотична якої відсікає від осі OY відрізок, який дорівнює сумі координат точки дотику.
13. Знайти криву, в кожній точці якої під нормаль є середнє арифметичне квадратів координат цієї точки.
14. Знайти криву, у якої відрізок, який відсікається нормаллю від осі OX , дорівнює $\frac{y^2}{x}$.
15. Знайти криву, у якої відрізок, який відсікається нормаллю від осі OY , дорівнює $\frac{x^2}{y}$.
16. Знайти криві, у яких відрізок, який відсікається дотичною від осі OY , дорівнює квадрату ординати точки дотику.
17. Знайти криві, для яких площа трикутника, який утворений дотичною, ординатою точки дотику та OX , є стала a^2 .
18. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника з задачі 17 варіанту, є сталою k .
19. Знайти криві, для яких відрізок осі OX , який відсікається дотичною та нормаллю в довільній точці, дорівнює $2b$.
20. Знайти криві, для яких абсциса точки перетину довільної дотичної з OX , вдвічі менша абсциси точки дотику.
21. Знайти криві, для яких точка перетину довільної дотичної з OX однаково віддалена від точки дотику та від початку координат.
22. Знайти криві, для яких відстань довільної дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.
23. Знайти криві, для яких площа трапеції, яка обмежена осями координат, дотичною та ординатою точки дотику, є сталою $3a^2$.
24. Визначити криву, під дотична якої в кожній точці пропорційна n -ї степені абсцисі цієї точки.
25. Знайти криві, якщо площа, обмежена кривою, віссю OX та довільною ординатою, дорівнює кубові цієї ординати.
26. Знайти криві, для яких відрізок, що відтинає дотична на осі OX , пропорційна квадратів абсциси точки дотику.
27. Знайти криві, що відстань від довільної дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.
28. Визначити криву, всі дотичні до якої проходять через початок координат.
29. Визначити криві, у яких під нормаль дорівнює різниці між радіус-вектором та абсцисою точки дотику.
30. Визначити криву, для якої відношення відрізка, утвореного

дотичною на осі OY , до відрізка, утвореного нормаллю на осі OX , є величина стала.

Задача 5.14.

1. Човен уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна $1,5$ м/с, швидкість його через 4 с є 1 м/с. Через який час швидкість зменшиться до 1 см/с?
2. Посудина об'ємом 20 л містить повітря (вважаємо 80% азоту та 20% кисню). В посудину втікає $0,1$ л азоту в сек., який неперервно перемішується, та витікає така ж кількість суміші. Через який час в посудині буде 99% азоту?
3. Швидкість розмноження бактерій пропорційна кількості бактерій в розглядуваній момент часу. Кількість бактерій подвоюється протягом 3 годин. В скільки разів збільшиться кількість бактерій протягом 9 годин?
4. Тіло охолоне за 10 хв. від 100° до 60° . Температура навколишнього повітря підтримується на рівні 20° . Коли тіло охолоне до 25° ?
5. Сповільнююча дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Диск, почавши обертання зі швидкістю 100 оберт./хв., після 1 хв. обертається зі швидкістю 60 оберт./хв. Знайти залежність кутової швидкості від часу.
6. В повітрі кімнати об'ємом 200 м³ міститься $0,15\%$ вуглекислого газу CO_2 . Вентилятор подає в хвилину 20 м³ повітря, яке містить $0,04\%$ CO_2 . Через який час кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться втричі?
7. Деяка речовина перетворюється в іншу речовину зі швидкістю, пропорційною кількості неперетвореної речовини. Кількість неперетвореної речовини через годину була $31,4$ г., через 3 години – $9,7$ г. Знайти залежність між кількістю неперетвореної речовини та часом.
8. В посудину, яка містить 1 кг. води за температури 20° , опущено алюмінієву заготовка масою $0,5$ кг. з питомою теплоємністю $0,2$ та температурою 75° . Через хвилину вода нагрілась на 2° . Коли температура води та заготовки будуть відрізнятись на 1° ? Втратами тепла на нагрів посудини зневажати.
9. В культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється протягом години, то в скільки разів вона збільшиться протягом $2,5$

годин?

10. Шмат металу з температурою a градусів розташовано в печі, температура якої на протязі години рівномірно підвищується від a до b градусів. За різниці температур печі та металу в T градусів метал нагрівається зі швидкістю kT градусів в хвилину. Знайти температуру металу через годину.
11. Парашутист спускається на парашуті. Сила ваги парашута $F_1 = mg$, а сила опору повітря $F_2 = kv^2$, $k - const$. Знайти швидкість v парашута через t_0 секунд після початку спуску.
12. За 30 днів розпалися 50% первинної кількості радіоактивної речовини. Через який час залишиться 1% від первинної речовини?
13. Матеріальна точка масою 1 г. рухається прямолінійно під дією сили, яка прямо пропорційна часу, який відраховується від моменту $t = 0$ та обернено пропорційна швидкості руху точки. В момент часу $t = 10$ с. швидкість становила 50 см/с., а сила – 4 Нм. Яка буде швидкість через хвилину після початку руху?
14. Куля входить в дошку товщиною 10 см. зі швидкістю 200 м/с, а виходить з дошки, пробивши її, зі швидкістю 80 м/с. Враховуючи, що сила опору дошки руху кулі пропорційна квадрату швидкості руху, знайти час руху кулі через дошку.
15. Артур Кларк в оповіданні «Сонячний вітер» (Wind from the Sun, 1963) описує космічний човен «Діана», який рухається під дією сонячного вітру з постійним прискоренням $0,001g = 0,0098 \text{ m/c}^2$. Припускаючи, що човен стартує зі стану рівноваги в $t = 0$ та одночасно випускає снаряд прямо вперед руху човна зі швидкістю однієї десятої швидкості світла $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/c}$. Через який час човен наздожене снаряд?
16. Водій-правопорушник стверджує, що він їхав зі швидкістю 40 км/год. Коли поліція перевірила авто, виявилось, що за цієї швидкості гальмівний шлях складає 13,7 метрів. Але довжина гальмівного сліду була 64 метри. Вважаючи вповільнення однаковим та постійним в обох випадках, знайти справжню швидкість авто до правопорушення.
17. Бомба скидається з гелікоптера на висоті 800 метрів. З поверхні землі, безпосередньо під гелікоптером, вистрелюється снаряд прямо вгору по бомбі через 2 сік. після скидання бомби. З якою початковою швидкістю потрібно вистрелити снаряд, що б він потрапив в бомбу на висоті 400 метрів.
18. Припустимо, що дівчина в 2120 році знайшла банківські документи про призначення штрафної пені в розмірі 30 дол. 100 років назад. Вважаючи, що прострочена пеня зростає експоненційно на 5% в рік неперервно, скільки дівчина повинна заплатити в 2120 році?
19. В сучасному світі нараховується приблизно 3300 різних людських

«мовних груп». Вважається, що всі вони походять з єдиної первинної мови і що мовна група розпадається на 1,5 мовної групи кожні 6 тисяч років. Знайти коли виникла первинна мова?

20. Деяке тіло охолоджується з 100° до 60° за 10 хвилин. Зважаючи, що температура навколишнього повітря 20° , знайти за який час температура тіла буде 25° .

В задачах 21-23 розглядається RC-ланцюг, який складається з опору R Ом, конденсатору ємністю C фарад ($Q(t)$ – заряд на конденсаторі), перемикача та джерела ЕРС $E(t)$:

21. Знайти заряд $Q(t)$ та силу струму $I(t)$ в ланцюгу, якщо $E(t) = E_0$ (постійна напруга) та перемикач замикає ланцюг в момент часу $t = 0$, тобто $Q(0) = 0$.
22. Припустимо в ланцюгу $R = 10$, $C = 0,02$, $Q(0) = 0$, $E(t) = 100e^{-5t}$. Знайти максимальне значення заряду на конденсаторі при $t \geq 0$.
23. Припустимо в ланцюгу $R = 200$, $C = 2,5 \cdot 10^{-4}$, $Q(0) = 0$, $E(t) = 100 \cos 120t$. Яка амплітуда струму в уставленому режимі коливань?

В задачах 24-30 розглядається RLC-ланцюг, який складається з опору R Ом, конденсатору ємністю C фарад ($Q(t)$ – заряд на конденсаторі), соленоїда L Гн, перемикача та джерела ЕРС $E(t)$:

24. В ланцюгу маємо $R = 30 \Omega$, $L = 10 \text{ Гн}$, $C = 0,02 \text{ Ф}$, $E(t) = 50 \sin 2t \text{ В}$. Знайти за яким законом змінюється сила струму $I(t)$ та знайти установлений режим періодичного струму.
25. В ланцюгу маємо $R = 200 \Omega$, $L = 5 \text{ Гн}$, $C = 0,001 \text{ Ф}$, $E(t) = 100 \sin 10t \text{ В}$. Знайти за яким законом змінюється сила струму $I(t)$ та знайти установлений режим періодичного струму.
26. В ланцюгу маємо $R = 50 \Omega$, $L = 5 \text{ Гн}$, $C = 0,005 \text{ Ф}$, $E(t) = 400 \sin 100t + 300 \cos 100t \text{ В}$. Знайти за яким законом змінюється сила струму $I(t)$ та знайти установлений режим періодичного струму.
27. В ланцюгу маємо $R = 16 \Omega$, $L = 2 \text{ Гн}$, $C = 0,02 \text{ Ф}$, $E(t) = 100 \text{ В}$. Знайти за яким законом змінюється сила струму $I(t)$, враховуючи початкові дані сили струму та заряду $I(0) = 0$, $Q(0) = 5$.
28. В ланцюгу маємо $R = 60 \Omega$, $L = 2 \text{ Гн}$, $C = 0,0025 \text{ Ф}$, $E(t) = 100e^{-t} \text{ В}$. Знайти за яким законом змінюється сила струму $I(t)$, враховуючи початкові дані сили струму та заряду $I(0) = 0$, $Q(0) = 0$.

29. Нехай в RLC-ланцюгу маємо опор резистора $R=0$ та напругу на вході $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Показати, що за деякої резонансної частоти будуть виникати необмежені коливання сили струму.
30. Довести, що за умов задачі 25 амплітуда I_0 установленого періодичного розв'язку диференціального рівняння сили струму максимальна за частоти $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Розділ 6. Ряди.

Теорія: [1, гл.9], [2, гл.16], [3, гл.10].

Методика розв'язання: [4, том 2, гл.13,15], [5, гл.9].

1. Числові ряди.

Задача 6.1. Користуючись ознакою порівняння, дослідити збіжність

ряду $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$:

$$1. a_n = \frac{1}{\sqrt{(n+3)(n^2+1)}};$$

$$16. a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1});$$

$$2. a_n = \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$17. a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)^4 \sqrt{n+1}};$$

$$3. a_n = \frac{3 + \cos n}{n^3 + 1};$$

$$18. a_n = n^2 \cdot \operatorname{tg}^5 \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$4. a_n = \frac{n \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n}}{\sqrt{3n^2+2}};$$

$$19. a_n = \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\right);$$

$$5. a_n = \ln \frac{n^3 + 3n^2}{n^3 + 1};$$

$$20. a_n = \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2)}{2^n+3};$$

$$6. a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^4+1} \sqrt{n+2}};$$

$$21. a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n \sqrt{\ln(n+2)}};$$

$$7. a_n = e^n \cos \frac{2\pi}{3^n};$$

$$22. a_n = \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

$$8. a_n = \arcsin \frac{\pi n}{n \sqrt[3]{n} + n - 1};$$

$$23. a_n = \left(e^{\operatorname{tg} \frac{1}{n}} - 1\right)^2;$$

$$9. a_n = \frac{2}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right);$$

$$24. a_n = \frac{n+2}{(\sqrt[3]{n+1})^2};$$

$$10. a_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n};$$

$$25. a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{n}};$$

$$11. a_n = \operatorname{arctg} \frac{n+1}{\sqrt[3]{2n^7+1}};$$

$$26. a_n = \frac{\cos \frac{1}{n^2}}{\sqrt[n]{a}};$$

$$12. a_n = \frac{1}{4^n - n^2};$$

$$27. a_n = \ln \frac{n^3+2}{n^3+1};$$

$$13. a_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+2n+3}};$$

$$28. a_n = \frac{\sqrt[5]{n}}{\ln n};$$

$$14. a_n = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{2^n};$$

$$29. a_n = \frac{1}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}};$$

$$15. a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n};$$

$$30. a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n};$$

Задача 6.2. Користуючись ознакою Д'аламбера, дослідити збіжність

ряду $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$:

$$1. a_n = \frac{7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n+1)}{1 \cdot 8 \cdot 27 \cdot \dots \cdot n^3};$$

$$16. a_n = \frac{n^n}{n! \cdot 2^n};$$

$$2. a_n = \frac{3^{2n} \cdot (n!)^3}{(3n)!};$$

$$17. a_n = \frac{(2n+1)!}{3^n n!};$$

$$3. a_n = \frac{2^n}{3 \cdot n!};$$

$$18. a_n = \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!};$$

$$4. a_n = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (5n-2)};$$

$$19. a_n = \frac{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)}{(n+1)!};$$

$$5. a_n = \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}};$$

$$20. a_n = \frac{n^n}{n!};$$

$$6. a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$21. a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n+3)};$$

$$7. a_n = \frac{n^{11}}{(n+1)!};$$

$$22. a_n = \frac{7^{2n}}{(n+1)!};$$

$$8. a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2};$$

$$23. a_n = \frac{n^{17}}{6^n};$$

$$\begin{array}{ll}
9. a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}; & 24. a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{n!}; \\
10. a_n = \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}; & 25. a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{3^n}; \\
11. a_n = \frac{1 \cdot 5 \dots (4n-3)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n+2)}; & 26. a_n = \frac{n4^n}{\sqrt{(n+2)!}}; \\
12. a_n = \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}; & 27. a_n = \frac{n^{16}+1}{n \cdot 3^n}; \\
13. a_n = \frac{7n^7+1}{5^n(n+1)!}; & 28. a_n = \frac{e^n}{(2n)!!}; \\
14. a_n = \frac{(2n+1)!!}{n! \cdot e^n}; & 29. a_n = \frac{n!}{(n+1)^n}; \\
15. a_n = \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n+1)}; & 30. a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n};
\end{array}$$

Задача 6.3. Користуючись ознакою Коші, дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n :$$

$$\begin{array}{ll}
1. a_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; & 16. a_n = \frac{1}{5^n} \left(\frac{n}{n+3} \right)^{n^2}; \\
2. a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}; & 17. a_n = \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2}; \\
3. a_n = \left(\frac{\pi n}{n+2} \right)^n; & 18. a_n = \sin^{2n} \frac{\pi}{n^5}; \\
4. a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{7}{\sqrt[6]{n}}; & 19. a_n = \frac{(2 - (-1)^n)^n}{n^2 2^n}; \\
5. a_n = \arcsin^n \left(\frac{2n}{3n+1} \right); & 20. a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+4} \right)^{n^2+1}; \\
6. a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{3/2}}; & 21. a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}; \\
7. a_n = 3^n \left(\frac{n+3}{n+4} \right)^{n^2}; & 22. a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}; \\
8. a_n = \frac{e^n}{e^{2n}+4}; & 23. a_n = \frac{n^2}{2^{n^2}};
\end{array}$$

$$9. a_n = \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n};$$

$$10. a_n = 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2};$$

$$11. a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{1}{2\sqrt{n+1}};$$

$$12. a_n = \frac{1}{(\ln(n+2))^n};$$

$$13. a_n = \left(\frac{n^2+6n+9}{4n^2-5n+7}\right)^n;$$

$$14. a_n = \left(\frac{99}{100}\right)^n \cdot n^9;$$

$$15. a_n = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6^n}\right)^n;$$

$$24. a_n = \frac{n^{10}}{(1,1)^n};$$

$$25. a_n = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{n^2};$$

$$26. a_n = \sin^n \left(\frac{2\pi n}{4n+1}\right);$$

$$27. a_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n;$$

$$28. a_n = \frac{n^n}{\ln^n(n+1)};$$

$$29. a_n = \frac{4^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}};$$

$$30. a_n = e^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$$

Задача 6.4. Користуючись інтегральною ознакою, дослідити збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$:

$$1. a_n = \frac{1}{n \ln^2(4n+1)};$$

$$2. a_n = \frac{1}{(3n+1) \ln(3n+2)};$$

$$3. a_n = \frac{e^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}};$$

$$4. a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2};$$

$$5. a_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[5]{\ln(n+2)}};$$

$$6. a_n = \frac{1}{(2n-1) \ln^2 n};$$

$$7. a_n = \frac{1}{(3n+1) \ln^2(5n+2)};$$

$$16. a_n = \frac{n^3}{\sqrt{1+n^8}};$$

$$17. a_n = \frac{\sqrt{\ln n}}{n};$$

$$18. a_n = \frac{e^n}{n^2};$$

$$19. a_n = \frac{n}{\sqrt[3]{(n^2+1)^4}};$$

$$20. a_n = \frac{1}{(2n-1) \ln(n+2)};$$

$$21. a_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+2)};$$

$$22. a_n = \frac{1}{(n+1) \sqrt{\ln(n+2)}};$$

$$8. a_n = \frac{\ln n}{n(\ln^2 n + 1)};$$

$$9. a_n = \frac{1}{(n+2)(\ln^2 n + 1)};$$

$$10. a_n = \frac{1}{(3n-1)\ln^2(2n+1)};$$

$$11. a_n = \frac{1}{(2n+1)\ln(n+2)};$$

$$12. a_n = \frac{\operatorname{arctg}^3 n}{1+n^2};$$

$$13. a_n = \frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}};$$

$$14. a_n = \frac{n}{\sqrt{4+9n^4}};$$

$$15. a_n = \frac{n}{e^{n^2}};$$

$$23. a_n = \frac{1}{(n+3)\ln^2(n+2)};$$

$$24. a_n = \frac{1}{(n+5)\ln(2n-1)};$$

$$25. a_n = \frac{1}{(n-1)\ln^2(2n+1)};$$

$$26. a_n = \frac{1}{(3n+5)(\ln^2 n + 1)};$$

$$27. a_n = \frac{1}{(2n-1)(\ln^2(n+1)+1)};$$

$$28. a_n = \frac{1}{n\ln^2(2n+1)};$$

$$29. a_n = \frac{1}{(2n+5)\ln^2(n+3)};$$

$$30. a_n = \frac{1}{(2n+3)\ln(2n+1)};$$

Задача 6.5. Користуючись ознакою Лейбніца та іншими ознаками, дослідити збіжність знакозмінного ряду $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$:

$$1. \text{ а) } a_n = (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n};$$

$$2. \text{ а) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^3+1}};$$

$$3. \text{ а) } a_n = \frac{(-n)^n}{(2n)!};$$

$$4. \text{ а) } a_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{1+n^2};$$

$$5. \text{ а) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)};$$

$$6. \text{ а) } a_n = (-1)^{n-1} \left(5^{\frac{1}{n}} - 1 \right);$$

$$7. \text{ а) } a_n = \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{\sqrt{n+2}};$$

$$\text{б) } a_n = (-1)^n \frac{2^n + n^3}{3^n + n^2};$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{n};$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right);$$

$$\text{б) } a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right) \frac{\sin n}{n};$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \arcsin \frac{\pi}{\sqrt{n}};$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n^4+8}};$$

$$\text{б) } a_n = (-1)^n \frac{\ln^2 n}{3^n};$$

8. a) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$;
9. a) $a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{3^n + 1}$;
10. a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$; б) $a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{(n+1)^n}$;
11. a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2 - 5n + 7}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^4 n}$;
12. a) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^6 + 8n^4 + 9}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{(2n)!}$;
13. a) $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+12}$; б) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)3^n}$;
14. a) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(n+7)\sqrt[5]{n+1}}$; б) $a_n = (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}} - 1 \right)$;
15. a) $a_n = \frac{(-1)^n (2n+5)}{(3n+7)\sqrt{n}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}} + 1}$;
16. a) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^3 + 3n^2 + 4}}$; б) $a_n = (-1)^n \arcsin \frac{1}{n^2}$;
17. a) $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^2 + 1}}{n+5}$; б) $a_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n^7}} \right)$;
18. a) $a_n = (-1)^n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$; б) $a_n = \frac{(-1)^n (n+1)!}{n^n}$;
19. a) $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{\sqrt[3]{n^{10} + 2}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n \operatorname{arctgn}}{n^2}$;
20. a) $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n\sqrt{n+2}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n 4^n}{5^n + 1}$;
21. a) $a_n = (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n+1} \right)^n$; б) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n^2 - \sqrt[3]{n}}$;
22. a) $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}(n+2)}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n n^2 2^n}{4^n + 1}$;
23. a) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(n+1)(2n+3)}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n n^4}{3^n}$;
24. a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n 4^n}{(n+1)!}$;
25. a) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4 + 2n + 1}}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n \cos^2 n}{n^2}$;

$$26. \text{ a) } a_n = \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[3]{n^4}};$$

$$\text{б) } a_n = (-1)^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2};$$

$$27. \text{ a) } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+9}};$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^n n^4 3^n}{n!};$$

$$28. \text{ a) } a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)};$$

$$\text{б) } a_n = (-1)^n \frac{7n-1}{4n^3+5};$$

$$29. \text{ a) } a_n = (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}} - 1 \right);$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n 10^n};$$

$$30. \text{ a) } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n+5}};$$

$$\text{б) } a_n = (-1)^n \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n;$$

2. Степеневі ряди.

Задача 6.6. а) Знайти область збіжності степеневого ряду.

б) Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$1. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3 x^2}.$$

$$2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \cdot x^n.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{4n}}.$$

$$3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! (x-1)^n}{3^{n^2}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{x}{5^n}.$$

$$4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-3)^n}{3n+2}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-(n+x^2)}.$$

$$5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{n^3 + x^2}.$$

$$6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}.$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx} + n^2}.$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5 + x^{10}}}.$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2 x^{2n}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{1+n^5 x^2}.$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{3^n (x-2)^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^3}.$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{n^2}.$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}.$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{(2n^2 - 5n)4^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n!}.$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n x e^{-nx}.$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n+1)3^n}.$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{3^n} (x+5)^n.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{2^n}.$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} (x-2)^n.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}.$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 9^n (x-1)^{2n}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cos nx}{n!}.$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} \cdot x^{n^2}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5 + x^2}}.$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{nx}.$$

$$21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 (x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{3^n + 5^n}.$$

$$22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4) \ln(n+4)}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3 x^2}.$$

$$23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \sin nx}{n!}.$$

$$24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x}{e^{nx}}.$$

$$25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}.$$

$$26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{(2n+9)^5 (x+2)^{2n}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3 x^2}.$$

$$27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln^n x}{3^n (n+1)}.$$

$$28. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^4 x^{2n}}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3 x^2}.$$

$$29. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n (x-2)^{2n}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \operatorname{tg}^{2n} x}{n}.$$

$$30. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n (4n-3)}.$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 (x^2+2)^n}.$$

Задача 6.7. а) Розкласти в ряд Тейлора функцію $y = f(x)$ в околі точки x_0 і вказати область збіжності ряду.

б) Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = f(x)$ і вказати область збіжності ряду.

$$1. \text{ a) } f(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{б) } f(x) = \ln(2-3x+x^2).$$

$$2. \text{ a) } f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 1.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$3. \text{ a) } f(x) = \operatorname{sh}^2 x, \quad x_0 = 0.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$$

$$4. \text{ a) } f(x) = \ln(36-x^2), \quad x_0 = -3.$$

$$\text{б) } f(x) = \ln(1+x+x^2).$$

$$5. \text{ a) } f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{б) } f(x) = (x - \operatorname{tg} x) \cdot \cos x.$$

$$6. \text{ a) } f(x) = e^{-2x}, \quad x_0 = -4.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

$$7. \text{ a) } f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}.$$

$$8. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{4+3x}, \quad x_0 = -1.$$

$$\text{б) } f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-x}.$$

$$9. \text{ a) } f(x) = \frac{2}{x^3}, \quad x_0 = -1.$$

$$\text{б) } f(x) = \sqrt{4-x^2}.$$

$$10. \text{ a) } f(x) = \ln(x^2+2x+2), \quad x_0 = -1.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}.$$

$$11. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}, \quad x_0 = 1.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2-1)}.$$

$$12. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}, \quad x_0 = 1.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

$$13. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}, \quad x_0 = 3.$$

$$\text{б) } f(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x.$$

$$14. \text{ a) } f(x) = \frac{6}{x^4}, \quad x_0 = -1.$$

$$\text{б) } f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

15. a) $f(x) = x^3 - 3x$, $x_0 = -1$. б) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4}$.
16. a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$, $x_0 = 1$. б) $f(x) = x \sin 2x \cos 3x$.
17. a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = -1$. б) $f(x) = x(e^{2x} - 1)$.
18. a) $f(x) = \frac{1}{1 + 3x}$, $x_0 = -1$. б) $f(x) = x \ln(1 + x^2)$.
19. a) $f(x) = \frac{3}{x - 1}$, $x_0 = 4$. б) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$.
20. a) $f(x) = \ln(x + 3)$, $x_0 = -2$. б) $f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$.
21. a) $f(x) = e^{4x}$, $x_0 = 2$. б) $f(x) = \frac{3x + 4}{x^2 + x - 6}$.
22. a) $f(x) = \ln(5 - x)$, $x_0 = 4$. б) $f(x) = \frac{x}{2x^2 + 5x + 2}$.
23. a) $f(x) = (x - 2) \ln(3 - x)$, $x_0 = 2$. б) $f(x) = \sin x \cos^2 x$.
24. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x_0 = -1$. б) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$.
25. a) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. б) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1 - 2x}}$.
26. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$, $x_0 = -2$. б) $f(x) = \ln \frac{2 + x^2}{\sqrt{1 - 2x^2}}$.
27. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$, $x_0 = 1$. б) $f(x) = x \sin 5x$.
28. a) $f(x) = \frac{1}{1 + 2x}$, $x_0 = -1$. б) $f(x) = (1 + x)e^x$.
29. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$, $x_0 = 5$. б) $f(x) = sh^2 x$.
30. a) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$, $x_0 = -1$. б) $f(x) = ch^2 x$.

Задача 6.8. Користуючись степеневим розкладом функції, обчислити з точністю δ .

1. $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}$, $\delta = 0,001$.

16. $\int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^2} dx$, $\delta = 0,001$.

2. $\int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$, $\delta = 0,01$.

17. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + x^3} dx$, $\delta = 0,0001$.

$$3. \sqrt[3]{130}, \quad \delta = 0,0001.$$

$$4. \cos 10^0, \quad \delta = 0,0001.$$

$$5. \ln 1,2, \quad \delta = 0,0001.$$

$$6. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$7. \int_0^1 \cos x^2 \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$8. \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$9. \int_0^1 \frac{1 - \cos 3x}{x} \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$10. \sin 10^0, \quad \delta = 0,0001.$$

$$11. \arcsin \frac{1}{4}, \quad \delta = 0,001.$$

$$12. \sqrt[3]{68}, \quad \delta = 0,0001.$$

$$13. \operatorname{tg} 9^0, \quad \delta = 0,0001.$$

$$14. \sin 18^0, \quad \delta = 0,0001.$$

$$15. \sqrt[3]{501}, \quad \delta = 0,0001.$$

$$18. \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$19. \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$20. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$21. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$22. \int_0^{\frac{1}{7}} \sqrt{x} e^x \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$23. \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$24. \int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x}) \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$25. \int_0^{1,5} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{4}}{x} \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$26. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$27. \cos 1^0, \quad \delta = 0,0001.$$

$$28. \int_0^{0,5} \frac{\arcsin x}{x} \, dx, \quad \delta = 0,0001.$$

$$29. \int_0^{0,3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

$$30. \int_0^{10} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \, dx, \quad \delta = 0,001.$$

Задача 6.9. Використовуючи степеневі розклади, знайти три перших ненульових члена розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$1. y'' = xy y', \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

$$2. y'' = x \sin y', \quad y(1) = 0, y'(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$3. y'' = -xy^2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

4. $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$
5. $y'' = yy' - x^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$
6. $(1 + x^2)y'' + xy' = y, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$
7. $y'' = xy', \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$
8. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$
9. $y'' = xy' - y + e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$
10. $y' = y + xe^y, \quad y(0) = 0.$
11. $xy'' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$
12. $xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$
13. $y'' + 3y' + 2xy^2 - xe^x = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$
14. $y'' + xy^2 + y \sin x = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$
15. $y'' + y' - \frac{y}{x+1} = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$
16. $y'' + x + y = y'e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$
17. $y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 2, y'(-1) = 0,5.$
18. $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}, \quad y(1) = 1, y'(1) = 1.$
19. $y'' + 2xy' + \frac{y}{1-x} = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$
20. $y'' - (y')^2 - yx = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 2.$
21. $y'' = 2e^y \sin y', \quad y(\pi) = 1, y'(\pi) = \frac{\pi}{2}.$
22. $y'' = xy y' + 1, \quad y(0) = 0,5, y'(0) = 1.$
23. $y'' + \sin(xy) = 5, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$
24. $y'' - \cos(xy) = -3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$
25. $y'' + \sin x - \cos y' + 4 = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1, y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$
26. $y'' - 2 \sin x + \cos y' - 3 = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = \frac{\pi}{2}.$
27. $\frac{y''}{x} + y' + xy - 5y + 1 = 0, \quad y(2) = 1, y'(2) = 1.$
28. $y'' + e^{y'} - y + 5x - 1 = 0, \quad y(2) = 1, y'(2) = 0.$
29. $y'' + e^{\frac{x}{y}} - 4y' + 2 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$
30. $y'' + \cos(y-1) + 2y' + 3x - 1 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$

Задача 6.10. Користуючись ознакою Вейерштрасса, довести рівномірну збіжність функціонального ряду на вказаній множині:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, \quad x \geq 0.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} nx}{n+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n\sqrt[3]{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2 x}, \quad x > 0.$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{3^n \sqrt{1+nx^2}}, \quad x \in [0, 2].$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, \quad x \geq 2.$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \quad x \geq 1.$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n\sqrt{n+x}}, \quad x \in [0, \frac{1}{3}].$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}, \quad x \in [-1, 3].$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}}, \quad x \in [-3, -1].$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n \ln^2 n}, \quad x \in [-1, 1].$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^3 (2x)^{2n}}{x^2+3x+4}, \quad x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}].$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n+x}, \quad x \in [0, 1].$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 x}{1+n^3 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in [-\pi, \pi].$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2} \ln \frac{x}{n^2}, \quad x \in (0, 1).$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}, \quad x \in [0, 4].$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n^2+x^2}}, \quad x \geq 0.$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}, \quad x \geq 1.$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right), \quad x \in [-1, 1].$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^2 e^{-\sqrt{nx}}, \quad x > 0.$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(x^4 + \frac{1}{n} \right), \quad x > 1.$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^3}, \quad x > 0.$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^2 x^3}, \quad x > 0.$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{x+n} \right)^3, \quad x > 0.$

3. Ряди Фур'є.

Задача 6.11. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана на вказаному інтервалі:

$$1. f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0, \\ 5, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x+1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 2x-2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 1-x, & -2 < x < 0, \\ 4, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \pi, & -2\pi < x < 0, \\ \pi-x, & 0 \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 2x+\pi, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0, \\ 2x-2, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0, \\ -2, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} -3x+2, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} -x, & -4 < x < 0, \\ 4, & 0 \leq x < 4. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 3x-1, & -2\pi < x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0, \\ -5, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} 3-x, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0, \\ 2x+1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ 1-\pi x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} x/2, & -2 < x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} x+5, & -2\pi < x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 4, & -\pi < x < 0, \\ \pi-x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 3-2x, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 4-x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi}, & -\pi < x < 0, \\ 4, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} x+2, & -2\pi < x < 0, \\ 5, & 0 \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} 3-x, & -\pi < x < 0, \\ 4, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 7, & -\pi < x < 0, \\ x+4, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} 2-x, & -2 < x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} 3x+1, & -1 < x < 0, \\ -2, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} 5x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Задача 6.12. а) Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію, яка задана на вказаному інтервалі.

б) Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію, яка задана на вказаному інтервалі.

1. $f(x) = 2x - 2, \quad x \in [0, \pi].$

2. $f(x) = -2x + 1, \quad x \in [0, \pi].$

3. $f(x) = -x + \pi, \quad x \in [0, \pi].$

4. $f(x) = 2x + 1, \quad x \in [0, \pi].$

5. $f(x) = 2x, \quad x \in [0, \pi].$

6. $f(x) = -x - 2, \quad x \in [0, \pi].$

7. $f(x) = x - 5, \quad x \in [0, \pi].$

8. $f(x) = -x - \pi, \quad x \in [0, \pi].$

9. $f(x) = 2x + 4, \quad x \in [0, \pi].$

10. $f(x) = x^2 + 2, \quad x \in [0, \pi].$

11. $f(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi].$

12. $f(x) = 4 - 2x, \quad x \in [0, \pi].$

13. $f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad x \in [0, \pi].$

14. $f(x) = x^2 + x, \quad x \in [0, \pi].$

15. $f(x) = \pi x - x^2, \quad x \in [0, \pi].$

16. $f(x) = 2x - 2, \quad x \in [0, 1].$

17. $f(x) = \frac{x}{2} + 2, \quad x \in [0, 2].$

18. $f(x) = 2 - \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 4].$

19. $f(x) = \frac{\pi}{4} - x, \quad x \in [0, \pi].$

20. $f(x) = 2x - 1, \quad x \in [0, 2].$

21. $f(x) = 1 - \frac{x}{3}, \quad x \in [0, 3].$

22. $f(x) = -2x + 2, \quad x \in [0, 2].$

23. $f(x) = \frac{x}{2} - 2, \quad x \in [0, 4].$

24. $f(x) = 2x^2 + 1, \quad x \in [0, 2].$

25. $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in [0, 2].$

26. $f(x) = 3 - x^2, \quad x \in [0, \pi].$

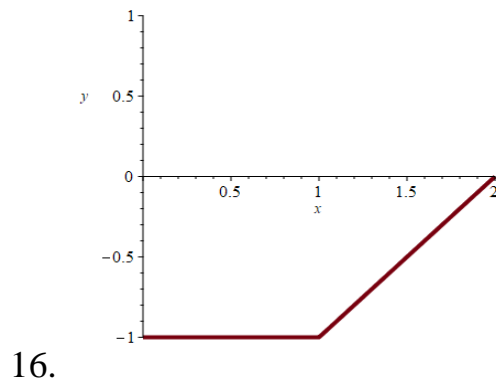
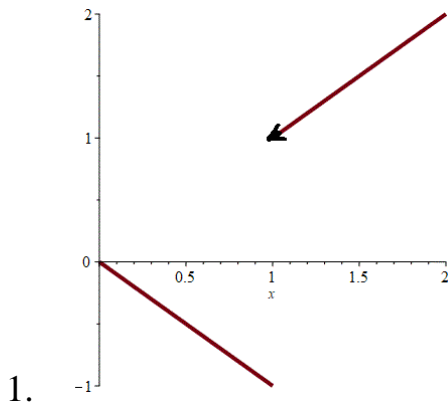
27. $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in [0, \pi].$

28. $f(x) = 3x^2 - 2, \quad x \in [0, \pi].$

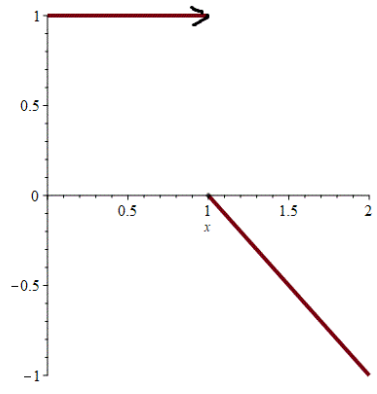
29. $f(x) = x - \pi x^2, \quad x \in [0, \pi].$

30. $f(x) = \frac{x}{2} - 1, \quad x \in [0, 2].$

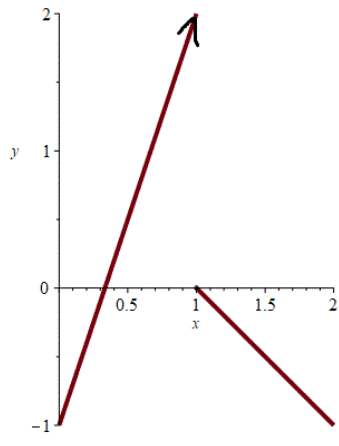
Задача 6.13. Розкласти в ряд Фур'є графічно задану функцію на відрізку $[0, 2]$, продовживши її парним та непарним чином:



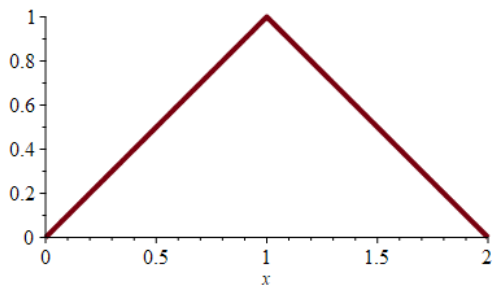
2.



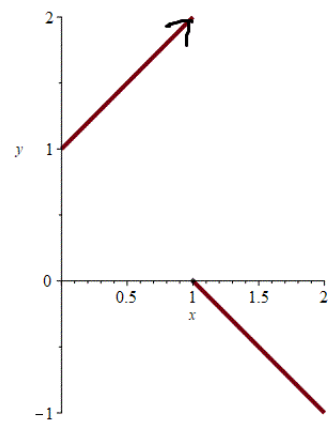
17.



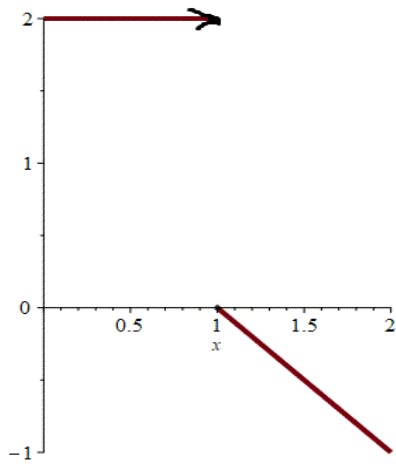
3.



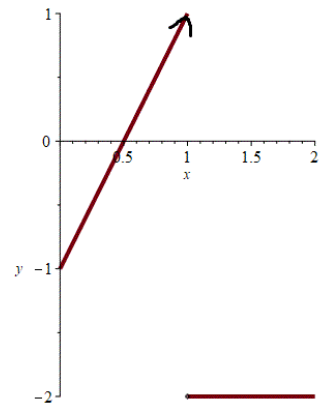
18.

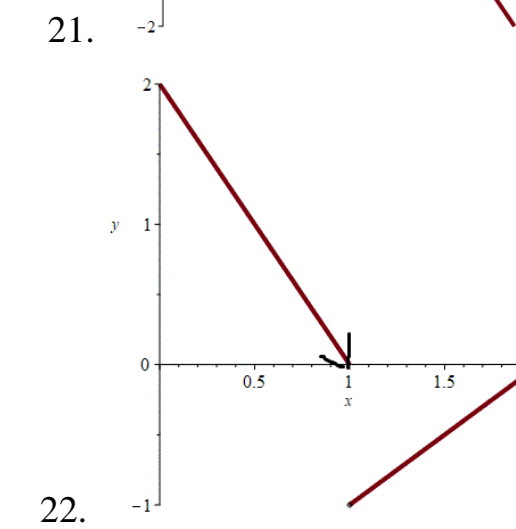
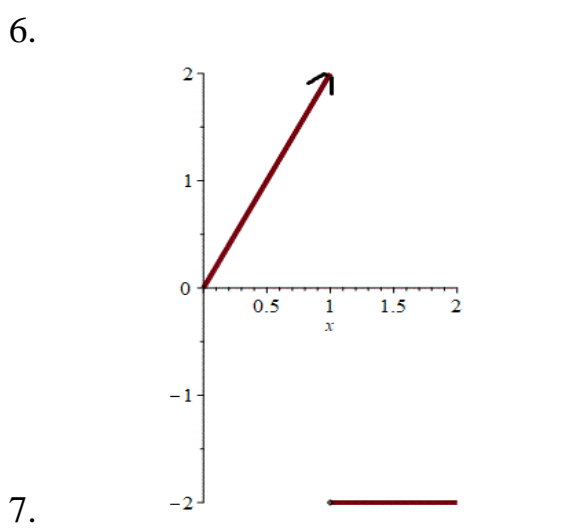
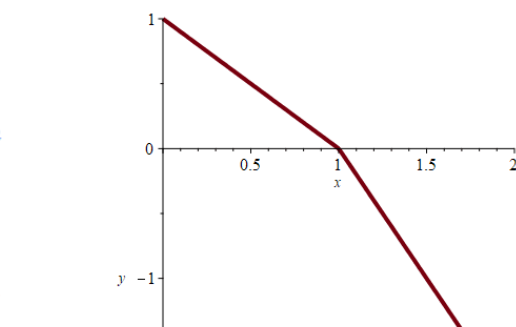
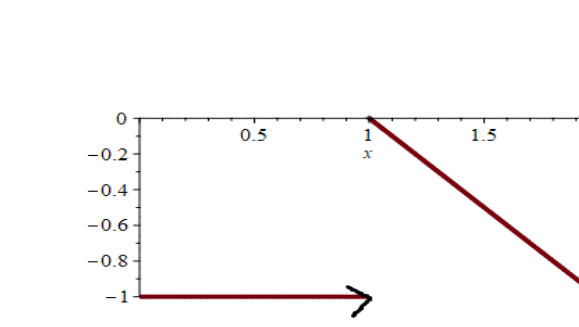
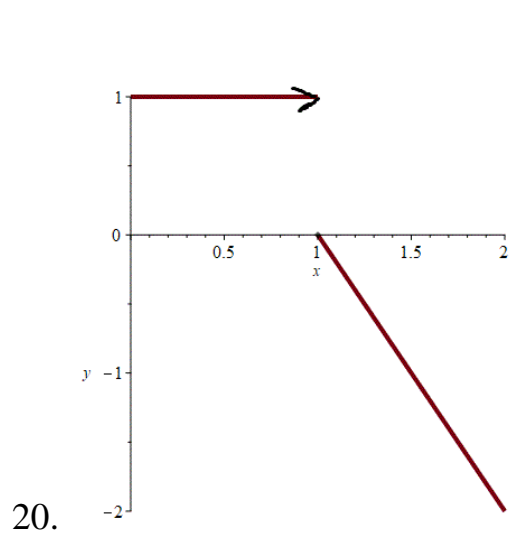
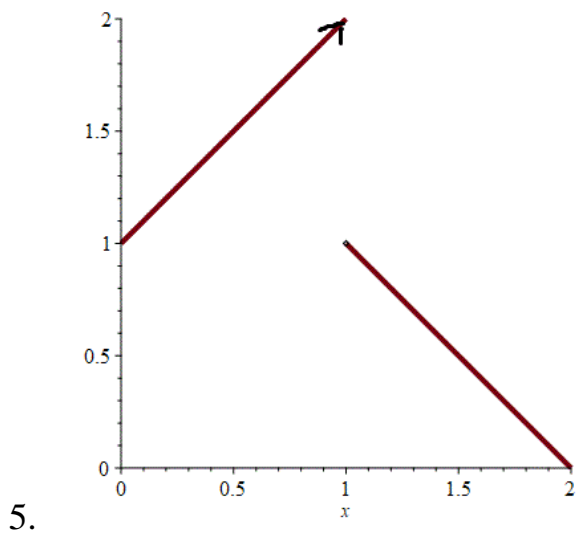


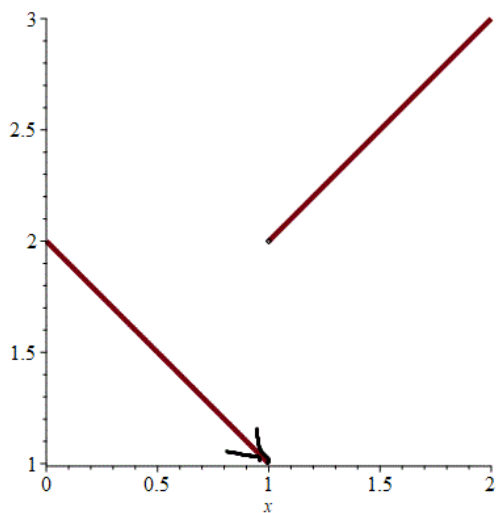
4.



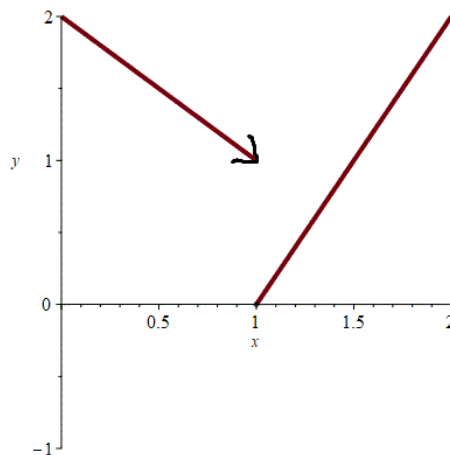
19.



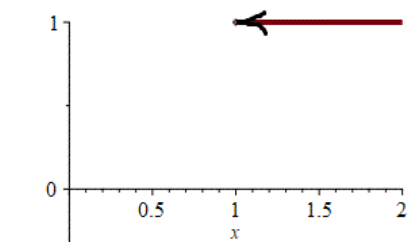




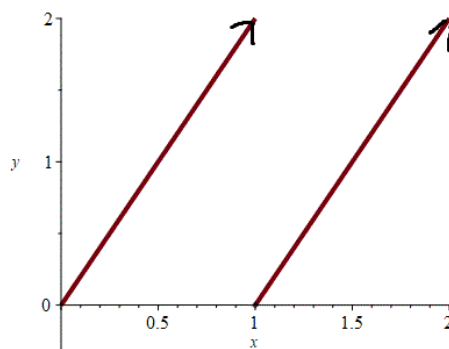
8.



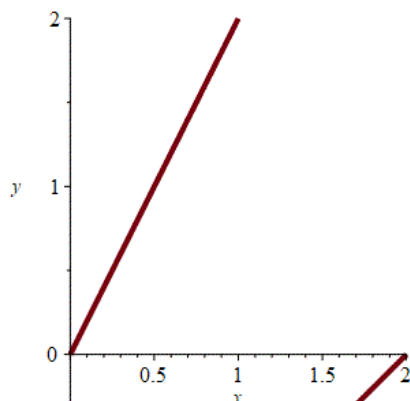
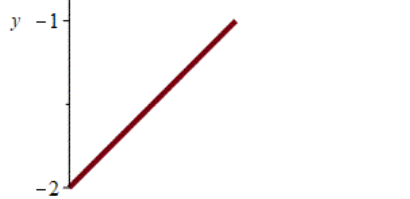
23.



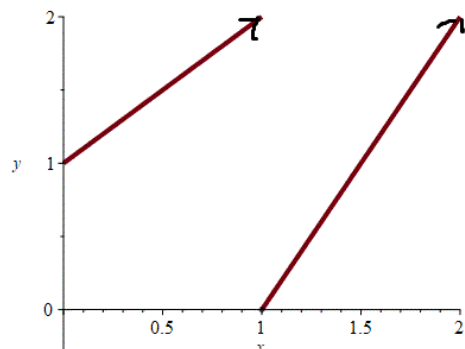
9.



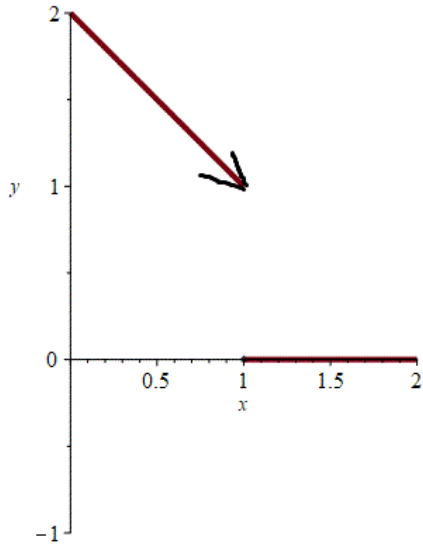
24.



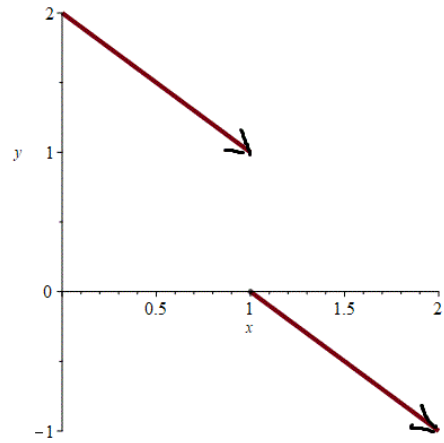
10.



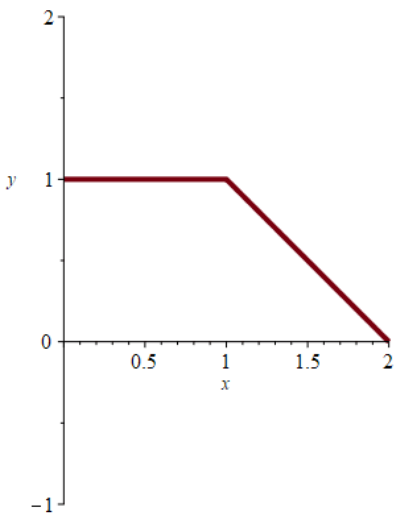
25.



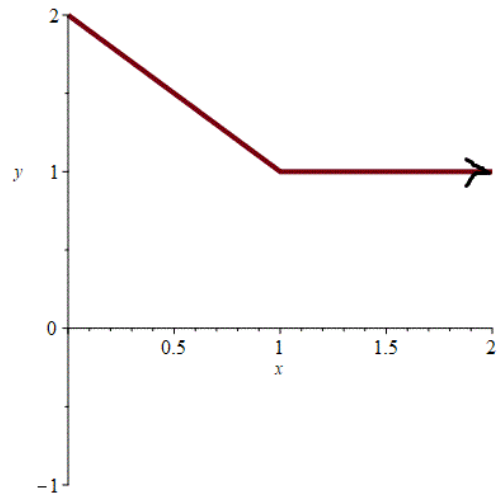
11.



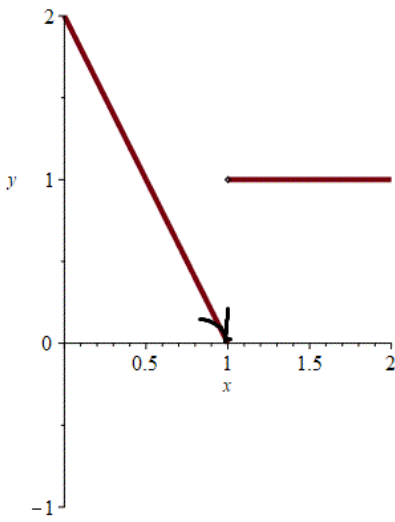
26.



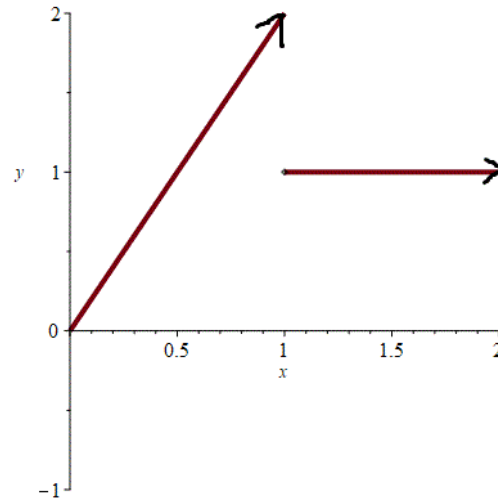
12.



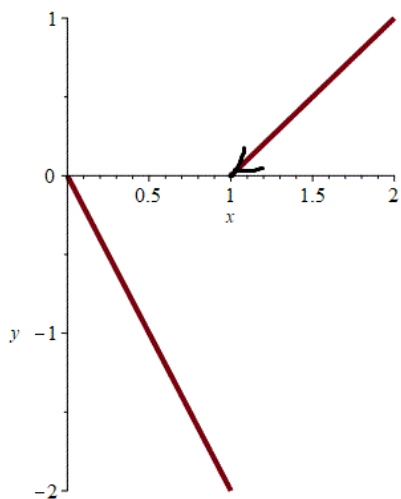
27.



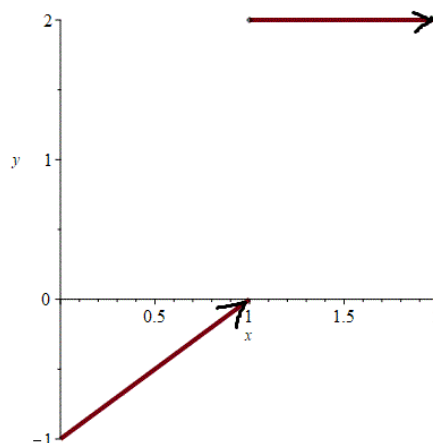
13.



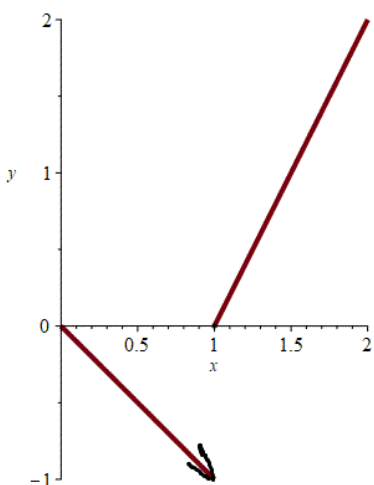
28.



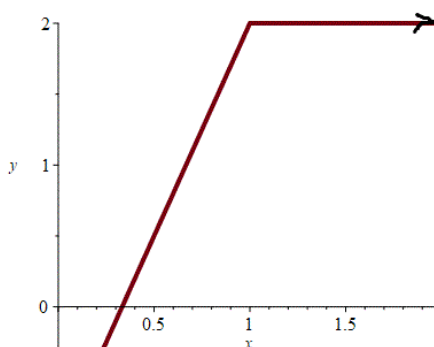
14.



29.



15.



30.

7. Кратні інтеграли та теорія поля.

Теорія: [1, гл.10], [2, гл.15], [3, гл.12].

Методика розв'язання: [4, гл.16-17], [5, гл.7-8].

1. Подвійний інтеграл.

Задача 7.1. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі.
Зробити малюнок.

$$1. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{\sqrt{x^2-3}}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy.$$

2. $\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx.$
3. $\int_1^3 dy \int_0^{\log_3 y} f(x, y) dx + \int_3^4 dy \int_0^{4-y} f(x, y) dx.$
4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dx \int_{-1}^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy.$
5. $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x, y) dx.$
6. $\int_3^7 dy \int_{\frac{9}{y}}^3 f(x, y) dx + \int_7^9 dy \int_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x, y) dx.$
7. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$
8. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{4-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$
9. $\int_{-2}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy.$
10. $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^0 f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 f(x, y) dx.$
11. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$
12. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$
13. $\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x, y) dy.$
14. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx.$
15. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$
16. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$

17. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$
18. $\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$
19. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$
20. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-2+\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy.$
21. $\int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x, y) dx.$
22. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy.$
23. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x, y) dx.$
24. $\int_0^1 dx \int_{-x}^0 f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy.$
25. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$
26. $\int_0^1 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$
27. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$
28. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-2-x}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x, y) dy.$
29. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$
30. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[3]{x}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$

Задача 7.2. Обчислити подвійний інтеграл:

1. $\iint_D x^3 y^5 dx dy, \quad D: |x| + |y| \leq 1.$

2. $\iint_D \cos(x+y) dx dy, \quad D: x \geq 0, y \leq \pi, y \geq x.$
3. $\iint_D (x-y) dx dy, \quad D: y = 2-x^2, y = 2x-1.$
4. $\iint_D \sqrt{|x-y^2|} dx dy, \quad D: |y| \leq 1, 0 \leq x \leq 2.$
5. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0.$
6. $\iint_D (x+y) dx dy, \quad D$ – квадрат з вершинами $O(0,0), A(0,2), B(2,0), C(2,2).$
7. $\iint_D y dx dy, \quad D: y = \sqrt{x}, y + x = 2, y = 0.$
8. $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, \quad D: y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2.$
9. $\iint_D (1 + xy^2) dx dy, \quad D: y = \frac{x}{2}, x = 2y^2.$
10. $\iint_D (x^2 + y) dx dy, \quad D: y = 2x, y = \frac{x}{2}, xy = 2.$
11. $\iint_D e^{x+y} dx dy, \quad D: y = e^x, x = 0, y = 2.$
12. $\iint_D (x+y) dx dy, \quad D: y^2 \leq 2x, x+y \geq 4, x+y \leq 12.$
13. $\iint_D (x^2 + y) dx dy, \quad D$ – трикутник з вершинами $A(2,3), B(7,2), C(4,5).$
14. $\iint_D y \ln x dx dy, \quad D: xy \geq 1, y \leq \sqrt{x}, x \leq 2.$
15. $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy, \quad D: x \geq 0, y \geq 0, 4x + 4y - \pi \leq 0.$
16. $\iint_D x\sqrt{y} dx dy, \quad D: x \leq 1, y \geq x, y \leq 3x.$
17. $\iint_D (x^2 + 2xy) dx dy, \quad D: y \geq 0, y \leq 1, y \leq x, y \geq x-1.$
18. $\iint_D x^3 dx dy, \quad D: x \geq 0, y \leq x, y \leq 2-x^2.$
19. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, \quad D: 0 < x \leq 2, y \leq x, y \geq \frac{1}{x}.$
20. $\iint_D \frac{x}{y^2} dx dy, \quad D: y \leq 9x, y \geq x, y \leq \frac{1}{x}.$
21. $\iint_D y dx dy, \quad D: x-y \leq 2, y \leq \sqrt{x}, y \geq -x.$
22. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: y = 2, y = x, y = x+2, y = 6.$

23. $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, $D: y \geq x^2, y^2 \leq x$.
24. $\iint_D \frac{x^3}{y} dx dy$, $D: y \leq 4, y \leq x^2, y \geq \frac{x^2}{4}$.
25. $\iint_D \cos(x + y) dx dy$, $D: x \geq 0, y \leq \pi, y \geq x$.
26. $\iint_D xy^2 dx dy$, $D: x \leq \frac{p}{2}, y^2 \leq 2px, p > 0$.
27. $\iint_D y dx dy$, $D: 0 \leq y \leq 6, x \leq 6, xy \geq 3, y - x - 2 \leq 0$.
28. $\iint_D e^{x-y} dx dy$, $D: x = -1, x = 1, y = x, y = 2x$.
29. $\iint_D xy dx dy$, $D: xy = 1, y + x = \frac{5}{2}$.
30. $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy$, $D: x \geq 0, y \geq 0, 4x + 4y - \pi \leq 0$.

Задача 7.3. Обчислити подвійний інтеграл, використовуючи перехід до полярної системи координат:

1. $\iint_D (x + y) dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 25, y \geq x$.
2. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 16$.
3. $\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 2x$.
4. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 4y$.
5. $\iint_D y^2 \sqrt{16 - x^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 16$.
6. $\iint_D \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 3x$.
7. $\iint_D xy dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 8x$.
8. $\iint_D y dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 6y$.
9. $\iint_D (x^2 + y^2)^3 dx dy$, $D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$.
10. $\iint_D x^2 dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq 4x$.
11. $\iint_D xy dx dy$, $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

12. $\iint_D xy^2 dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0.$
13. $\iint_D (3x + y) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq -x.$
14. $\iint_D (16 + xy) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x, x \leq 0.$
15. $\iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq \sqrt{3}x.$
16. $\iint_D y dx dy, \quad D: x \geq 0, y \geq 0, y \leq \sqrt{9 - x^2}.$
17. $\iint_D x^3 y^2 dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 36, y \leq \sqrt{3}x.$
18. $\iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0.$
19. $\iint_D x^3 y^2 dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4y, x \geq 0.$
20. $\iint_D x^2 y^2 dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4x.$
21. $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -\sqrt{3}x.$
22. $\iint_D x^2 dx dy, \quad D: \{(\rho, \varphi) / 0 \leq \rho \leq \cos 2\varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\}.$
23. $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy, \quad D: \{(\rho, \varphi) / 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos 2\varphi}\}.$
24. $\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9}\right) dx dy, \quad D: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} \leq 1.$
25. $\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4x, y \leq 0.$
26. $\iint_D \frac{x^2 + y^2}{x^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq -\sqrt{3}x.$
27. $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 16x.$
28. $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0.$
29. $\iint_D x^2 y dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 16y, x \geq 0.$
30. $\iint_D (2xy + x) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0.$

2. Потрійний інтеграл. Заміна змінної.

Задача 7.4. Обчислити потрійний інтеграл:

1. $\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz, \quad V: 0 \leq y \leq 36x, x=1, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}.$
2. $\iiint_V y dx dy dz, \quad V: y=0, x=0, z=0, 2x+y+z=4.$
3. $\iiint_V (x+z) dx dy dz, \quad V: x+y=1, x-y=1, x+z=1.$
4. $\iiint_V (x+y)e^{x-y} dx dy dz, \quad V: x, y, z \in [0, 4].$
5. $\iiint_V (5x+3z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq x^2+3y^2, 0 \leq y \leq x, x=1.$
6. $\iiint_V \frac{1}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^3} dx dy dz, \quad V: \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1, y=0, x=0, z=0.$
7. $\iiint_V (4+8z^3) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq \sqrt{xy}, 0 \leq y \leq 2x, x=1.$
8. $\iiint_V (3x^2+y^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq 10y, y+x=1, x=0, y=0.$
9. $\iiint_V y dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 5x, x=1.$
10. $\iiint_V (2x+3y) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq 5(x^2+y^2), 0 \leq y \leq \frac{x}{4}, x=1.$
11. $\iiint_V (1+2x^3) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq y, 0 \leq y \leq 3x, x=2.$
12. $\iiint_V (y^2+z^2) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq x+y, y+x=1, x=0, y=0.$
13. $\iiint_V x dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 4x, x=4.$
14. $\iiint_V (5x+3z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq 3x^2+6y^2, 0 \leq y \leq 3x, x=1.$
15. $\iiint_V (8y+5z) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq x^2+y^2, 0 \leq y \leq 2, x=\pm 1.$
16. $\iiint_V (x+3\sqrt{y}) dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq x+3y, 0 \leq y \leq x, x=2.$
17. $\iiint_V x^2 dx dy dz, \quad V: 0 \leq z \leq x+3y, y+x=1, x=0, y=0.$
18. $\iiint_V (x^2-4xy+y^2) dx dy dz, \quad V: x, y, z \in [0, 1].$

19. $\iiint_V x \, dx \, dy \, dz$, $V: x+z \leq 1, 0 \leq y \leq 2, x \geq 0, z \geq 0$.
20. $\iiint_V (6y+5z) \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq x^2+y^2, 0 \leq y \leq 3x, x=1$.
21. $\iiint_V (2x+3) \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq 2\sqrt{xy}, 0 \leq y \leq 9x, x=1$.
22. $\iiint_V z^4 \, dx \, dy \, dz$, $V: y=0, x=0, z=0, x+y+z=2$.
23. $\iiint_V (x^2+3y^2) \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq 2x, 0 \leq y \leq 1-x, x=0$.
24. $\iiint_V 2xz \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, x=2$.
25. $\iiint_V x^2 z \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq x+y, 0 \leq y \leq 3x, x=2$.
26. $\iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz$, $V: y=0, x=0, z=0, x+y+z=4$.
27. $\iiint_V (5x+4z) \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq x^2+y^2, 0 \leq y \leq 7x, x=2$.
28. $\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq x+2y, 0 \leq y \leq x, x=2$.
29. $\iiint_V (x^2+4y^2) \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq 2x, 0 \leq y \leq 1-x, x=0$.
30. $\iiint_V y^2 \, dx \, dy \, dz$, $V: 0 \leq z \leq 3x+y, 0 \leq y \leq 1-x, x=0$.

Задача 7.5. Обчислити потрібний інтеграл, використовуючи перехід до циліндричної або сферичної системи координат:

1. $\iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz$, $V: z^2 = x^2 + y^2, z=2, z>0$.
2. $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 = 9, z=0, x, y > 0, z = x + y$.
3. $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, $V: 2z \geq x^2 + y^2, z=2, z=0$.
4. $\iiint_V (x+y+z)^2 \, dx \, dy \, dz$, $V: 2z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.
5. $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, $V: z = x^2 + y^2, z=1$.
6. $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$, $V: z^2 \geq x^2 + y^2, z=1, z=0$.
7. $\iiint_V y\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, $V: z^2 = 4x^2 + 4y^2, z=2, z=0$.

8. $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$, $V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, z = 1, z = 0$.
9. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, z = 4, z = 0$.
10. $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, $V: \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2$.
11. $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$, $V: z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z > 0$.
12. $\iiint_V y \, dx \, dy \, dz$, $V: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, y \geq 0$.
13. $\iiint_V \frac{zy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \, dx \, dy \, dz$, $V: z = 3x^2 + 3y^2, 0 \leq y \leq x, z = 3$.
14. $\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \, dx \, dy \, dz$, $V: z = x^2 + y^2, 0 \leq y \leq x, z = 1$.
15. $\iiint_V \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 = 4y, 0 \leq z \leq 2$.
16. $\iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, x, y, z \geq 0$.
17. $\iiint_V x \, dx \, dy \, dz$, $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, z \geq 0$.
18. $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq \sqrt{3}x, x, z \geq 0$.
19. $\iiint_V y^2 \, dx \, dy \, dz$, $V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq x, y \geq 0, z \geq 0$.
20. $\iiint_V y^2 \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, y \leq \sqrt{3}x, y \geq 0, z \geq 0$.
21. $\iiint_V \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq \sqrt{3}x, y \geq 0, z \geq 0$.
22. $\iiint_V \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \geq -x, y \geq 0, z \geq 0$.
23. $\iiint_V xy \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq x, z \geq 0$.
24. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, $V: 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, z \geq 0$.
25. $\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, y \geq x, y \geq 0, z \geq 0$.
26. $\iiint_V \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz$, $V: 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq 0, z \geq 0$.

27. $\iiint_V \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \leq x\sqrt{3}, y \geq 0, z \geq 0.$
28. $\iiint_V z^2 dx dy dz, \quad V: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1, y \geq 0, z \geq 0.$
29. $\iiint_V z^3 dx dy dz, \quad V: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} \leq 1, x \geq 0, z \geq 0.$
30. $\iiint_V z^4 dx dy dz, \quad V: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{36} \leq 1, y \geq 0, z \geq 0.$

3. Застосування кратних інтегралів.

Задача 7.6. Знайти площу області, яка обмежена кривими:

1. $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = x, y = 0.$
2. $y^2 = 10x + 25, y^2 = 9 - 6x.$
3. $y = \cos x, y = \cos 2x, x \in [0, \frac{2\pi}{3}].$
4. $x^2 + y^2 = 4, y^2 = 4 - 4x, x < 1.$
5. $y = \sqrt{2 - x^2}, y = x^2.$
6. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$
7. $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4.$
8. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3.$
9. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2.$
10. $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y.$
11. $(x^2 + y^2)^2 = x^3 - 3xy^2.$
12. $x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq x\sqrt{3}.$
13. $x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq x, y \leq x\sqrt{3}.$
14. $x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0.$
15. $x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 6y, x \geq 0.$
16. $x^2 + y^2 \leq 4x, x^2 + y^2 \leq 8x, y \geq 0, y \leq \sqrt{3}x.$
17. $x^2 + y^2 \leq 4x, y \leq x.$
18. $y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$

19. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x + y = 1.$
20. $x^2 + y^2 \leq 6x, x^2 + y^2 \leq 10x, y \geq 0, y \leq x.$
21. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 3 - \sqrt{9 - x^2}.$
22. $x^2 + y^2 \leq 4y, x^2 + y^2 \leq 8y, x \geq 0, y \leq x.$
23. $xy = 1, x^2 + y^2 = 4.$
24. $y^2 = 10x + 25, y^2 = 3(3 - 2x).$
25. $x = y^2, y^2 = (x - 2)^3.$
26. $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq x.$
27. $x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq x, y \leq x\sqrt{3}.$
28. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, x \geq 0.$
29. $6y = -x^2, x^2 + y^2 = 72, y \leq 0.$
30. $-\sqrt{6}y = x^2, x^2 + y^2 = 12, y \leq 0.$

Задача 7.7. Подвійним інтегруванням, знайти об'єм циліндричного тіла, яке обмежене поверхнями:

1. $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
2. $z = 2 - x^2 - y^2, x + 2y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
3. $z = x^2, x - 2y + 2 = 0, x + y = 7, y = 0, z = 0.$
4. $z = 2x^2 + 3y^2, y = x^2, y = x, z = 0.$
5. $z = 2x^2 + y^2, y = x, y = 3x, x = 2, z = 0.$
6. $z = x, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}, x = 0, y = 0, z = 0.$
7. $z + x + y = 2, y = \sqrt{x}, x = y, z = 0.$
8. $x + y + z = 3, y = 1 - x^2, y = 0, z = 0.$
9. $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$
10. $x^2 + y^2 = 4, x + y + z = 1, x + y + z = -1.$
11. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 2xy, y = 0, z = 0.$
12. $z = 10 + x^2 + 2y^2, y = x, x = 1, y = 0, z = 0.$
13. $z = x^2, x + y = 6, y = 2x, x = 0, z = 0.$
14. $z = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$
15. $z = y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$
16. $z = 12y, x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 0.$

17. $y = x^2, x = y^2, z = 3x + 2y + 6, z = 0.$
18. $x^2 = 1 - y, x + y + z = 3, y = 0, z = 0.$
19. $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, z = 0.$
20. $z = 2x + 5y + 10, y = x^2, y = 4, z = 0.$
21. $y = 2x, x + y + z = 2, x = 0, z = 0.$
22. $y = 1 - z^2, y = x, y = -x, z = 0.$
23. $x^2 + y^2 = 4y, z^2 = 4 - y, z = 0.$
24. $x^2 + y^2 \leq 1, z = 2 - x^2 - y^2, z = 0.$
25. $y = x^2, z = 0, y + z = 2.$
26. $z = x^2 + 2y^2, y = x, x = 0, y = 1, z = 0.$
27. $z = y^2, y + x = 1, x = 0, z = 0.$
28. $y^2 = x, x = 3, z = x, z = 0.$
29. $z = \ln(x^2 + y^2 + 1), x^2 + y^2 = 4, z = 0.$
30. $z = x^2 + y + 1, x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y = 1.$

Задача 7.8. Знайти об'єм тіла, яке обмежене поверхнями:

1. $9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, x \geq 0.$
2. $9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49, z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, x \leq 0, y \leq 0.$
3. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$
4. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$
5. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = xyz.$
6. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z(x^2 + y^2).$
7. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$
8. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2 - z^2).$
9. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y = x, x \geq 0, 3x^2 + 3y^2 \leq z^2, z \geq 0.$
10. $25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, x \geq 0, y \leq 0.$
11. $25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq 0, x \leq 0, y \geq 0.$
12. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$

13. $y^2 + z^2 \leq 3x, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$
14. $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \quad z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0.$
15. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 \leq 3z^2, \quad x^2 + y^2 \geq \frac{z^2}{3}, \quad z \geq 0.$
16. $z \geq x^2 + y^2, \quad z \leq 2x^2 + 2y^2, \quad z = 2.$
17. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 2 - z = x^2 + y^2.$
18. $4z \geq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 12.$
19. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 \geq 2 - z.$
20. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z, \quad z \leq 1.$
21. $z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = 3\sqrt{x^2 + y^2}.$
22. $z = -6 + x^2 + y^2, \quad z = -5\sqrt{x^2 + y^2}.$
23. $z = -6 + x^2 + y^2, \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2}.$
24. $z = 2 + x^2 + y^2, \quad z = 4 - x^2 - y^2.$
25. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad 3z \leq x^2 + y^2.$
26. $z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$
27. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad y \geq x.$
28. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 \geq 3z.$
29. $x^2 + y^2 = 2x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad y \geq 0.$
30. $z = 9 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0.$

Задача 7.9. Обчислити масу тіла V , обмеженого поверхнями та із заданою об'ємною густиною $\mu(x, y)$.

1. $V: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 0, \quad y \geq 0, \quad \mu = y.$
2. $V: \quad y \leq x^2 + y^2 \leq 2y, \quad 0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad y \geq 0, \quad \mu = \frac{1}{y}.$
3. $V: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq z \leq \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$
4. $V: \quad x \leq x^2 + y^2 \leq 2x, \quad 0 \leq z \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}, \quad y \leq 0, \quad x \geq 0, \quad \mu = \frac{1}{x^2 + y^2}.$
5. $V: \quad z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \quad z = 3, \quad \mu = x^2.$
6. $V: \quad x + y + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \mu = x + y + z.$
7. $V: \quad z = 6 - x^2 - y^2, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z \geq 0, \quad \mu = z.$

8. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0, \mu = z.$
9. $V: z = \sqrt{x^2 + y^2}, 2 - z = x^2 + y^2, \mu = x^2 + y^2.$
10. $V: x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0, \mu = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$
11. $V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \mu = z^2.$
12. $V: y \leq x\sqrt{3}, z \leq 4, z \geq 4(x^2 + y^2), y \geq 0, \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$
13. $V: 2(x^2 + y^2) \leq z \leq 18, y \geq 0, y \leq x, \mu = x^2 + y^2.$
14. $V: y \leq x\sqrt{3}, x^2 + y^2 \leq z \leq 4, y \geq 0, \mu = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$
15. $V: x^2 = 2y, y + z = 1, 2y + z = 2, \mu = y.$
16. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 3, 2z = x^2 + y^2, y \geq 0, \mu = z.$
17. $V: x^2 + y^2 + 2 \geq z, x^2 + y^2 \leq 4, z \geq 1, \mu = x^2 + y^2.$
18. $V: x^2 + y^2 \geq 4y, x^2 + y^2 \leq 8y, x, z \geq 0, z \leq 2, \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$
19. $V: z^2 + x^2 + y^2 \leq 9, y, z \geq 0, y \leq x, \mu = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
20. $V: z = 1, z^2 + x^2 + y^2 = 4z, \mu = z.$
21. $V: 0 \leq y \leq x\sqrt{3}, x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0, \mu = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
22. $V: x^2 + y^2 \leq 2x, x + z \leq 2, y, z \geq 0, \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$
23. $V: 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0, \mu = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$
24. $V: x^2 + y^2 \leq 2y, y + z \leq 2, x, z \geq 0, \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$
25. $V: 0 \leq y \leq x\frac{1}{\sqrt{3}}, 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, z \geq 0, \mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$
26. $V: x^2 + y^2 \leq 6x, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0, \mu = z\sqrt{x^2 + y^2}.$
27. $V: 0 \leq y \leq x, 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0, \mu = z.$
28. $V: 2(x^2 + y^2) \leq z^2, z \leq 4, z \geq 0, \mu = z.$
29. $V: x^2 + y^2 \leq 4x, z \leq 1, y, z \geq 0, \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$
30. $V: x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, x, z \geq 0, \mu = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

4. Криволінійні та поверхневі інтеграли.

Задача 7.10. Обчислити криволінійний інтеграл 1 роду вздовж кривої L :

1. $\int_L \frac{dl}{x-y}$, L – відрізок AB , $A(0,-2)$, $B(4,0)$.
2. $\int_L y dl$, L : $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.
3. $\int_L (x^2 + y) dl$, L – відрізок AB , $A(0,1)$, $B(-2,3)$.
4. $\int_L xy dl$, L – квадрат зі сторонами $x \pm y = 1$, $x \pm y = -1$.
5. $\int_L xy dl$, L – частина кола $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$.
6. $\int_L y^2 dl$, L : $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 2]$.
7. $\int_L x^2 y dl$, L : $x = 4 \cos t$, $y = \sin 2t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
8. $\int_L y dl$, L : $y^2 = 2x$, $x \in [2, 8]$.
9. $\int_L (x+y) dl$, L : $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
10. $\int_L (4x^2 - y^2) dl$, L : $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.
11. $\int_L xy dl$, L : $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.
12. $\int_L \frac{1}{x^2 + y^2} dl$, L : $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.
13. $\int_L x dl$, L : $\rho = 1 + \cos \varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.
14. $\int_L (x+4y) dl$, L : $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $x \geq 0$.
15. $\int_L y^3 dl$, L : $\rho = 2 \cos 4\varphi$, $x \geq 0$.
16. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, L : $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.
17. $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl$, L : $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.
18. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, L : $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$, $A(0,0,0) \rightarrow B(2\pi, 0, 0)$.
19. $\int_L xy dl$, L – частина еліпсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1$, $x, y \geq 0$.
20. $\int_L xy dl$, L – прямокутник $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$.
21. $\int_L \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} dl$, L – відрізок AB , $A(0,0)$, $B(1,2)$.

22. $\int_L (x-y) dl$, $L: x^2 + y^2 = 2x$.
23. $\int_L (x^2 + y^2)^3 dl$, $L: x^2 + y^2 = 16$.
24. $\int_L \sin^2 x \cos^3 x dl$, $L: y = \ln \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
25. $\int_L \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dl$, $L: x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.
26. $\int_L (3x + 4y + 2z - 2) dl$, L – відрізок AB , $A(4, -3, 6)$, $B(2, -5, 5)$.
27. $\int_L (x+y) dl$, L – трикутник ABC , $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.
28. $\int_L (2x+y) dl$, L – ламана $ABCA$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, 0)$.
29. $\int_L xy dl$, L – прямокутник $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$.
30. $\int_L x^2 y dl$, $L: x^2 + y^2 = 16$, $x, y \geq 0$.

Задача 7.11. Обчислити криволінійний інтеграл 2 роду вздовж кривої L :

- $\int_L \left(x - \frac{1}{y} \right) dy$, $L: y = x^2$, $x \in [1, 2]$.
- $\int_L x dy - y dx$, $L: y = x^2$, $x \in [1, 2]$.
- $\int_L dy + \frac{y}{x} dx$, $L: y = \ln x$, $x \in [1, e]$.
- $\int_L x^2 dy + 2xy dx$, $L: y = x^2 / 4$, $x \in [0, 2]$.
- $\int_L -x^2 dy + 2xy dx$, $L: y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $x \in [0, 2]$.
- $\int_L -\sin y dy + \cos y dx$, $L: y = -x$, $x \in [-2, 2]$.
- $\int_L x dy + (xy - y^2) dx$, $L: y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.
- $\int_L (y^2 - 2xy) dy + (x^2 - 2xy) dx$, $L: y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.
- $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, $L: y = 1 - |x - 1|$, $x \in [0, 2]$.
- $\int_L y dx - x dy$, $L: x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

11. $\int_L (2-y)dx + (y-2)dy$, $L: x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
12. $\int_L (4x+5y)dx + (2x-y)dy$, $L: A(1, -9) \rightarrow B(4, -3)$.
13. $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$, $L: A(0,1) \rightarrow B(2,3)$.
14. Обчислити роботу сили \vec{F} при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L від точки A до точки B :
 $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x-y+1)\vec{k}$, $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$.
15. Обчислити роботу сили \vec{F} при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L від точки A до точки B :
 $\vec{F} = 2xy\vec{i} - x^2\vec{j} + z\vec{k}$, $A(0,0,0)$, $B(2,1,-1)$.
16. Обчислити роботу сили \vec{F} при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L від точки A до точки B :
 $\vec{F} = (x^2 + y + z)\vec{i} + z^2\vec{j} + (x + y^2)\vec{k}$, $A(2,1,0)$, $B(1,3,4)$.
17. Обчислити роботу сили \vec{F} при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L від точки A до точки B :
 $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2xz\vec{j} + yz\vec{k}$, $A(-1,0,1)$, $B(2,-3,4)$.
18. $\int_L ydx + zdy + xdz$, $L: x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$.
19. $\int_L x^2dx + ydy + z^2dz$, $L: x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in [0, 1]$.
20. $\int_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, $L: x = \sin^2 t$, $y = \sin 2t$, $z = \cos^2 t$, $t \in [0, \pi]$.
21. $\int_L xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$, $L: x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \sin t + \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

В наступних задачах використати формулу Гріна:

22. $\int_L (x^2 + y^2)dx$, L – прямокутник $x = 1$, $x = 3$, $y = 5$, $y = 1$.
23. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (x - 2y)^2 dy$, L – прямокутник $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.
24. $\int_L (3x^2 - y)dx + (1 - 2x)dy$, L – трикутник $A(1,0)$, $O(0,0)$, $B(1,1)$.
25. $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, L – трикутник $A(1,0)$, $O(0,0)$, $B(0,1)$.
26. $\int_L 2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy$, L – трикутник $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(2,2)$.
27. $\int_L \frac{x+y}{x^2+y^2}dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}dy$, L – коло $x^2 + y^2 = 1$.
28. $\int_L (x+y)dx - (x-y)dy$, L – еліпс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$$29. \int_L (x+y) dx - (x-y) dy, \quad L - \text{КОЛО } x^2 + y^2 = 16.$$

$$30. \int_L xy^2 dx - x^2 y dy, \quad L - \text{КОЛО } x^2 + y^2 = 4.$$

Задача 7.12. Обчислити поверхневий інтеграл 1 роду:

$$1. \iint_S (x+y+z) dS, \quad S: x+2y+4z=4, \quad x, y, z \geq 0.$$

$$2. \iint_S (x+y+z) dS, \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

$$3. \iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad S: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4.$$

$$4. \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS, \quad S: x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

$$5. \iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2} dS, \quad S: x+y+z=1, \quad x, y, z \geq 0.$$

$$6. \iint_S xyz dS, \quad S: z = x^2 + y^2, \quad z \leq 1.$$

$$7. \iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1.$$

$$8. \iint_S (xy + yz + zx) dS, \quad S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

$$9. \text{Обчислити площу частини поверхні } z = 3 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0.$$

$$10. \text{Обчислити площу частини поверхні } x + y + 3z = 2, \quad x, y, z \geq 0.$$

$$11. \text{Обчислити площу частини поверхні } x^2 + y^2 = (z-1)^2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

$$12. \iint_S \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2} \right) xyz dS, \quad S: 2z = 2 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0.$$

$$13. \iint_S (x^2 + y^2 + z) dS, \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

$$14. \iint_S (3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2) dS, \quad S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1.$$

$$15. \text{Знайти масу однорідного тіла } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1, \text{ якщо щільність дорівнює } \mu = x.$$

$$16. \text{Знайти масу однорідного тіла } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1, \text{ якщо щільність дорівнює } \mu = x.$$

$$17. \iint_S (x^2 + y^2) dS, \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0.$$

$$18. \iint_S (x^2 + y^2)^3 dS, \quad S: x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z \geq 0.$$

19. $\iint_S x dS$, $S: x + y + z = 3, x, y, z \geq 0$.
20. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2$.
21. $\iint_S z(x + y) dS$, $S: z = \sqrt{4 - x^2}, y \in [0, 5]$.
22. Знайти масу однорідного тіла $x \in [0, 1], y \in [0, 1], z \in [0, 1]$, якщо щільність дорівнює $\mu = xyz$.
23. Знайти масу однорідного тіла $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, якщо щільність дорівнює $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.
24. Знайти масу однорідного тіла $2z = x^2 + y^2, z \leq 1$, якщо щільність дорівнює $\mu = z$.
25. Знайти масу однорідного тіла $2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1$, якщо щільність дорівнює $\mu = z$.
26. Знайти масу однорідного тіла $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, якщо щільність дорівнює $\mu = x^2 + y^2$.
27. $\iint_S (x + y + z) dS$, $S: x, y, z \in [0, 1]$.
28. $\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS$, $S: z = 1 - x^2 - y^2, z = 0$.
29. $\iint_S (5x - y^2 - z^2) dS$, $S: x = y^2 + z^2, x = 2$.
30. $\iint_S \left(x + 2z + \frac{4}{3}y \right) dS$, $S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x, y, z \geq 0$.

Задача 7.13. Обчислити поверхневий інтеграл 2 роду (орієнтація поверхні – зовнішня) через бічну поверхню S :

1. $\iint_S (2z - x) dydz + (x + 2z) dzdx + 3z dxdy$, $S: x + 4y + z = 4, x, y, z \geq 0$.
2. $\iint_S yz dydz + zx dzdx + xy dxdy$, $S: x + y + z = 1, x, y, z \geq 0$.
3. $\iint_S (x^5 + z) dydz$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$. (через бічну поверхню циліндра).
4. $\iint_S x^2 y^2 z dxdy$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$. (через бічну поверхню кулі).
5. $\iint_S x^2 dydz + z^2 dxdy$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \leq 0, z \geq 0$. (через бічну поверхню кулі).

6. $\iint_S (x^2 + y^2 + 2z^2) dydz, S: \sqrt{x^2 + y^2} = z, z \leq 1.$ (через бічну поверхню конуса).
7. $\iint_S zx dydz + xy dzdx + yz dxdy, S: x^2 + y^2 = 1, x \leq 0, 0 \leq z \leq 2.$ (через бічну поверхню циліндра).
8. $\iint_S x^6 dydz + y^4 dzdx + z^2 dxdy, S: z = x^2 + y^2, z \leq 2.$ (через бічну поверхню параболоїда).
9. $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy, S: z = x^2 - y^2, -1 \leq y \leq 1.$ (через бічну поверхню сідла).

За допомоги теореми Гауса-Остроградського обчислити поверхневий інтеграл 2 роду через зовнішню сторону замкненої поверхні S :

10. $\iint_S (1+2x) dydz + (2x+3y) dzdx + (3y+4z) dxdy, S: x+y+z \leq 1, x, y, z \geq 0.$
11. $\iint_S (y+5x) dydz + z dxdy, S: x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 1.$
12. $\iint_S (y+5x) dydz + z dxdy, S: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z.$
13. $\iint_S (y+5x) dydz + z dxdy, S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$
14. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S: x^2 + y^2 = z, z \leq 1.$
15. $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0.$
16. $\iint_S x^2 y dydz - xy^2 dzdx + (x^2 + y^2)z dxdy, S: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1.$
17. $\iint_S x dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1.$
18. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S: \sqrt{x^2 + y^2} = z, z \leq 1.$
19. $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy, S: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$
20. $\iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy, S: x+2y+4z=1, x, y, z \geq 0.$
21. $\iint_S xy dydz + yz dzdx + zx dxdy, S: \sqrt{x^2 + y^2} = z, z \leq 1.$
22. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, S: x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 2.$

Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл 2 роду (орієнтація контуру L додатна, якщо дивитись на нього з початку координат):

23. $\oint_L (x+z)dx + (x-y)dy + xdz, L: x^2 + y^2 = 4, z = 2.$
24. $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, L$ – межа трикутника з вершинами $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1).$
25. $\oint_L y dx + z dy + x dz, L: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$
26. $\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz, L: x^2 + y^2 = 1, x + z = 1.$
27. $\oint_L y dx - z dy + x dz, L: x^2 + y^2 + z^2 = 1, y = x.$
28. $\oint_L (x^2 + y)dx + (y^2 + z)dy + (z^2 + x)dz, L: x^2 + y^2 = 4, x + z = 2.$
29. $\oint_L (z^2 - y^2)dx + (x^2 - z^2)dy + (y^2 - x^2)dz, L: x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 0.$
30. $\oint_L 2xy dx + z^2 dy + x^2 dz, L: 2x^2 + 2y^2 = z^2, x + z = 2.$

5. Теорія поля.

Задача 7.14. Знайти похідну скалярного поля $u(x, y, z)$ за напрямом вектору \vec{l} :

№	$u(x, y, z)$	\vec{l}
1	$x^2 y^2 - xyz^2 + z^3$	(1,1,2)
2	$xe^y + ye^x - z^3$	(3,0,2)
3	$\ln(x^2 + y^2) + 4\sqrt{xz}$	(1,1,2)
4	$x\sqrt{y} - y^3 \sqrt[3]{zx}$	(2,4,4)
5	$\arctg \frac{y}{x} + yz$	(2,2,-1)
6	$\sqrt{xy} + \ln(1 + xz^2)$	(1,1,1)
7	$z^2 - \arctg(x + y)$	(1,1,2)
8	$\ln(xy + yz) - \sqrt{xzy}$	(1,1,2)

9	$x^{yz} + \frac{x}{y}$	(2,1,1)
10	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^3} + z^{\frac{x}{y}}$	(1, -1, 1)
11	$xy^z + \operatorname{arctg} \sqrt{zx}$	(1, 2, 1)
12	$e^{yz} \cdot \sin xy$	(1, π , 0)
13	$xy^z \sqrt{z} + \frac{z}{x}$	(1, -1, 4)
14	$\ln(z^y + \sqrt{x^2 + y^2})$	(1, 2, 1)
15	$x^{2y} + \sqrt{3} \operatorname{arctg}(y - z)$	(1, 1, 2)
16	$z^y \ln x - \sqrt{xy}$	(1, 4, 2)
17	$z^{4x} + \sqrt[3]{x + y}$	(1, 2, 1)
18	$\arcsin \frac{z}{x^y} + \sqrt{xy}$	(3, 1, 1)
19	$z^2 e^{\frac{x}{y}}$	$(1, 1, \frac{1}{\sqrt{e}})$
20	$xy^2 z^x - \ln(x - 1)$	(2, 2, 1)
21	$\operatorname{arctg} \frac{xy^2}{z^y}$	(1, 2, 1)
22	$\frac{\sqrt{x}}{y^x} - y \ln(z^2 + 1)$	(4, 2, 0)
23	$x\sqrt[3]{y} + y\sqrt[3]{z}$	(3, 1, -8)
24	$y^x \sqrt{z} + \ln(x^2 + y^2)$	(-1, 1, 4)
25	$2\sqrt{y + z} + y \operatorname{arctg} x$	(1, -2, 3)
26	$z(\ln(1 + y^2) + \operatorname{arctg} x)$	(1, 0, 2)
27	$x^z y + \sqrt{1 + yz^2}$	$(1, -2, \frac{1}{2})$
28	$z^x \arccos \sqrt{xy}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$
29	$\sqrt{z} \operatorname{arctg}(x - y)$	(1, -1, 4)
30	$\ln(x + y) - \arcsin xz$	(0, 1, 2).

Задача 7.15. Перевірити, чи є векторне поле $a(x, y, z)$ соленоїдальним, потенціальним, гармонічним. Якщо векторне поле є потенціальним, то знайти його потенціал.

1. $\vec{a}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 1, 0)$;
2. $\vec{a}(x, y, z) = ((y+1)^2, 2x(y+1), 0)$;
3. $\vec{a}(x, y, z) = (\cos y, x \sin y, 0)$;
4. $\vec{a}(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$;
5. $\vec{a}(x, y, z) = (zy+1, xz, xy)$;
6. $\vec{a}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x+y+z}, \frac{1}{x+y+z}, \frac{1}{x+y+z} \right)$;
7. $\vec{a}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$;
8. $\vec{a}(x, y, z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y} - \frac{x}{z^2} \right)$;
9. $\vec{a}(x, y, z) = (yz(2x+y+z), xz(x+2y+z), xy(x+y+2z))$;
10. $\vec{a}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$;
11. $\vec{a}(x, y, z) = \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}}, \frac{-x}{\sqrt{(y+z)^3}}, \frac{-x}{\sqrt{(y+z)^3}} \right)$;
12. $\vec{a}(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$;
13. $\vec{a}(x, y, z) = (ye^x \sin z, e^x \sin z, ye^x \cos z)$;
14. $\vec{a}(x, y, z) = (6x+7yz, 6y+7xz, 6z+7xy)$;
15. $\vec{a}(x, y, z) = (2y-2z+1, 2y+2x+3z+2, -2z-2x+3y)$;
16. $\vec{a}(x, y, z) = (x+y, x+z, y-z+10)$;
17. $\vec{a}(x, y, z) = (x+y+z+1, 2y+x+2z+2, -3z+x+2y+1)$;
18. $\vec{a}(x, y, z) = (2y, -z, 2x)$;
19. $\vec{a}(x, y, z) = (x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2))$;
20. $\vec{a}(x, y, z) = (y^2, -x^2 - y^3, z(3y^2 + 1))$;
21. $\vec{a}(x, y, z) = (1+2xy, -y^2z, z^2y - 2zy+1)$;
22. $\vec{a}(x, y, z) = (6y^2, 6z, 6x)$;
23. $\vec{a}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, -xyz^2)$;
24. $\vec{a}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, xy \right)$;
25. $\vec{a}(x, y, z) = (yz \cos xy, xz \cos xy, \sin xy)$;
26. $\vec{a}(x, y, z) = (2e^{2x}(y+1) \cos \sqrt{2}z, e^{2x} \cos \sqrt{2}z, -\sqrt{2}(y+1)e^{2x} \sin \sqrt{2}z)$;

$$27. \vec{a}(x, y, z) = (xz, zy, yx);$$

$$28. \vec{a}(x, y, z) = (y, x, e^z);$$

$$29. \vec{a}(x, y, z) = \left(\frac{yz}{1+x^2y^2z^2}, \frac{zx}{1+x^2y^2z^2}, \frac{xy}{1+x^2y^2z^2} \right);$$

$$30. \vec{a}(x, y, z) = (x^2 + x, 3y^3 + y, z + 4);$$

Задача 7.16. Знайти потік векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$:

а) через зовнішню частину площини P , яка розташована в 1 октанті (нормаль утворює гострий кут з oz);

б) через повну поверхню піраміди в зовнішньому напрямку (формула Гауса-Остроградського);

N°	$\vec{a}(x, y, z) = (a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$	P
1	$(-2x, -y, -z)$	$x + y + z = 2$
2	$\left(\frac{x}{2} + y, 0, z \right)$	$x + y + 2z = 2$
3	$(2x + y, y, 2z)$	$2x + 2y + z = 2$
4	$(5 - 2x, x(x + y), xz)$	$x + y + 2z = 2$
5	$(2 + x, y, z)$	$6x + 3y + 2z = 6$
6	$(3x, 2(y - x), 2z)$	$2x + y + z = 2$
7	$(x, -y, z + 4y)$	$x + y + z = 1$
8	$(3x, 3y, 3z)$	$3x + 2y + 6z = 6$
9	$(x, -y - 4x, -z)$	$2x + y + 2z = 2$
10	$\left(x, 0, z + \frac{3}{2}y \right)$	$3x + 3y + 2z = 6$
11	$(3x - 8, 3y, 3z)$	$3x + 2y + 2z = 6$
12	$(x + 3y, -2, z)$	$x + 3y + 3z = 3$
13	$(x - 2y, 3y, z - 7)$	$x + y + z = 2$
14	$(x + 2y, 0, 2z)$	$x + 2y + 2z = 2$
15	$(2x, -3(2y - x), 3(y + z))$	$3x + y + 3z = 3$
16	$(x - 5, y, z)$	$3x + 3y + z = 3$
17	$(2x, 5y, 5z + 3x)$	$x + y + z = 3$

18	$(2(x+y), y-3, 2z)$	$2x+4y+z=4$
19	$(2x-3, 2y, 2z)$	$2x+4y+z=1$
20	$(2x+y, -5, 2z)$	$4x+2y+z=4$
21	$(4-x, 2-y, -z)$	$x+2y+2z=4$
22	$(-20, y, z+x)$	$x+2y+z=4$
23	$(-x, 7-y, -z)$	$3x+2y+z=6$
24	$(6+x, -3+y, z+2)$	$x+2y+3z=1$
25	$(2x-7, 2y, 2z)$	$2x+y+3z=6$
26	$(8x, 7y-3x, 7z)$	$6x+y+z=2$
27	$(x, y-9, z)$	$2x+y+z=6$
28	$(x+2, -y, z+4y)$	$2x+2y+z=4$
29	$(x, 4y, z-9y)$	$3x+3y+z=6$
30	$(2x, -10+y, z-x)$	$2x+y+2z=2$

Задача 7.17. Знайти потік векторного поля \vec{a} через незамкнену бічну поверхню S в сторону зовнішньої нормалі:

- $\vec{a} = (y^2, x^2, z^2)$, S – бічна сторона циліндра $x^2 + y^2 = 4$ в першому октанті між $z = 0$, $z = 2$.
- $\vec{a} = (0, y^2, z)$, S – бічна сторона параболоїда $x^2 + y^2 = z$, яка відсікається площиною $z = 2$.
- $\vec{a} = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$, S – бічна сторона гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = \sqrt{3}$.
- $\vec{a} = (y, z, x)$, S – бічна сторона циліндра $x^2 + y^2 = 9$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = 4$.
- $\vec{a} = (0, y^2, z)$, S – бічна сторона параболоїда $x^2 + y^2 = 4$, яка відсікається площиною $z = 2$.
- $\vec{a} = (3x, -y, -z)$, S – бічна сторона параболоїда $x^2 + y^2 = 9 - z$, яка розташована в 1 октанті.
- $\vec{a} = (yx, zy, xz)$, S – бічна сторона кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розташована в 1 октанті.
- $\vec{a} = (zx, zy, z^2)$, S – бічна сторона кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, яка розташована в

1 та 2 октанті.

9. $\vec{a} = (x, y, xyz)$, S – бічна сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = 2$, $x > |y|$.
10. $\vec{a} = (xy - y^2, -x^2 + xy + 2x, z)$, S – бічна сторона циліндра $x^2 + y^2 = 9$, яка відсікається $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
11. $\vec{a} = (y^2z, -yz^2, x(y^2 + z^2))$, S – бічна сторона циліндра $z^2 + y^2 = 1$, яка відсікається площинами $x = 0$, $x = 3$.
12. $\vec{a} = (2x, 2y, -z)$, S – бічна сторона конуса $x^2 + y^2 = z^2$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = 4$.
13. $\vec{a} = (x + z, y + x, z + y)$, S – бічна сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = y$.
14. $\vec{a} = (x^2y, xy^2, xyz)$, S – бічна сторона кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, яка розташована в 1 октанті.
15. $\vec{a} = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$, S – бічна сторона кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розташована в $z \geq 0$.
16. $\vec{a} = (x^3 + yz, y^3 + xz, z^3 + xy)$, S – бічна сторона кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка розташована в 1 октанті.
17. $\vec{a} = (xy + x^2, 2y - 2xy, z - yz)$, S – бічна сторона конуса $x^2 + y^2 = z^2$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = 1$.
18. $\vec{a} = (2x, -y, z)$, S – бічна сторона кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, яка відсікається $3z = x^2 + y^2$.
19. $\vec{a} = (x, -xy, z)$, S – бічна сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, яка відсікається площинами $z = 0$, $x + z = 1$.
20. $\vec{a} = (x^3, y^3, z^3)$, S – бічна сторона конуса $x^2 + y^2 = z^2$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = 1$.
21. $\vec{a} = (x + 3z^2, e^x - 2y, 2z - xy)$, S – бічна сторона конуса $z^2 + y^2 = x^2$, яка відсікається площинами $x = 0$, $x = 3$.
22. $\vec{a} = (6x - \cos y, e^z + z, -2y - 3z)$, S – бічна сторона конуса $x^2 + y^2 = 9z^2$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = 1$.
23. $\vec{a} = (\sin z + 2x, \sin x - 3y, \sin y + 2z)$, S – бічна сторона циліндра $x^2 + y^2 = 16$, яка відсікається площинами $z = 0$, $z = 4$.
24. $\vec{a} = (2x, -y, z)$, S – бічна сторона кулі $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, яка відсікається $z = 0$.
25. $\vec{a} = (x^2, y - z, 1)$, S – бічна сторона параболоїда $4 - x^2 - y^2 = z$, яка

відсікається площиною $z = 0$.

26. $\vec{a} = (x^2, z, y)$, S – бічна сторона параболоїда $x^2 + y^2 = z$, яка відсікається площиною $z = 1$.

27. $\vec{a} = (xz, y, x)$, S – бічна сторона параболоїда $z^2 + x^2 = y$, яка відсікається площиною $y = 3$.

28. $\vec{a} = (y + z, xy, xz)$, S – бічна сторона параболоїда $x^2 + y^2 = z$, яка відсікається $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

29. $\vec{a} = (xz, yz, xy)$, S – бічна сторона циліндра $z^2 + x^2 = 4$, яка відсікається площинами $y = 0$, $y = 3$.

30. $\vec{a} = (zx - y, yz, xyz)$, S – бічна сторона кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка відсікається $z \geq 0$.

Задача 7.18. Знайти циркуляцію векторного поля \vec{a} вздовж контуру L , який орієнтований за годинниковою стрілкою при погляді на нього з початку координат:

№	$\vec{a}(x, y, z) = (a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$	L
1	$(x^3, xy, z^2 + y)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x = 1$.
2	$(x^2 + z, y, z^3)$	$y^2 = x^2 + z^2$, $y = 2$
3	$(2x + 4y, 7x - 3y, 2xy + z^2)$	$x^2 + y^2 = (z - 4)^2$, $z = 2$.
4	$(y, -x, z)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.
5	(zx, xy, yz)	$y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$.
6	$(y^2, xy, x^2 + y^2)$	$x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$
7	$(ye^{-xy}, xe^{-xy}, xyz)$	$x^2 + y^2 = (z - 1)^2$, $z = 0$.
8	(xy, yz, xz)	$x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 1$.
9	$(y + z, x - z, x + y)$	$x^2 + y^2 = 9$, $x + y + z = 1$.
10	$(2x + z, 2y + x, 2z + y)$	$z = x^2 + y^2$, $z = 4$.
11	$(x, y^2 + x, z - x)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$.
12	$(y - 4x, 4x + 2y, x - y^2)$	$x^2 + y^2 = (z + 3)^2$, $z = -5$.
13	$(3x, x + y, yz)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z = 1$.
14	$(2x - y, x + 2y, z)$	$4z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$.
15	$(x^2, x + y, y + z)$	$x^2 + y^2 = 25$, $x + y + z = 1$.

16	$(2x+3z, 3x-y, 3y^2-z)$	$x^2+y^2=(z-4)^2, z=6.$
17	$(x^3, 3y+x, z^3)$	$z=4x^2+4y^2, z=1.$
18	$(2xz, x+2y, 2yz)$	$x^2+y^2+z^2=25, z=3.$
19	$(x^2+y, x+y^2, y+z^2)$	$x^2=9(y^2+z^2), x=2.$
20	(xy, yz, xz)	$x+y+z=1, 1 \text{ октант}$
21	(y^2, z^2, x^2)	$x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=2x, z \geq 0.$
22	$(x-3y, 5x-3y, 2x-y^2)$	$x^2+y^2=(z-1)^2, z=-1.$
23	$(2y+z, 3x, 2xz)$	$z=9(x^2+y^2), z=4.$
24	$(3x+2y, 3y+2z, 2x+3z)$	$x^2+y^2=4, x+y+z=1.$
25	$(x^3+y, x+y^3, y+z^3)$	$x=y^2+z^2, x=9.$
26	$(x+2y, 3y+x, 2xz)$	$x^2+y^2+z^2=10, z=1.$
27	$(xz+y, -yz+x, y^2-x^2)$	$x^2+y^2=1, z=4.$
28	$(y^2, -x^2, z^2)$	$x^2+y^2=1-y, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
29	$(y, -x, z)$	$x^2+y^2+z^2=4, z=\sqrt{x^2+y^2}.$
30	$(z, -x, y)$	$z=x^2+y^2-10, z=-1.$

4. Функції комплексної змінної.

Теорія: [9, гл.1].

Методика розв'язання: [4, гл.18].

1. Головні функції комплексної змінної. Диференціювання функцій комплексної змінної.

Задача 8.1. Записати задане комплексне число z_0 в тригонометричній та показниковій формі, знайти z_0^4 та $\sqrt[3]{z_0}$:

$$1. z_0 = \frac{20}{1+8i};$$

$$11. z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i};$$

$$21. z_0 = \frac{-\sqrt{3}+i}{-5+5\sqrt{3}i};$$

$$2. z_0 = \frac{2+i}{2-i};$$

$$12. z_0 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}i};$$

$$22. z_0 = \frac{-\sqrt{3}+i}{1-i};$$

3. $z_0 = \frac{i-4}{i+4};$	13. $z_0 = \frac{-2+2i}{\sqrt{3}-i};$	23. $z_0 = \frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i};$
4. $z_0 = \frac{4+5i}{4-5i};$	14. $z_0 = \frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i};$	24. $z_0 = \frac{\sqrt{3}-i}{-3+3\sqrt{3}i};$
5. $z_0 = \frac{2-3i}{1+4i};$	15. $z_0 = \frac{\sqrt{3}-i}{-2+2\sqrt{3}i};$	25. $z_0 = \frac{-1+i}{2-2i};$
6. $z_0 = \frac{2-i}{1+i};$	16. $z_0 = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i};$	26. $z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i};$
7. $z_0 = \frac{2+3i}{\sqrt{3}+i};$	17. $z_0 = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{-3+3i};$	27. $z_0 = \frac{-1-i}{1+i};$
8. $z_0 = \frac{4-i}{1+\sqrt{3}i};$	18. $z_0 = \frac{\sqrt{3}-i}{-2+2i};$	28. $z_0 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{-3-3\sqrt{3}i};$
9. $z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i};$	19. $z_0 = \frac{-4-4i}{-\sqrt{3}+i};$	29. $z_0 = \frac{2-2\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i};$
10. $z_0 = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i};$	20. $z_0 = \frac{-4-4i}{-3+3\sqrt{3}i};$	30. $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i};$

Задача 8.2. Зобразити область, яка задана співвідношенням:

1. $\text{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}.$	16. $ z-3 < \bar{z}.$
2. $ z-i < 2, 0 < \text{Im } z < 2.$	17. $ z-4 < 1-4\bar{z} .$
3. $1 < z\bar{z} < 2, \text{Re } z > 0, \text{Im } z \leq 1.$	18. $\frac{3}{4} < \text{Im } z + z ^2 < \frac{7}{4}.$
4. $ z - \text{Re } z < 2.$	19. $\text{Re}(z+2+3i) + \text{Im}(z-3i) < 1.$
5. $ z-1 < 1, \arg z < \frac{\pi}{4}.$	20. $0 < \arg(z-2) < \frac{\pi}{2}.$
6. $\text{Re} \frac{i}{z} > 2.$	21. $ z-2+2i > 1, 1 < \text{Re } z < 3.$
7. $ z-3 - z+3 > 4.$	22. $\text{Re}(2z+3) > z\bar{z}.$
8. $ z > 2 + \text{Im } z.$	23. $ z+i-1 < 1, 1 < \text{Re } z < \frac{3}{2}.$
9. $\text{Im } z^2 < 1.$	24. $z \cdot \bar{z} < 25, \text{Re } \bar{z} < 2.$
10. $ \text{Re } z + \text{Im } z \leq 1.$	25. $ z+1 > 1, \text{Im } z < 5.$
11. $\text{Re}(iz)^2 > 0.$	26. $1 < z+5i < 5, -\frac{\pi}{2} < \arg z < 0.$
12. $ 1+z < 2-z .$	27. $1 < z-1 < 3, \text{Im } z > 0.$

$$13. \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 3.$$

$$14. \operatorname{Im}(z - i) \geq 2.$$

$$15. 2 < |z - 1 + 2i| < 4.$$

$$28. |z| < 3, |\operatorname{Im} z| < 1.$$

$$29. |z + 3 - i| > 2, |z + 1 + i| < 3.$$

$$30. |z + 2| > 1, |z + 3 + 2i| < 2.$$

Задача 8.3. Представити в алгебраїчній формі:

$$1. (-1 + i\sqrt{3})^{-3i}.$$

$$2. \operatorname{Arctg}(1 + i).$$

$$3. \operatorname{Arth}(1 + \sqrt{3}i).$$

$$4. \cos(2 - i).$$

$$5. \operatorname{sh}(-2 + i).$$

$$6. \operatorname{th}(\ln 3 + \frac{\pi}{4}i).$$

$$7. e^{e^{\frac{\pi}{2}i}}.$$

$$8. (-2)^{\sqrt{-1}}.$$

$$9. \operatorname{Arcsin}(2i).$$

$$10. \operatorname{Arcsin}(-1 + i).$$

$$11. \operatorname{th}(\pi i).$$

$$12. (1 + i)^{-i}.$$

$$13. \operatorname{Arcsin}(4i).$$

$$14. \operatorname{Arccos}(1 - i).$$

$$15. \operatorname{Arth}(i).$$

$$16. \operatorname{tg}(\pi i).$$

$$17. 2^{1-i}.$$

$$18. (1 - \sqrt{3}i)^{1-i}.$$

$$19. \operatorname{Arsh}(1 - i).$$

$$20. (-i)^{5i}.$$

$$21. \operatorname{cth}(\pi i).$$

$$22. \operatorname{Arcsin}(-1 + i).$$

$$23. (-1 - i)^{-i}.$$

$$24. \operatorname{sh}(2 - i).$$

$$25. \operatorname{Arccos}(i - 1).$$

$$26. \operatorname{Arctg}(\sqrt{3}i - 1).$$

$$27. \operatorname{Arth}(2i - 2).$$

$$28. \operatorname{ch}(1 + \frac{\pi}{2}i).$$

$$29. \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1-i}.$$

$$30. \operatorname{Arcsin}(5i).$$

Задача 8.4. З'ясувати, чи є функція аналітичною:

$$1. f(z) = \frac{z + i}{\operatorname{Re}(z - i)}.$$

$$2. f(z) = e^{z^2} - \operatorname{Im}(z - 2i).$$

$$3. f(z) = \operatorname{Re} \frac{z + 1}{z - i}.$$

$$4. f(z) = \frac{i \cdot \bar{z}}{|z|^2}.$$

$$5. f(z) = z \cdot \bar{z} + e^{|z|}.$$

$$6. f(z) = i|z| + 2i + 1.$$

$$7. f(z) = z^2 \operatorname{Re}(z - 1).$$

$$8. f(z) = ze^{\bar{z}}.$$

$$16. f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}.$$

$$17. f(z) = \bar{z} + z^3.$$

$$18. f(z) = z^3 + \operatorname{Im} z.$$

$$19. f(z) = (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Re} z.$$

$$20. f(z) = xy - \frac{1}{2}i(x^2 - y^2).$$

$$21. f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

$$22. f(z) = z \cdot (\bar{z})^2.$$

$$23. f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2).$$

9. $f(z) = e^{z^2} + 4z^2$.
 10. $f(z) = |z| \operatorname{Re}(shz)$.
 11. $f(z) = z^2 \operatorname{Im}(4i + z)$.
 12. $f(z) = \frac{x^3}{3} + x^2 yi$.
 13. $f(z) = |z|^2 \cdot \bar{z}$.
 14. $f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z$.
 15. $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$.
 24. $f(z) = 3x^2 y - y^3 - i(x^3 - 3xy^2)$.
 25. $f(z) = -e^x \cos y + ie^x \sin y$.
 26. $f(z) = \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z$.
 27. $f(z) = \frac{2-i}{1+2i}$.
 28. $f(z) = (\bar{z})^2$.
 29. $f(z) = \operatorname{Re} z + shz$.
 30. $f(z) = chz + \cos z$.

Задача 8.5. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її відомою дійсною або уявною частиною:

1. $v = \frac{y}{x^2} + y^2$.
 2. $u = x^3 + 6x^2 y - 3x^2 y - 2y^3$.
 3. $u = y^3 - 3x^2 y - y$.
 4. $v = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.
 5. $u = x^3 - 3xy^2 + 2x + 1$.
 6. $u = x^3 - 3y^2 x + 2$.
 7. $u = x^2 - y^2 + 5x - y + \frac{y+4}{1+x^2+y^2}$.
 8. $u = 3(x^2 - y^2) - 2x + 1$.
 9. $v = 3x^2 y - y^3$.
 10. $u = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{1+x^2+y^2} \right)$.
 11. $v = \frac{y}{2} \left(1 + \frac{1}{1+x^2+y^2} \right)$.
 12. $u = \sin xchy$.
 13. $v = -\cos xchy$.
 14. $u = \cos xchy$.
 15. $v = \sin xshy$.
 16. $v = shx \sin(y-2)$.
 17. $u = 3shx \cos y + x^3 - 3xy^2$.
 18. $v = e^{x-4} (y \cos y + x \sin y)$.
 19. $u = \frac{y}{x^2 + y^2} + x^2 - y^2$.
 20. $u = \cos xchy - shx \cos y$.
 21. $v = \frac{-2x}{x^2 + y^2} + 2 \cos xchy$.
 22. $v = 2xy - ch2x \sin 2y$.
 23. $u = x^2 - y^2 + 4$.
 24. $v = e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y$.
 25. $v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$.
 26. $v = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y$.
 27. $v = y^3 - 3x^2 y$.
 28. $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.
 29. $v = x^3 - 3xy^2$.
 30. $v = 3x + 2xy$.

2. Інтегрування функцій комплексної змінної.

Задача 8.6. Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної

$\int_L f(z) dz$ за кривою L :

№	$f(z)$	L
1	$\bar{z} \cdot z$	$ z-i =1$, від точки 0 до i .
2	$z+2\bar{z}$	$ z =1$, $\arg z \in [0, \pi/2]$.
3	$\operatorname{Re}(\sin z) \cos z$	Відрізок $-2+2i \rightarrow 2+2i$.
4	$e^{iz} \cos 2z$	$ z-\frac{i}{2} =\frac{1}{2}$, $\arg z \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
5	$z \operatorname{Re} z^2$	Відрізок $0 \rightarrow 1+i$.
6	$ z $	$ z-1 =1$, $0 \leq \operatorname{Im} z$.
7	$ z-1 \bar{z}$	$ z =1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.
8	$\frac{1}{z}$	$ z =1$, $\operatorname{Im} z \leq 0$.
9	$\operatorname{Im} z$	Ламана $0 \rightarrow i \rightarrow 2+i$.
10	\bar{z}	Трикутник: $z=0$, $z=1$, $z=i$.
11	$z \operatorname{Re} z$	Ламана: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1+3i$.
12	$e^{ \bar{z} }$	Відрізок: $-i \rightarrow 2+i$.
13	$\frac{\ln^3 z}{z}$	Відрізок: $2 \rightarrow 1+i$.
14	$\bar{z} \operatorname{Re} z^2$	Відрізок: $0 \rightarrow 2+2i$.
15	$z \operatorname{Re} \bar{z}$	$ z =1$, $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
16	$z- z $	$ z =1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.
17	$z^2 \operatorname{Im} z$	Відрізок: $0 \rightarrow 1-2i$.
18	$ z $	$ z-i =1$.
19	$\frac{1}{z^2}$	$ z =1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.
20	$\operatorname{Im}\left(\frac{ \bar{z} }{i-1}\right)$	Відрізок: $0 \rightarrow 1$.
21	$\bar{z}-2i$	$ z =1$, $\arg z \in [0, \pi]$.
22	$\bar{z} \operatorname{Im}(2iz)$	Ламана: $0 \rightarrow -1+i \rightarrow 1+i$.
23	$\operatorname{Im}(z-3+i)$	$ z =4$.
24	$(z-6i)e^{-2z}$	Відрізок: $0 \rightarrow 1+i$.

25	$\frac{z}{\operatorname{Re} z}$	Дуга параболи $y = x^2 + 1, i \rightarrow 2 + 5i.$
26	$\frac{(\bar{z})^2}{\operatorname{Re} z}$	Ламана: $1 + i \rightarrow 1 + 5i \rightarrow 5i.$
27	$2z + 3\bar{z}$	$ z = 1, \arg z \in [0, \pi].$
28	$\operatorname{Re} z$	Трикутник: $z = 0, z = 2, z = 2 + i.$
29	ze^{z^2}	$ z = 2, \arg z \in [0, \pi].$
30	$(z^2 - \bar{z}^2)^2$	Відрізок: $1 \rightarrow 1 + i.$

Задача 8.7. Обчислити інтеграл за формулою Коші:

$$1. \oint_{|z|=2,5} \frac{e^z dz}{(z^2 + 4)(z - 3)}.$$

$$16. \oint_{|z|=5} \frac{e^{tgz} dz}{z^2}.$$

$$2. \oint_{|z-2|=1} \frac{(z^2 + 1) dz}{(z + 3)(z - 2)^2}.$$

$$17. \oint_{|z-2|=1} \frac{e^z dz}{(z + 1)^3(z - 2)}.$$

$$3. \oint_{|z-5i|=1} \frac{e^z dz}{(z^2 + 5)(z + 1)}.$$

$$18. \oint_{|z|=4} \frac{\sin z dz}{(z - 2i)^2}.$$

$$4. \oint_{|z-3|=1} \frac{(z^2 + 2) dz}{(z + 4)(z - 3)^2}.$$

$$19. \oint_{|z|=1} \frac{shz dz}{z^2(z - 2)}.$$

$$5. \oint_{|z-4|=1} \frac{z^2 dz}{(z + 1)(z - 4)^2}.$$

$$20. \oint_{|z+5|=1} \frac{e^z dz}{(z^2 - 1)(z + 5)}.$$

$$6. \oint_{|z-4-3i|=5} \frac{dz}{(z^2 + 3)(z - 4)}.$$

$$21. \oint_{|z+3|=1} \frac{(z + 2) dz}{(z + 3)^2(z^2 + 4)}.$$

$$7. \oint_{|z+2|=1} \frac{\sin z dz}{(z + 2)^2(z + 4)}.$$

$$22. \oint_{|z+2+3i|=4} \frac{(z - 2) dz}{(z^2 + 3)(z + 2)}.$$

$$8. \oint_{|z|=2} \frac{ch \frac{\pi}{3} dz}{z^2 + 1}.$$

$$23. \oint_{|z+4|=1} \frac{(z^2 + 4) dz}{(z^2 + 1)(z + 4)^2}.$$

$$9. \oint_{|z|=4} \frac{z dz}{(z^2 + 1)(z - 2)}.$$

$$24. \oint_{|z-\sqrt{5}i|=1} \frac{z dz}{(z^2 + 5)(z^2 + 16)}.$$

$$10. \oint_{|z+2i|=3} \frac{\cos z dz}{(z + i)^2}.$$

$$25. \oint_{|z-2i|=1} \frac{(z^2 + 2) dz}{(z^2 + 4)(z - 2i)^2}.$$

$$11. \oint_{|z-1|=2} \frac{(z + 1) dz}{z^3(z - 2)}.$$

$$26. \oint_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)}.$$

$$12. \oint_{|z-2i|=1} \frac{(z^2-9) dz}{(z-2i)^2}.$$

$$13. \oint_{|z+5|=1} \frac{(z+1) dz}{z^2+4z-5}.$$

$$14. \oint_{|z|=3} \frac{(2z^2-1) dz}{z^3}.$$

$$15. \oint_{|z+3i|=1} \frac{z dz}{(z^2+9)^2}.$$

$$27. \oint_{|z|=2.5} \frac{e^z dz}{(z^2+9)z^2}.$$

$$28. \oint_{|z-4i|=1} \frac{(z+5) dz}{(z-4i)^2(z^2+1)}.$$

$$29. \oint_{|z|=2.5} \frac{chz dz}{z^2(z-3)}.$$

$$30. \oint_{|z+3|=3} \frac{\sin 2z dz}{(z+3)^2(z-4)}.$$

3. Розвинення функцій в ряд Тейлора та Лорана. Класифікація особливих точок.

Задача 8.8. а) Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки z_0 та знайти радіус збіжності.

б) Розкласти дріб в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$ та знайти радіус збіжності.

$$1. \text{ а) } \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{б) } \frac{3z+1}{z^2+2z-3}.$$

$$2. \text{ а) } \sin^2 2z, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{б) } \frac{z-6}{z^2+4z-5}.$$

$$3. \text{ а) } \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{б) } \frac{4}{z^2+z-2}.$$

$$4. \text{ а) } \ln(z+5), \quad z_0 = 1.$$

$$\text{б) } \frac{4z-3}{z^2+z-6}.$$

$$5. \text{ а) } \ln(z^2-5z+6), \quad z_0 = 7.$$

$$\text{б) } \frac{2z+1}{z^2+3z+2}.$$

$$6. \text{ а) } \frac{1}{\sin z}, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{б) } \frac{z-2}{z^2+3z-4}.$$

$$7. \text{ а) } \sin(z+1), \quad z_0 = 1+i.$$

$$\text{б) } \frac{z}{z^2-z-6}.$$

$$8. \text{ а) } z^3 e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{б) } \frac{z+11}{z^2-4z-5}.$$

$$9. \text{ а) } z^2 \cos \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$$\text{б) } \frac{3z+1}{z^2+5z+6}.$$

$$10. \text{ а) } z \ln(1+z), \quad z_0 = i.$$

$$\text{б) } \frac{z-7}{z^2-3z+2}.$$

$$11. \text{ а) } shz, \quad z_0 = 1-2i.$$

$$\text{б) } \frac{4z}{z^2+4z+3}.$$

12. a) $\cos(z+2i)$, $z_0 = 2+2i$. б) $\frac{3-3z}{z^2-7z+10}$
13. a) chz , $z_0 = 2+i$. б) $\frac{7-z}{z^2-2z-3}$.
14. a) $zarctg(z-2i)$, $z_0 = -1+2i$. б) $\frac{2z+1}{z^2+z-12}$.
15. a) $sh2z$, $z_0 = 1-i$. б) $\frac{z-8}{z^2-2z-8}$.
16. a) $ch2z$, $z_0 = -1+i$. б) $\frac{2z}{z^2-4z+3}$.
17. a) $zarctg(z+i)$, $z_0 = -i$. б) $\frac{2-3z}{z^2-6z+8}$.
18. a) $\cos(z-i)$, $z_0 = 1+3i$. б) $\frac{3z+5}{z^2+5z+4}$.
19. a) $sh(z+i)$, $z_0 = 3-i$. б) $\frac{z-7}{z^2-5z+4}$.
20. a) $ch3z$, $z_0 = 2-2i$. б) $\frac{3z-7}{z^2-6z+5}$.
21. a) $\ln(1+z)$, $z_0 = 2$. б) $\frac{z+6}{z^2+4z+3}$.
22. a) $\cos(z-2i)$, $z_0 = 3+2i$. б) $\frac{4z}{z^2+6z+5}$.
23. a) $\cos z$, $z_0 = 1+2i$. б) $\frac{z-1}{z^2-5z+6}$.
24. a) $sh(z+i)$, $z_0 = 2-i$. б) $\frac{z-9}{z^2+3z-10}$.
25. a) $ch2z$, $z_0 = 1+i$. б) $\frac{3z+6}{z^2-2z+1}$.
26. a) $z \ln(z+1)$, $z_0 = i$. б) $\frac{z-12}{z^2-3z-10}$.
27. a) $\cos(z+2i)$, $z_0 = 1-i$. б) $\frac{z+8}{z^2+6z+8}$.
28. a) $\cos(z-i)$, $z_0 = 2+i$. б) $\frac{2z-7}{z^2-7z+12}$.
29. a) $z \sin z$, $z_0 = 2-i$. б) $\frac{z-10}{z^2-2z-8}$.
30. a) $\cos(2z-i)$, $z_0 = 2+i$. б) $\frac{z-18}{z^2-z-12}$.

Задача 8.9. Розкласти функцію в ряд Лоранаа) в околі точки z_0 .б) в заданій області за степенями z .

Виділити головну та регулярну частину ряду Лорана.

1. а) $z \sin \frac{1}{z+1}$, $z_0 = -1$.

б) $\frac{3z}{z^2 - 7z + 10}$, $2 < |z| < 5$.

2. а) $\cos \frac{z-2}{z}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{1}{z^2 - 5z + 6}$, $2 < |z| < 3$.

3. а) $e^{\frac{z}{z+3}}$, $z_0 = -3$.

б) $\frac{1}{z^2 + z}$, $0 < |z| < 1$.

4. а) $\frac{2 + e^z - e^{-z}}{z^2}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{z}{z^2 - 3z + 2}$, $1 < |z| < 2$.

5. а) $e^{\frac{2}{2-z}}$, $z_0 = 2$.

б) $\frac{4 + 2z}{z^2 + 4z + 3}$, $1 < |z| < 3$.

6. а) $z^4 \cos \frac{2}{z}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{-z - 8i}{z^2 + iz + 6}$, $2 < |z| < 3$.

7. а) $z^5 e^{\frac{1}{z^2}}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(3+2i)z - 4(1+3i)}{z^2 - 2iz + 8}$, $2 < |z| < 4$.

8. а) $\cos \frac{2}{z} + z \sin \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(5+3i)z + 6 + 5i}{z^2 - iz + 2}$, $1 < |z| < 2$.

9. а) $\frac{\sin z}{z^5}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(3+5i)z + 15 + 6i}{z^2 - iz + 6}$, $2 < |z| < 3$.

10. а) $\frac{chz}{z^3}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(5+2i)z - 6 - 5i}{z^2 + 2iz + 3}$, $1 < |z| < 3$.

11. а) $\frac{e^{-z}}{z^3}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(3+2i)z + 2 + 15i}{z^2 + 4iz + 5}$, $1 < |z| < 5$.

12. а) $\cos \frac{1}{z} + ch \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(3+5i)z - 40 - 6i}{z^2 + 6iz + 16}$, $2 < |z| < 8$.

13. а) $z^4 sh \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(2+3i)z - 23}{(z+i)(z-10)}$, $1 < |z| < 10$.

14. а) $z^3 \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right)$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(1+i)z - 2}{(z-1)(z+4i)}$, $1 < |z| < 4$.

15. а) $\sin \frac{1}{z} + sh \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{(2-i)z + i}{(z+4i)(z-3)}$, $3 < |z| < 4$.

16. а) $\frac{e^{-2z^2}}{z^3}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{z-2}{z^2+4z}$, $0 < |z| < 4$.

17. а) $\frac{\ln(1+z^2)}{z^4}$, $z_0 = 0$.

б) $\frac{z}{(z+1)(z+4)}$, $1 < |z| < 4$.

18. а) $\sin \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = i$. б) $\frac{z}{z^2 - 4z + 3}$, $1 < |z| < 3$.
19. а) $\cos \frac{3z}{z-i}$, $z_0 = i$. б) $\frac{z^2 + 8z + 1}{(z-1)(z^2 + 9)}$, $1 < |z| < 3$.
20. а) e^{2z} , $z_0 = \pi i$. б) $\frac{z-2}{z^2 + 4z}$, $0 < |z| < 4$.
21. а) $\sin 3z \cos z$, $z_0 = 0$. б) $\frac{z}{(z+1)(z-2)^2}$, $1 < |z| < 2$.
22. а) $\frac{e^{-z} + 3 \cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$. б) $\frac{z-3}{z^2 - 3z + 2}$, $1 < |z| < 2$.
23. а) $z^2 \cos \frac{1}{z-3}$, $z_0 = 3$. б) $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$, $1 < |z| < 3$.
24. а) $(2z-1) \sin \frac{3}{z-2}$, $z_0 = 2$. б) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $1 < |z| < 2$.
25. а) $\frac{\cos^2 z}{z}$, $z_0 = 0$. б) $\frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $1 < |z| < 2$.
26. а) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$. б) $\frac{1}{z(z-3)^2}$, $0 < |z| < 3$.
27. а) $e^{\frac{1}{z-2}}(z-2)^3$, $z_0 = 2$. б) $\frac{z}{(z-2)(z+4)}$, $2 < |z| < 4$.
28. а) $(z-i)^2 \cos \frac{1}{z-i}$, $z_0 = i$. б) $\frac{1}{(z-4)(z-6)}$, $4 < |z| < 6$.
29. а) $\sin \frac{1}{(z-i)^2}$, $z_0 = i$. б) $\frac{z-1}{z^2 - z - 6}$, $2 < |z| < 3$.
30. а) $(z+2) \sin \frac{1}{z+2}$, $z_0 = -2$. б) $\frac{z}{(z+4)(z-6)}$, $4 < |z| < 6$.

Задача 8.10. Знайти всі особливі точки та встановити їх тип:

1. $\frac{\sin 4z}{z(z-16\pi)^4}$. 11. $\frac{\sqrt{e^z-1}}{\cos z-1} e^{\frac{1}{z}}$. 21. $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$.
2. $z \cos \frac{1}{z^2}$. 12. $\frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2+1)}$. 22. $\frac{\cos z - 1}{\sqrt{e^z-1}} \sin \frac{1}{z}$.
3. $\frac{z \cos z + (z - \frac{\pi}{2}) \sin z}{z(z - \frac{\pi}{2})^2}$. 13. $\frac{chz-1}{z\sqrt{z}}$. 23. $\frac{e^{z^3}-1}{e^z-1}$.

- | | | |
|--|--|---|
| 4. $\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{2\sin^2 z}$. | 14. $\frac{\cos\frac{\pi}{4}z}{z^4-16}$. | 24. $\frac{\cos z^3-1}{chz-1-\frac{z^2}{2}}$. |
| 5. $\frac{\sqrt{\sin z}(z-\pi)}{e^{iz}-1}$. | 15. $\frac{\sqrt{e^z-1}}{\sqrt{\sin z}}$. | 25. $\frac{e^z \sin z}{z^4(\cos 3z-1)}$. |
| 6. $\frac{e^z-1}{\sin \pi z}$. | 16. $z \operatorname{tg} z \cdot e^{\frac{1}{z}}$. | 26. $(z-1)e^{\frac{z+\frac{1}{z}}{z^2}}$. |
| 7. $\frac{z\sqrt{z}}{e^z-1}$. | 17. $\frac{1}{z^2}-\sin\frac{1}{z^2}$. | 27. $\frac{z \sin \pi z}{\sin^2 z}$. |
| 8. $\frac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$. | 18. $\frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}(e^z-1)}{\sqrt{\sin z}}$. | 28. $\frac{2 \sin \frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z-3)^3}$. |
| 9. $\frac{\sqrt{\cos z-1}}{\sqrt{\sin z}}$. | 19. $\frac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$. | 29. $\frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2 \sin 5\pi z}$. |
| 10. $\frac{\sin \pi z}{z^4-1} e^{\frac{1}{z}}$. | 20. $\frac{\sqrt{\sin z}}{\sqrt{\cos z-1}}$. | 30. $\frac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)} e^{\frac{1}{z}}$. |

4. Лишки та їх застосування.

Задача 8.11. Користуючись основною теоремою теорії лишків, обчислити інтеграл:

- | | |
|--|--|
| 1. а) $\oint_{ z =3} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{(z-2i)^3} dz.$ | б) $\oint_{ z =1} \frac{\cos 3z-1+\frac{9}{2}z^2}{z^4 \sin \frac{9}{4}z} dz.$ |
| 2. а) $\oint_{ z =2} \frac{2-z^3}{z(z-1)^3} dz.$ | б) $\oint_{ z =2} z \cos^2 \frac{1}{z} dz.$ |
| 3. а) $\oint_{ z =1} (3z^2+i) \sin \frac{1}{z} dz.$ | б) $\oint_{ z =0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz.$ |
| 4. а) $\oint_{ z =2} \frac{1-z^3}{z^4-1} dz.$ | б) $\oint_{ z+i =5} (z+5)e^{\frac{1}{z+1}} dz.$ |
| 5. а) $\oint_{ z+i =2} \frac{e^z}{z^4} dz.$ | б) $\oint_{ z =0,2} \frac{e^{8z}-ch 4z}{z \sin 4\pi z} dz.$ |
| 6. а) $\oint_{ z =2} \frac{e^{-z}}{z(z^2+1)} dz.$ | б) $\oint_{ z =8} \cos \frac{z}{z+2} dz.$ |

$$7. \text{ a) } \oint_{|z+i|=1} \frac{z}{(z-i)(z+i)^3} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{shz} dz.$$

$$8. \text{ a) } \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=0,5} \frac{ch3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz.$$

$$9. \text{ a) } \oint_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z+\pi)^3} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \cdot sh^2 4iz} dz.$$

$$10. \text{ a) } \oint_{|z+1|=1,5} \frac{\sin^2 z}{z^2(4z^2 - \pi^2)} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1} (z-3)e^{\frac{1}{z}} dz.$$

$$11. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{(z-i)^2}{z^3-z} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z-1|=3} z^2 \sin \frac{1}{z-2} dz.$$

$$12. \text{ a) } \oint_{|z+2i|=1} \frac{1}{z(z+2i)^3} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z+6|=2} \left(ze^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2 \sin \frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2(z+3)} \right) dz.$$

$$13. \text{ a) } \oint_{|z-1|=2} \frac{z^8}{(z-1)^4} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=0,2} \frac{ch2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz.$$

$$14. \text{ a) } \oint_{|z-1|=\frac{1}{4}} \frac{e^z}{z^3-1} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z+4|=2} \left(z \cos \frac{1}{z+4} + \frac{2 \cos \frac{\pi z}{6}}{(z+3)^2(z+1)} \right) dz.$$

$$15. \text{ a) } \oint_{|z-3|=1} \frac{\cos z - 1}{z^2(z-\pi)^2} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1} \frac{tgz - z}{(1 - \cos z)^2} dz.$$

$$16. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{e^z \cos z}{(z-i)^3} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=3} \left(zch \frac{1}{z+2} - \frac{2 \cos \frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)} \right) dz.$$

$$17. \text{ a) } \oint_{|z-i|=2} \frac{1-iz}{z^2(z-1)} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1} \left(z^3 \sin \frac{1}{z^3} + shz \cdot e^{-z} \right) dz.$$

$$18. \text{ a) } \oint_{|z-i|=2} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z(z-i)^2} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=3} \frac{(z^4+1) \cos \frac{1}{z}}{(z^2+1)(z^3-1)} dz.$$

$$19. \text{ a) } \oint_{|z|=0,3} z^3 e^{\frac{2}{z^2}} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2 \sin^2 2z} dz.$$

$$20. \text{ a) } \oint_{|z|=1} (12z^3 + zi) \cos \frac{1}{z} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{e^z \cos z}{(z-i)^3} dz.$$

$$21. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{z^2}{\sin 2z} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=4} \frac{z^2 \sin \frac{1}{z}}{(z-2)(z+3)} dz.$$

$$22. \text{ a) } \oint_{|z|=2} (30z^5 + zi) \operatorname{ch} \frac{1}{z} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=0,3} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \cdot \operatorname{sh} 8iz} dz.$$

$$23. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{e^{zi}}{z^2 + 1} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z-5|=2} \left(z \operatorname{ch} \frac{2}{z-5} + \frac{4 \sin \frac{\pi z}{4}}{(z-4)^2(z-2)} \right) dz.$$

$$24. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z+i|=2} z e^{1+\frac{2}{z}} dz.$$

$$25. \text{ a) } \oint_{|z|=3} \frac{z^3}{\cos z} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z-3|=2} \left(z \operatorname{sh} \frac{1}{z-3} - \frac{2 \cos \frac{\pi z}{8}}{(z-4)^2(z-6)} \right) dz.$$

$$26. \text{ a) } \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z-1|=2} \left(z e^{\frac{2}{z-1}} + \frac{4 \cos \frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)} \right) dz.$$

$$27. \text{ a) } \oint_{|z|=2} \frac{2}{(z^2 + 2z - 3)^2} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=2} \left(z \sin \frac{z}{z+1} - \frac{\cos \frac{\pi z}{2}}{z^4 - 2} \right) dz.$$

$$28. \text{ a) } \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z^3 + 1)^2} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z+1|=\frac{1}{3}} \left((z+1) \cos^2 \frac{1}{z+1} + z e^{z^2} \right) dz.$$

$$29. \text{ a) } \oint_{|z-1|=2} \frac{\operatorname{ch} 2z}{z^3 - z^5} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=2,9} \frac{\cos z - 1}{z^4 (z - \pi)^3} dz.$$

$$30. \text{ a) } \oint_{|z-2|=1} \frac{z^3}{(z+i)(z-2)^2} dz.$$

$$\text{б) } \oint_{|z|=1} \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$$

Задача 8.12. Обчислити інтеграл за допомогою лишків.

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5 + 4 \cos x} dx.$$

$$16. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{4 + \cos x} dx.$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} dx.$$

$$17. \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 - 4 \sin x} dx.$$

$$3. \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx.$$

$$18. \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{17 - 8 \cos x} dx.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{2 - \sin^2 x} dx.$$

$$19. \int_0^{2\pi} \frac{1}{(4 + \cos x)^2} dx.$$

5. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos x)^2} dx.$
6. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{10 - 6 \cos x} dx.$
7. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 5 \cos^2 x} dx.$
8. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(7 + \sin x)^2} dx.$
9. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{5} + \sin x)^2} dx.$
10. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sin x)^2} dx.$
11. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{2 + \cos x} dx.$
12. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + 2 \cos x)^2} dx.$
13. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 + \sin x)^2} dx.$
14. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$
15. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 - 4 \cos x} dx.$
20. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx.$
21. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{17 - 8 \cos x} dx.$
22. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{13 + 12 \cos x} dx.$
23. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(10 - 6 \cos x)^2} dx.$
24. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 4 \cos x)^2} dx.$
25. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$
26. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(7 + 3 \cos x)^2} dx.$
27. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 - 2\sqrt{2} \sin x)^2} dx.$
28. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 + 2\sqrt{6} \sin x)^2} dx.$
29. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 4 \sin x)^2} dx.$
30. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{15} \sin x - 4)^2} dx.$

Задача 8.13. Обчислити інтеграл за допомогою лишків.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 4)^2} dx.$
3. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$
4. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 25)^2} dx.$
5. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 9)^2} dx.$
16. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{(x^2 + 25)^2} dx.$
17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 25)^2(x^2 + 1)} dx.$
18. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 4x}{(9x^2 + 1)^2} dx.$
19. $\int_0^{\infty} \frac{z^2 + 1}{(4x^2 + 1)^2} dx.$
20. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx.$

- | | |
|--|---|
| 6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx.$ | 21. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx.$ |
| 7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4 + 4x^2 + 8} dx.$ | 22. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 4x + 5} dx.$ |
| 8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$ | 23. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 2x + 2} dx.$ |
| 9. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)} dx.$ | 24. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 4x + 5} dx.$ |
| 10. $\int_0^{\infty} \frac{(x^2 + 1)\sin x}{x^4 + 10x^2 + 21} dx.$ | 25. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 6x + 10} dx.$ |
| 11. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$ | 26. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 7x^2 + 12} dx.$ |
| 12. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + x + 1} dx.$ | 27. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 - 4x + 5} dx.$ |
| 13. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2 (9x^2 + 1)} dx.$ | 28. $\int_0^{\infty} \frac{(x^2 + 1)\cos x}{(x^2 + 9)^2} dx.$ |
| 14. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 16)} dx.$ | 29. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 1)} dx.$ |
| 15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(4x^2 + 1)} dx.$ | 30. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 81} dx.$ |

Розділ 9. Інтегральні перетворення.

Теорія: [9, гл.2,3].

Методика розв'язання: [4, гл.19].

1. Перетворення Лапласа та його застосування.

Задача 9.1. Знайти зображення наступних функцій ($\eta(t)$ – функція Хевісайда):

1. а) $f(t) = t \sin 3t \cos 2t;$

б) $f(t) = \frac{1 - e^{3t}}{te^t} \eta(t);$

2. a) $f(t) = ch^2 t \cdot \sin 3t$; б) $f(t) = \frac{\sin 3t \sin 5t}{t} \eta(t)$;
3. a) $f(t) = e^{-2t} \cos 4t \sin 2t$; б) $f(t) = \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t} \eta(t)$;
4. a) $f(t) = e^{-2t} \cos^2 t$; б) $f(t) = t \cdot sh 2t \cdot \sin t \cdot \eta(t)$;
5. a) $f(t) = t \sin 5t \sin 3t$; б) $f(t) = \frac{e^{3t} \sin 4t}{t} \eta(t)$;
6. a) $f(t) = \int_0^t e^s s^3 ds$; б) $f(t) = \frac{e^{-t} \sin^2 t}{t} \eta(t)$;
7. a) $f(t) = \int_0^t s \cdot ch^2 2s ds$; б) $f(t) = cht \cdot \sin 3t \cdot \eta(t)$;
8. a) $f(t) = \frac{\sin 2t}{t} + \sin 3t \cos 2t$; б) $f(t) = e^{-(t+1)} (t+1)^2 \eta(t+1)$;
9. a) $f(t) = e^{-3t} \sin(t+1)$; б) $f(t) = sh(3t+6) \eta(t+2)$;
10. a) $f(t) = (t-1)^2 \cos 3t$; б) $f(t) = cht \cdot \sin 3t \cdot \eta(t)$;
11. a) $f(t) = t(e^{2t} - sh 2t)$; б) $f(t) = \sin(3t-15) \eta(t-5)$;
12. a) $f(t) = \int_0^t s^2 \sin 2s ds$; б) $f(t) = e^{t-1} \sin(t-1) \eta(t-1)$;
13. a) $f(t) = \frac{1-e^{2t}}{te^t}$; б) $f(t) = e^{5t} \eta(t-1)$;
14. a) $f(t) = t(e^{4t} + ch 4t)$; б) $f(t) = t^3 \eta(t-2)$;
15. a) $f(t) = t \sin^2 5t$; б) $f(t) = t \cos(t-1) \eta(t-1)$;
16. a) $f(t) = e^{3t} \cos(2t+2)$; б) $f(t) = ch(5t-15) \cdot \eta(t-3)$;
17. a) $f(t) = \frac{sh^2 3t}{t}$; б) $f(t) = sh(4t-12) \cdot \eta(t-3)$;
18. a) $f(t) = \int_0^t \frac{\cos 2s}{s} ds$; б) $f(t) = \sin^2(t-1) \cdot \eta(t-1)$;
19. a) $f(t) = (2t-4)sh 3t$; б) $f(t) = e^{t-1} \cos(t-1) \eta(t-1)$;
20. a) $f(t) = e^{2t} \cos^2 t$; б) $f(t) = sh^2(t-2) \cdot \eta(t-2)$;
21. a) $f(t) = e^{-2t} (t-1)^2$; б) $f(t) = sh(5t-10) \cdot \eta(t-2)$;
22. a) $f(t) = \frac{\cos 2t}{t} + t^2 e^{t-3}$; б) $f(t) = e^t (t+3) \eta(t+3)$;
23. a) $f(t) = \sin 2t \cdot ch(t-1)$; б) $f(t) = (t-2)^2 \eta(t-2)$;
24. a) $f(t) = \int_0^t s^2 e^{-3s} ds$; б) $f(t) = ch(2t-1) \eta(t - \frac{1}{2})$;
25. a) $f(t) = t \cos 2t \cdot ch 3t$; б) $f(t) = (t - \pi/3) \sin(3t - \pi) \eta(t - \pi/3)$;

26. а) $f(t) = t(\sin 2t + e^{-3t})$; б) $f(t) = ch(2t+1)\eta(t+1/2)$;
 27. а) $f(t) = \frac{\cos 2t \cdot \cos 6t}{t}$; б) $f(t) = (t-1)^2 \eta(t-2)$;
 28. а) $f(t) = \cos^3 2t$; б) $f(t) = e^{2t} \cos(t-1)\eta(t-1)$;
 29. а) $f(t) = \int_0^t ch 3s \cdot e^{-2s} ds$; б) $f(t) = 4(t-3)\eta(t-5)$;
 30. а) $f(t) = (2t-1)\sin^2 t$; б) $f(t) = \sin 5t \cdot \eta(t-1)$;

Задача 9.2. Знайти зображення за поданим графіком оригіналу відповідного варіанту задачі 6.13.

Задача 9.3. Знайти оригінал за даним зображенням:

1. $\frac{2p-1}{(p+1)(p^2+2p+5)}$.
2. $\frac{p-2}{p(p^4-5p^2+4)}$.
3. $\frac{1}{p(p^2+4)^2}$.
4. $\frac{p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.
5. $\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.
6. $\frac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.
7. $\frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.
8. $\frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$.
9. $\frac{p-1}{p(p-2)^2(p+3)}$.
10. $\frac{p^2+p+1}{(p^2-1)^2}$.
11. $\frac{3p+1}{(p^3-1)(p-3)}$.
16. $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.
17. $\frac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.
18. $\frac{p-7}{p^2(p-1)(p+3)}$.
19. $\frac{p^2+2}{p^4+p^2+1}$.
20. $\frac{p+1}{(p^2+4)(p^2+16)}$.
21. $\frac{e^{-p}}{p^2-1} - \frac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.
22. $\frac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{p}{p^2+9}$.
23. $\frac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.
24. $\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.
25. $\frac{p+1}{p^3-2p^2+5p} e^{-2p}$.
26. $\frac{1}{(p^2+6p+13)(p^2+6p+10)}$.

$$12. \frac{p+1}{p(p^2+4)}.$$

$$27. \frac{p^2+5}{(p-1)(p^2+4p+5)}.$$

$$13. \frac{4p+1}{(p+1)^2(p^2+p+2)}.$$

$$28. \frac{p-2}{(p^2+1)(p^2+36)}.$$

$$14. \frac{p-2}{p^3+2p^2+5p}.$$

$$29. \frac{e^{-3p}}{(p+1)(p-2)(p-4)}.$$

$$15. \frac{4-p}{p^2(p^2-p-2)}.$$

$$30. \frac{1}{p^4+4p^3+4p^2}.$$

Задача 9.4. Операційним методом знайти розв'язок задачі Коші:

1. $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.
2. $x'' + x' = 4\sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.
3. $x'' + x = te^t + 4\sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
4. $x'' + x = sht$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$.
5. $x'' + x' = t^2 + 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$.
6. $x'' - 3x' + 2x = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.
7. $x'' + 3x' - 10x = 47\cos 3t - \sin 3t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$.
8. $x'' + 4x = 2\sin 2t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
9. $x'' + 2x' + 5x = te^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
10. $x'' + 2x' = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
11. $x'' + x = e^{-t} + 2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
12. $x'' + x' = tsht$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.
13. $x'' + x = \cos t + \cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
14. $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
15. $x'' + x' = 4\sin^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$.
16. $x'' - 4x = \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
17. $x'' + x = \frac{1}{2}e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
18. $x'' + x = t \cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
19. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
20. $x'' + x = 2\cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
21. $x'' - 4x' + 4x = 8(t^2 + e^{2t})$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
22. $x'' + 2x' + x = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

23. $x'' - 8x' + 16x = -3e^{-2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
24. $x'' + \frac{1}{16}x = 3\cos\frac{t}{4}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -5$.
25. $x'' - 4x' + 4x = 7e^{3t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$.
26. $x'' + 49x = 7\cos 7t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.
27. $x'' - 2x' - 3x = 6\text{sh}t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -4$.
28. $x'' + 2x' = 6\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
29. $x'' + x' - 6x = -4\text{sh}2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -3$.
30. $x'' + 4x = 2\cos t \cos 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Задача 9.5. Користуючись формулою Дюамеля, розв'язати диференціальні рівняння з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$:

- | | |
|--|--|
| 1. $x'' + 2x' + x = \frac{te^t}{t+1}$. | 16. $x'' + x = \frac{e^t}{1+e^t}$. |
| 2. $x'' + 4x = \frac{1}{2+\cos 2t}$. | 17. $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}$. |
| 3. $x'' + 4x = \frac{1}{4+tg^2 2t}$. | 18. $2x'' - x' = \frac{e^t}{\left(1+e^{\frac{t}{2}}\right)^2}$. |
| 4. $x'' + 4x = \frac{1}{1+\cos^2 t}$. | 19. $x'' - x = \frac{1}{1+cht}$. |
| 5. $x'' + 4x = \frac{1}{1+\sin^2 t}$. | 20. $x'' - x' = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$. |
| 6. $x'' - x' - 2x = \frac{1}{1+e^t}$. | 21. $x'' + 2x' + x = \frac{te^{-t}}{t+1}$. |
| 7. $x'' + x' = \frac{1}{1+ctg^2 t}$. | 22. $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}$. |
| 8. $x'' + 4x' + 3x = \frac{1}{1+e^t}$. | 23. $x'' - x = \frac{\text{sh}t}{ch^2 t}$. |
| 9. $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$. | 24. $x'' + x' = \frac{e^{2t}}{3+e^t}$. |
| 10. $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t}$. | 25. $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t^2}$. |
| 11. $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+e^t}$. | 26. $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{ch^2 t}$. |

$$12. x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}.$$

$$13. x'' - x = tht.$$

$$14. x'' - 4x = \frac{1}{ch^3 2t}.$$

$$15. x'' - x = \frac{1}{ch^2 t}.$$

$$27. x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{ch^2 t}.$$

$$28. x'' - 4x = th^2 2t.$$

$$29. x'' + 2x' = \frac{1}{ch^2 t}.$$

$$30. x'' + x' = \frac{1}{(1+e^t)^2}.$$

2. Перетворення Фур'є та його застосування.

Задача 9.6. Для заданого сигналу $f(t)$ знайти його спектральну щільність $S(\omega) = \hat{f}(\omega)$ (перетворення Фур'є даної функції f):

$$1. f(t) = \eta(t-a);$$

$$2. f(t) = \eta(t)e^{-at}, \quad a > 0;$$

$$3. f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0;$$

$$4. f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2}, & |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$5. f(t) = \frac{\sin \omega_i(t-\tau)}{\omega_i(t-\tau)}, \quad \omega_i > 0;$$

$$6. f(t) = e^{-a|t|} \cos \omega_0 t, \quad a > 0;$$

$$7. f(t) = \left(1 + a|t| + \frac{a^2 t^2}{3}\right) e^{-a|t|}, \quad a > 0;$$

$$8. f(t) = e^{-a|t|} \left(\cos \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 |t| \right), \quad a > 0;$$

$$9. f(t) = e^{-at^2} \cos \omega_0 t, \quad a > 0;$$

$$10. f(t) = \frac{\pi}{\omega_i} \delta(t) - \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i t}, \quad \omega_i > 0;$$

$$11. f(t) = \delta(t) - \frac{1}{2a} e^{-\frac{|t|}{a}}, \quad a > 0;$$

$$12. f(t) = \cos(at^2), \quad a > 0;$$

$$13. f(t) = \sin(at^2), \quad a > 0;$$

$$14. f(t) = (1 + a|t|) e^{-a|t|}, \quad a > 0;$$

15. $f(t) = \frac{e^{-a|t|}}{\sqrt{|t|}}, \quad a > 0;$
16. $f(t) = e^{-a|t|} |t|;$
17. $f(t) = \eta(t)e^{-at} \cdot \frac{t^2}{2}, \quad a > 0;$
18. $f(t) = \eta(t)e^{-a|t|} \cos \beta t, \quad a > 0;$
19. $f(t) = \frac{\cos \omega_0 t}{\sqrt{|t|}};$
20. $f(t) = e^{-a|t|} \sin \omega_0 t, \quad a > 0;$
21. $f(t) = \eta(t)e^{-at} \sin \beta t, \quad a > 0;$
22. $f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\sqrt{|t|}};$
23. $f(t) = \frac{a}{a^2 + t^2}, \quad a > 0;$
24. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}};$
25. $f(t) = \eta(t - \beta)e^{-at}, \quad a > 0;$
26. $f(t) = \frac{e^{-|t-a|}}{\sqrt{|t-a|}};$
27. $f(t) = \frac{t}{(a^2 + t^2)^2}, \quad a > 0;$
28. $f(t) = \eta(t)e^{-at} t, \quad a > 0;$
29. $f(t) = \frac{1}{t(a^2 + t^2)};$
30. $f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}, \quad a > 0;$

Задача 9.7. Використовуючи перетворення Фур'є або Лапласа, розв'язати інтегральне рівняння:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{(x-t)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{x^2 + b^2}.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin kx dx = \frac{a}{a^2 + k^2}.$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot \sin tx dx = \frac{\pi}{2} \sin t, \quad t \in [0, \pi].$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)e^{-|t|} dt = e^{-x}, x > 0.$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \cdot f(x-t)dt = e^{-bx^2}, a > b > 0.$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-t)^2 + 4} f(t)dt = \frac{1}{x^2 + 2}.$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot u(x-t)dt = e^{-x^2}.$
8. $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot u(x-t)dt = \frac{b}{x^2 + b^2}.$
9. $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{x-t} = \frac{\sin x}{x}, x > 0.$
10. $f(t) = t + 2 - 2 \cos t - \int_0^t (t-s)f(s)ds.$
11. $f(t) = 1 + \int_0^t e^{t-s} f(s)ds$
12. $f(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-s)f(s)ds.$
13. $f(t) = e^{-2t} + \int_0^t e^{-(t-s)} f(s)ds.$
14. $f(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t-s)f(s)ds.$
15. $f(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \int_0^t \operatorname{sh} 3(t-s) \cdot f(s)ds.$
16. $f(t) = \cos t + \int_0^t f(s)ds.$
17. $f(t) = e^{-2t} + 3 \int_0^t e^{-(t-s)} f(s)ds.$
18. $f(t) = \sin t + \int_0^t \sin(t-s)f(s)ds.$
19. $1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{ch}(t-s)f(s)ds.$

Користуючись перетворенням Лапласа або Фур'є, обчислити інтеграл:

$$20. \int_0^{\infty} \frac{e^{-at}}{t} \sin tx \, dt, \quad a, x > 0.$$

$$21. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bx^2}}{x^2 + a^2} dx .$$

$$22. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx.$$

$$23. \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right)^2 dx$$

$$24. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx$$

$$25. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + 4} \sin xt \, dt, \quad x > 0.$$

$$26. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cdot \sin bx}{x^2} dx.$$

$$27. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^2 + a^2)}.$$

$$28. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

$$29. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + 1} dx .$$

$$30. \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt + t \sin xt}{1 + t^2} dt .$$

Розділ 10. Елементи математичної фізики.

Теорія: [2, гл.17], [3, гл.14].

Методика розв'язання: [4, том 2 гл.20].

1. Зведення до канонічного вигляду лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку.

Задача 10.1. Знайти загальний розв'язок рівняння, зводячи його до канонічного вигляді:

1. $3u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$
2. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0.$
3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
4. $4u_{xx} + 8u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$
5. $3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0.$
6. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0.$
7. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0.$
8. $u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
9. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0.$
10. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0.$
11. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0.$
12. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0.$
13. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0.$
14. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x - 6u_y = 0.$
15. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0.$
16. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x - 4u_y = 0.$
17. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0.$
18. $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 8u_x - 2u_y = 0.$
19. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 0.$
20. $u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - 12u_y = 0.$
21. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 12u_x - 4u_y = 0.$
22. $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 16u_x + 4u_y = 0.$
23. $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0.$
24. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x + 5u_y = 0.$
25. $u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 2u_x - 10u_y = 0.$
26. $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + 5u_y = 0.$
27. $25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} - 15u_x + 3u_y = 0.$
28. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + 5u_x + 15u_y = 0.$
29. $25u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} + 20u_x + 4u_y = 0.$
30. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + 5u_x + 20u_y = 0.$

Задача 10.2. Знайти власні значення та власні функції крайових задач:

1. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 0), y(-1) = y'(0) = 0.$
2. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 1), y'(-1) = y'(1) = 0.$
3. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 1), y'(-1) = y(1) = 0.$
4. $y'' + \frac{2}{x} y' + \lambda y = 0, x \in (0, 2), |y(0)| < \infty, y(2) = 0.$
5. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), y(\frac{1}{4}) = y'(\frac{1}{2}) = 0.$
6. $y'' + \lambda y = 0, x \in (0, 2\pi), y(x) = y(x + 2\pi).$
7. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), y'(\frac{1}{4}) = y'(\frac{1}{2}) = 0.$
8. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), y(\frac{1}{4}) = y(\frac{1}{2}) = 0.$
9. $y'' + \frac{2}{x} y' + \lambda y = 0, x \in (0, 1), |y(0)| < \infty, y'(1) = 0.$
10. $y'' + \lambda y = 0, x \in (1, 2), y(1) = y'(2) = 0.$
11. $y'' + \lambda y = 0, x \in (1, 2), y'(1) = y(2) = 0.$
12. $y'' + \lambda y = 0, x \in (1, 2), y'(1) = y'(2) = 0.$
13. $y'' + \lambda y = 0, x \in (1, 2), y(1) = y(2) = 0.$
14. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 1), y(-1) = y(1) = 0.$
15. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), y'(\frac{1}{4}) = y'(\frac{1}{2}) = 0.$
16. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 5), y(-1) = y'(5) = 0.$
17. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 5), y'(-1) = y'(5) = 0.$
18. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-15, 1), y'(-1) = y(5) = 0.$
19. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 5), y(-1) = y(5) = 0.$
20. $y'' + \lambda y = 0, x \in (-1, 1), y(-1) = y'(1) = 0.$
21. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{1}{4}, 1), y'(\frac{1}{4}) = y(1) = 0.$
22. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{3}{4}, 1), y'(\frac{3}{4}) = y(1) = 0.$
23. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\pi, 2\pi), y'(\pi) = y(2\pi) = 0.$
24. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), y'(\frac{\pi}{4}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0.$
25. $y'' + \lambda y = 0, x \in (1, \frac{3}{2}), y'(1) = y(\frac{3}{2}) = 0.$
26. $y'' + \lambda y = 0, x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), y(\frac{1}{2}) = y'(\frac{3}{4}) = 0.$

$$27. y'' + \lambda y = 0, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

$$28. y'' + \lambda y = 0, \quad x \in \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right), \quad y'\left(\frac{3}{4}\right) = y'\left(\frac{5}{4}\right) = 0.$$

$$29. y'' + \lambda y = 0, \quad x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad y'(\pi) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

$$30. y'' + \lambda y = 0, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0.$$

2. Задача Діріхле для рівняння Лапласа.

Задача 10.3. Знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в колі, секторі або кільці $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ (ρ, φ – полярні координати) за умови виконання крайових умов:

$$1. u(1, \varphi) = \cos 2\varphi, \quad \rho \leq 1.$$

$$2. u(2, \varphi) = 2 \sin \varphi + \cos 2\varphi, \quad \rho \leq 2.$$

$$3. u(1, \varphi) = \sin \varphi, \quad u(2, \varphi) = \cos \varphi, \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

$$4. u(2, \varphi) = 1, \quad u(3, \varphi) = 4 \cos \varphi, \quad 2 \leq \rho \leq 3.$$

$$5. u(1, \varphi) = 1 + \sin \varphi, \quad u(4, \varphi) = 4 \sin 2\varphi, \quad 1 \leq \rho \leq 4.$$

$$6. u(1, \varphi) = \cos 3\varphi + 1, \quad u(2, \varphi) = 3 \sin \varphi, \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

$$7. u(2, \varphi) = 4 + 3 \sin \varphi, \quad u(3, \varphi) = 5 \cos 2\varphi, \quad 2 \leq \rho \leq 3.$$

$$8. u(1, \varphi) = 4 \cos \varphi + 1, \quad u(3, \varphi) = 2, \quad 1 \leq \rho \leq 3.$$

$$9. u(1, \varphi) = 5 + 2 \sin \varphi, \quad u(4, \varphi) = 4, \quad 1 \leq \rho \leq 4.$$

$$10. u(1, \varphi) = 5 \cos \varphi, \quad u(2, \varphi) = 2 \sin 2\varphi + 3 \cos 3\varphi, \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

$$11. u(1, \varphi) = 4 + 3 \cos 4\varphi, \quad u(3, \varphi) = 3 \sin 2\varphi, \quad 1 \leq \rho \leq 3.$$

$$12. u(2, \varphi) = \sin 2\varphi + 2 \cos \varphi, \quad \rho \leq 2.$$

$$13. u(1, \varphi) = \varphi^2 (2\pi - \varphi)^2, \quad \rho \leq 1.$$

$$14. u(2, \varphi) = 4\varphi^2 - 2\varphi, \quad \rho \leq 2.$$

$$15. u(1, \varphi) = 7 \cos 3\varphi, \quad \rho \leq 1.$$

$$16. u(1, \varphi) = 16 \sin 9\varphi, \quad \rho \leq 1.$$

$$17. u(1, \varphi) = 27 \cos 4\varphi, \quad \rho \leq 1.$$

$$18. u(1, \varphi) = 25 \cos 2\varphi, \quad \rho \leq 1.$$

$$19. u(1, \varphi) = 13 \cos 6\varphi, \quad \rho \leq 1.$$

$$20. u(1, \varphi) = 10 \sin 3\varphi, \quad \rho \leq 1.$$

$$21. u(1, \varphi) = 21 \sin 6\varphi, \quad u(\rho, 0) = u\left(\rho, \frac{2\pi}{3}\right) = 0, \quad \rho \leq 1.$$

$$22. u(1, \varphi) = 22 \cos 12\varphi, u'_\varphi(\rho, 0) = u'_\varphi(\rho, \frac{\pi}{3}) = 0, \rho \leq 1.$$

$$23. u(1, \varphi) = 23 \cos 14\varphi, u'_\varphi(\rho, 0) = u(\rho, \frac{\pi}{4}) = 0, \rho \leq 1.$$

$$24. u(1, \varphi) = 24 \sin 10\varphi, u(\rho, 0) = u'_\varphi(\rho, \frac{\pi}{4}) = 0, \rho \leq 1.$$

$$25. u(1, \varphi) = 25 \sin 3\varphi, u(\rho, 0) = u(\rho, \pi) = 0, \rho \leq 1.$$

$$26. u(1, \varphi) = 26 \cos 3\varphi, u'_\varphi(\rho, 0) = u'_\varphi(\rho, \frac{5\pi}{3}) = 0, \rho \leq 1.$$

$$27. u(1, \varphi) = 27 \cos 7\varphi, u'_\varphi(\rho, 0) = u(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0, \rho \leq 1.$$

$$28. u(1, \varphi) = 28 \sin 5\varphi, u(\rho, 0) = u'_\varphi(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0, \rho \leq 1.$$

$$29. u(1, \varphi) = 29 \sin 3\varphi, u(\rho, 0) = u(\rho, \frac{5\pi}{3}) = 0, \rho \leq 1.$$

$$30. u(1, \varphi) = 30 \cos 4\varphi, u'_\varphi(\rho, 0) = u'_\varphi(\rho, \frac{7\pi}{4}) = 0, \rho \leq 1.$$

Задача 10.4. Знайти розв'язок $u(x, y)$ задачі Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u = 0$, всередині прямокутника $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$:

$$1. a = b = 1, u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, u(0, y) = 0, u(a, y) = \sin \pi y.$$

$$2. a = 1, b = 2, u(x, 0) = \sin \pi x, u(x, b) = 0, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0.$$

$$3. a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}, u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, u(0, y) = 0, u(a, y) = \sin 4y.$$

$$4. a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}, u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, u(0, y) = \sin 2y, u(a, y) = 0.$$

$$5. a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}, u(x, 0) = 0, u(x, b) = \sin 2x, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0.$$

$$6. a = b = 1, u(x, 0) = x(x-1), u(x, b) = 0, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0.$$

$$7. a = b = 1, u(x, 0) = 0, u(x, b) = x(x-1), u(0, y) = 0, u(a, y) = 0.$$

$$8. a = b = 1, u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, u(0, y) = y(y-1), u(a, y) = 0.$$

$$9. a = b = 1, u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, u(0, y) = 0, u(a, y) = y(y-1).$$

$$10. a = 2, b = 1, u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2-x, & x \in [1, 2] \end{cases}, u(x, b) = 0, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0.$$

$$11. a = 2, b = 1, u(x, 0) = 0, u(x, b) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2-x, & x \in [1, 2] \end{cases}, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0.$$

$$12. a = 1, b = 2, u(x, 0) = 0, u(x, b) = 0, u(0, y) = \begin{cases} y, & y \in [0, 1] \\ 2-y, & y \in [1, 2] \end{cases}, u(a, y) = 0.$$

13. $a=1, b=2, u(x,0)=0, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=\begin{cases} y, & y \in [0,1] \\ 2-y, & y \in [1,2] \end{cases}$.
14. $a=1, b=1, u(x,0)=0, u(x,b)=\sin 3\pi x, u(0,y)=0, u(a,y)=0$.
15. $a=2, b=1, u(x,0)=0, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=\sin 2\pi y$.
16. $a=\frac{3}{2}, b=\frac{3}{2}, u(x,0)=x(x-\frac{3}{2}), u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=0$.
17. $a=1, b=\frac{3}{2}, u(x,0)=0, u(x,b)=0, u(0,y)=y(y-\frac{3}{2}), u(a,y)=0$.
18. $a=\frac{3}{2}, b=1, u(x,0)=0, u(x,b)=x(x-\frac{3}{2}), u(0,y)=0, u(a,y)=0$.
19. $a=2, b=\frac{3}{2}, u(x,0)=0, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=y(y-\frac{3}{2})$.
20. $a=2, b=2, u(x,0)=\sin 4\pi x, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=0$.
21. $a=1, b=1, u(x,0)=0, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=y^2-y$.
22. $a=2, b=2, u(x,0)=x^2-2x, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=y^2-2y$.
23. $a=2, b=2, u(x,0)=\sin \pi x, u(x,b)=\sin 2\pi x, u(0,y)=0, u(a,y)=0$.
24. $a=1, b=2, u(x,0)=x-x^2, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=0$.
25. $a=1, b=2, u(x,0)=x-x^2, u(x,b)=\begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, u(0,y)=0, u(a,y)=0$.
26. $a=2, b=2, u(x,0)=\sin \pi x, u(x,b)=0, u(0,y)=\sin 2\pi y, u(a,y)=0$.
27. $a=2, b=2, u(x,0)=\sin \pi x, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=\sin 2\pi y$.
28. $a=1, b=1, u(x,0)=\sin \pi x, u(x,b)=\sin 2\pi x, u(0,y)=\sin 3\pi y, u(a,y)=0$.
29. $a=2, b=2, u(x,0)=\sin 4\pi x, u(x,b)=0, u(0,y)=\sin \pi y, u(a,y)=0$.
30. $a=2, b=2, u(x,0)=\sin 2\pi x, u(x,b)=0, u(0,y)=0, u(a,y)=\sin 2\pi y$.

Задача 10.5. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, всередині кола $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

- $R=1, u(1, \varphi) = 8 + 5 \cos 2\varphi - \sin 3\varphi$.
- $R=3, u(3, \varphi) = \frac{1}{9} \sin 2\varphi + 27 \sin 3\varphi$.
- $R=4, u(4, \varphi) = 1 - 16 \cos 2\varphi + \frac{1}{64} \cos 3\varphi$.
- $R=1, u(1, \varphi) = 5 + 2 \cos \varphi - \sin \varphi$.
- $R=1, u(1, \varphi) = \cos^2 2\varphi$.
- $R=1, u(1, \varphi) = \sin^2 2\varphi$.

7. $R = 2, u(2, \varphi) = 3 + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$
8. $R = 1, u(1, \varphi) = \varphi(\varphi - 2\pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$
9. $R = 1, u(1, \varphi) = \frac{\varphi}{\pi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$
10. $R = 1, u(1, \varphi) = \frac{\varphi^2}{\pi^2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$
11. $R = 4, u(4, \varphi) = 1 + 8 \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi.$
12. $R = 6, u(6, \varphi) = 1 + 6 \cos \varphi + 36 \sin 2\varphi.$
13. $R = 1, u(1, \varphi) = 2 + \cos \varphi.$
14. $R = 3, u(3, \varphi) = 1 + 3 \cos \varphi + 3 \sin \varphi + 9 \cos 2\varphi.$
15. $R = 5, u(5, \varphi) = 1 + 5 \cos \varphi + 125 \cos 3\varphi + 25 \cos 2\varphi.$
16. $R = 10, u(10, \varphi) = 1 - 10 \cos \varphi + 100 \sin 2\varphi.$
17. $R = 3, u(3, \varphi) = 1 - 9 \cos 2\varphi + 81 \sin 4\varphi.$
18. $R = 1, u(1, \varphi) = 1 + \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$
19. $R = 1, u(1, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$
20. $R = 1, u(1, \varphi) = 9 + 4 \cos \varphi - \sin 3\varphi.$
21. $R = 10, u(10, \varphi) = 5 \sin^3 \varphi.$
22. $R = 5, u(5, \varphi) = 15 \sin^3 \varphi.$
23. $R = 6, u(6, \varphi) = 13 \sin^3 \varphi.$
24. $R = 9, u(9, \varphi) = 7 \sin^3 \varphi.$
25. $R = 11, u(11, \varphi) = 3 \sin^3 \varphi.$
26. $R = 12, u(12, \varphi) = \sin^3 \varphi.$
27. $R = 14, u(14, \varphi) = 3 \sin^3 \varphi.$
28. $R = 16, u(16, \varphi) = \sin^3 \varphi.$
29. $R = 1, u(10, \varphi) = 25 \sin^3 \varphi.$
30. $R = 2, u(10, \varphi) = 23 \sin^3 \varphi.$

3. Метод розділення змінних в хвильовому та рівнянні теплопровідності.

Задача 10.6. Знайти розв'язок мішаної крайової задачі для хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < +\infty,$$

при заданих початкових та крайових умовах.

1. $a = 3, l = 4, u(x, 0) = -x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u'_x(4, t) = 0.$
2. $a = 2, l = 6, u(x, 0) = x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u'_x(6, t) = 0.$
3. $a = 3, l = 1, u(x, 0) = x^2, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u'_x(1, t) = 0.$
4. $a = 2, l = 1, u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(1, t) = 0.$
5. $a = \frac{1}{2}, l = 6, u(x, 0) = x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u'_x(6, t) = 0.$
6. $a = \frac{1}{3}, l = 1, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = x(1 - x), u(0, t) = u'_x(1, t) = 0.$
7. $a = 1, l = 1, u(x, 0) = 1 - x, u'_t(x, 0) = 0, u(1, t) = u'_x(0, t) = 0.$
8. $a = \frac{1}{2}, l = 2, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}, u(0, t) = u(2, t) = 0.$
9. $a = 1, l = 4, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = 4 - x, u(0, t) = u(4, t) = 0.$
10. $a = \frac{1}{3}, l = 2, u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 1, & x \in [1, 2] \end{cases}, u'_t(x, 0) = 0, u'_x(0, t) = u'_x(2, t) = 0.$
11. $a = 4, l = 2, u(x, 0) = x(x - 2), u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(2, t) = 0.$
12. $a = 3, l = 1, u(x, 0) = x(x - 1), u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(1, t) = 0.$
13. $a = 4, l = 3, u(x, 0) = 13 \sin 5\pi x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(3, t) = 0.$
14. $a = 5, l = 2, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = 25\pi \sin 5\pi x, u(0, t) = u(2, t) = 0.$
15. $a = 6, l = 4, u(x, 0) = 15 \sin 4\pi x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(4, t) = 0.$
16. $a = 7, l = 3, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = 28\pi \sin 4\pi x, u(0, t) = u(3, t) = 0.$
17. $a = 8, l = 5, u(x, 0) = 17 \sin 3\pi x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(5, t) = 0.$
18. $a = 9, l = 4, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = 27\pi \sin 3\pi x, u(0, t) = u(4, t) = 0.$
19. $a = 1, l = 2, u(x, 0) = 19 \sin 7\pi x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u(2, t) = 0.$
20. $a = 1, l = 3, u(x, 0) = 10 \sin 5\pi x, u'_t(x, 0) = 5\pi \sin 5\pi x, u(0, t) = u(3, t) = 0.$
21. $a = 9, l = 5, u(x, 0) = \sin \pi x, u'_t(x, 0) = 18\pi \sin 2\pi x, u(0, t) = u(5, t) = 0.$
22. $a = 8, l = 6, u(x, 0) = 2 \sin \pi x, u'_t(x, 0) = 8\pi \sin \pi x, u(0, t) = u(6, t) = 0.$
23. $a = 7, l = 4, u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x, u'_t(x, 0) = 21\pi \sin 3\pi x, u(0, t) = u(4, t) = 0.$
24. $a = 6, l = 5, u(x, 0) = 4 \sin 2\pi x, u'_t(x, 0) = 12\pi \sin 2\pi x, u(0, t) = u(5, t) = 0.$
25. $a = 5, l = 3, u(x, 0) = 5 \sin 3\pi x, u'_t(x, 0) = 20\pi \sin 4\pi x, u(0, t) = u(3, t) = 0.$
26. $a = 4, l = 4, u(x, 0) = 6 \sin 3\pi x, u'_t(x, 0) = 12\pi \sin 3\pi x, u(0, t) = u(4, t) = 0.$

27. $a = 3, l = 2, u(x, 0) = 7 \sin 4\pi x, u'_t(x, 0) = 15\pi \sin 5\pi x, u(0, t) = u(2, t) = 0.$

28. $a = 2, l = 3, u(x, 0) = 8 \sin 4\pi x, u'_t(x, 0) = 8\pi \sin 4\pi x, u(0, t) = u(3, t) = 0.$

29. $a = 9, l = 0,5, u(x, 0) = 29 \sin 7\pi x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u'_x(0,5, t) = 0.$

30. $a = 3, l = 1,5, u(x, 0) = 30 \cos 5\pi x, u'_t(x, 0) = 0, u(0, t) = u'_x(1,5, t) = 0.$

Задача 10.7. Знайти розв'язок мішаної крайової задачі для хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < +\infty,$$

при заданих початкових та крайових умовах.

1. $a = 1, l = \frac{\pi}{2}, u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \frac{\pi}{2} - x, & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}, u'_t(x, 0) = 0, f(x, t) = \sin 4t \cdot \sin 2x,$

$$u(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0.$$

2. $a = 1, l = 1, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = \cos \pi x, f(x, t) = e^{3t}, u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0.$

3. $a = 1, l = 1, u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}, u'_t(x, 0) = 0, f(x, t) = \sin \frac{7\pi x}{2}, u(0, t) = u'_x(1, t) = 0.$

4. $a = 1, l = 1, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{2}, f(x, t) = \cos \frac{5\pi x}{2}, u'_x(0, t) = u(1, t) = 0.$

5. $a = 1, l = \frac{\pi}{2}, u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \frac{\pi}{2} - x, & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}, u'_t(x, 0) = 0, f(x, t) = \cos 3t \cdot \sin 4x,$

$$u(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0.$$

6. $a = 1, l = \pi, u(x, 0) = 5, u'_t(x, 0) = 0, f(x, t) = \cos x \cdot \sin 2t, u'_x(0, t) = u'_x(\pi, t) = 0.$

7. $a = \pi, l = 1, u(x, 0) = \sin \frac{5x}{2}, u'_t(x, 0) = 0, f(x, t) = \cos 5t \cdot \sin \frac{x}{2}, u(0, t) = u'_x(\pi, t) = 0.$

8. $a = 1, l = \pi, u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = \cos \frac{5x}{2}, f(x, t) = e^t \cos \frac{x}{2}, u'_x(0, t) = u(\pi, t) = 0.$

9. $a = 1, l = \pi, u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}, u'_t(x, 0) = 0, f(x, t) = \cos t \cdot \sin 2x,$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

10. $a = 1, l = \pi, u(x, 0) = \cos 3x, u'_t(x, 0) = 0, f(x, t) = 5e^t, u'_x(0, t) = u'_x(\pi, t) = 0.$

11. $a=1, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2}, f(x,t)=\sin\frac{5\pi x}{2}, u(0,t)=u_x'(1,t)=0.$
12. $a=1, l=\pi, u(x,0)=\cos\frac{\pi x}{2}, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=\cos\frac{5\pi x}{2}, u_x'(0,t)=u(1,t)=0.$
13. $a=1, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=\sin\pi x, f(x,t)=x(x-1), u(0,t)=u(1,t)=0.$
14. $a=1, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=5, f(x,t)=\cos 3\pi x, u_x'(0,t)=u_x'(1,t)=0.$
15. $a=1, l=1, u(x,0)=\sin\frac{5\pi x}{2}, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=\sin\frac{\pi x}{2}, u(0,t)=u_x'(1,t)=0.$
16. $a=1, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=x(x-1), f(x,t)=\cos t \cdot \sin \pi x, u(0,t)=u(1,t)=0.$
17. $a=1, l=2, u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2}, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=\begin{cases} xe^{3t}, & x \in [0,1] \\ (2-x)e^{3t}, & x \in [1,2] \end{cases},$
 $u(0,t)=u(2,t)=0.$
18. $a=1, l=1, u(x,0)=\cos 7\pi x, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=\cos 5t, u_x'(0,t)=u_x'(1,t)=0.$
19. $a=1, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=\sin\frac{\pi x}{20}, f(x,t)=\sin\frac{5\pi x}{2}, u(0,t)=u_x'(1,t)=0.$
20. $a=1, l=1, u(x,0)=\cos\frac{5\pi x}{2}, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=\cos\frac{\pi x}{2}, u_x'(0,t)=u(1,t)=0.$
21. $a=1, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=x, f(x,t)=1, u(0,t)=u(1,t)=0.$
22. $a=2, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=9-x, f(x,t)=1, u_x'(0,t)=u_x'(1,t)=0.$
23. $a=1, l=4, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=x, u_x'(0,t)=u_x'(4,t)=0.$
24. $a=2, l=4, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=-x, u(0,t)=u(4,t)=0.$
25. $a=\frac{1}{2}, l=2, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=x, f(x,t)=-2, u(0,t)=u(2,t)=0.$
26. $a=1, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=-x, u(0,t)=u(1,t)=0.$
27. $a=2, l=1, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=x^2, u_x'(0,t)=u_x'(4,t)=0.$
28. $a=3, l=4, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=1-x, u(0,t)=u(4,t)=0.$
29. $a=1, l=2, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=2-x, u(0,t)=u_x'(2,t)=0.$
30. $a=1, l=4, u(x,0)=0, u_t'(x,0)=0, f(x,t)=-4x^2, u_x'(0,t)=u(4,t)=0.$

Задача 10.8. Знайти розв'язок крайової задачі для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < +\infty,$$

при заданих початкових та крайових умовах.

1. $a = 1, l = 1, u(x, 0) = x - x^2, u(0, t) = u(1, t) = 0.$
2. $a = 4, l = 1, u(x, 0) = x^2, u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0.$
3. $a = 2, l = 1, u(x, 0) = \sin \pi x, u(0, t) = u'_x(1, t) = 0.$
4. $a = 3, l = 1, u(x, 0) = 1 - x, u(0, t) = u(1, t) = 0.$
5. $a = 4, l = 1, u(x, 0) = x, u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0.$
6. $a = \frac{1}{2}, l = 2, u(x, 0) = x(2 - x), u(0, t) = u(2, t) = 0.$
7. $a = \frac{2}{3}, l = 1, u(x, 0) = 1 - x, u'_x(0, t) = u(1, t) = 0.$
8. $a = \frac{1}{4}, l = 4, u(x, 0) = 4 - x, u'_x(0, t) = u'_x(4, t) = 0.$
9. $a = 4, l = 4, u(x, 0) = x(4 - x), u'_x(0, t) = u(4, t) = 0.$
10. $a = \frac{1}{2}, l = 2, u(x, 0) = x^2, u(0, t) = u'_x(2, t) = 0.$
11. $a = \frac{4}{3}, l = 5, u(x, 0) = x, u(0, t) = u(5, t) = 0.$
12. $a = \frac{2}{5}, l = 3, u(x, 0) = 3x - x^2, u'_x(0, t) = u(3, t) = 0.$
13. $a = 3, l = 3, u(x, 0) = 3 - x, u(0, t) = u(3, t) = 0.$
14. $a = \frac{1}{2}, l = 2, u(x, 0) = x^2 - 2x, u(0, t) = u'_x(2, t) = 0.$
15. $a = \frac{2}{3}, l = 2, u(x, 0) = x - 1, u(0, t) = u(2, t) = 0.$
16. $a = \frac{3}{5}, l = 1, u(x, 0) = x^2, u'_x(-1, t) = u'_x(1, t) = 0.$
17. $a = 7, l = 2, u(x, 0) = x - 1, u(1, t) = u'_x(2, t) = 0.$
18. $a = 6, l = 6, u(x, 0) = 25 \sin 2\pi x, u(0, t) = u(6, t) = 0.$
19. $a = 5, l = 3, u(x, 0) = 26 \sin 3\pi x + 3 \sin 4\pi x, u(0, t) = u(3, t) = 0.$
20. $a = 3, l = 1, u(x, 0) = 30 \sin 3\pi x + 7 \sin 4\pi x, u(0, t) = u(1, t) = 0.$
21. $a = 2, l = 8, u(x, 0) = \cos 3\pi x + 2 \cos 4\pi x, u'_x(0, t) = u'_x(8, t) = 0.$
22. $a = 2, l = 6, u(x, 0) = 31 \cos 3\pi x + \cos 4\pi x, u'_x(0, t) = u'_x(6, t) = 0.$
23. $a = 3, l = 0,5, u(x, 0) = 3 \sin 5\pi x, u(0, t) = u'_x(0,5, t) = 0.$
24. $a = 1, l = 1,5, u(x, 0) = 12 \cos 7\pi x, u'_x(0, t) = u(1,5, t) = 0.$
25. $a = 5, l = 2,5, u(x, 0) = 9 \sin 3\pi x, u(0, t) = u'_x(2,5, t) = 0.$
26. $a = 1, l = 3,5, u(x, 0) = 18 \cos 5\pi x, u'_x(0, t) = u(3,5, t) = 0.$
27. $a = 6, l = 4,5, u(x, 0) = 7 \sin 3\pi x, u(0, t) = u'_x(4,5, t) = 0.$
28. $a = 2, l = 3,5, u(x, 0) = 16 \cos 7\pi x, u'_x(0, t) = u(3,5, t) = 0.$

29. $a = 1, l = 2,5, u(x,0) = 5 \sin 9\pi x, u(0,t) = u'_x(2,5,t) = 0.$

30. $a = 3, l = 1,5, u(x,0) = 14 \cos 5\pi x, u'_x(0,t) = u(1,5,t) = 0.$

Розділ 11. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.

Теорія: [2, гл.18], [3, гл.15-17], [9, гл.5-6].

Методика розв'язання: [4, том 3, гл.25-28].

1. Випадкові події.

Задача 11.1. (Класичне означення ймовірності).

1. В партії з 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед шести обраних випадково деталей буде 4 стандартних.
2. Під час негоди на ділянці між 40-м та 70-м кілометрами телефонної лінії трапився обрив проводу. Вважаючи, що обрив проводу однаково можливий в довільній точці, знайти ймовірність того, що обрив розташований між 40-м та 45-м кілометрами.
3. В конверті є 100 фото та знаходиться одна розшукувана. З конверта випадково взяли 10 фото. Знайти ймовірність того, що серед них є розшукувана.
4. В правильний трикутник зі стороною a вписано коло. В трикутник випадково ставиться точка. Яка ймовірність того, що ця точка потрапить в коло?
5. Серед 10 лотерейних квитків виграшними є два. Яка ймовірність того, що серед взятих випадково 5 квитків один буде виграшним?
6. В області $-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} \leq 1$ випадково фіксується точка. Яка ймовірність того, що ця точка потрапить в область $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1$?
7. В студраді факультету 3 першокурсника, 5 другокурсників, 7 старшокурсників. З цього составу навмання обирають 5 студентів. Яка ймовірність того, що будуть обрані тільки старшокурсники?
8. В області $-x^2 + y^2 \leq 25$ випадково фіксується точка. Яка ймовірність того, що ця точка потрапить в область, яка обмежена колом та кривою $-16x - 3y^2 = 0$?
9. З 20 банків 10 розташовані за межами міста. Для перевірки

- випадково обрані 5 банків. Яка ймовірність того, що хоча б 2 з них будуть розташовані поза містом?
10. В куб з ребром a вписано кулю. Всередині кубу навмання фіксується точка. Яка ймовірність того, що точка потрапить в кулю?
 11. В ящику 15 деталей, серед яких 10 бракованих. Працівник навмання обирає 3 деталі. Знайти ймовірність того, що обрані деталі будуть бракованими?
 12. В букеті 7 троянд: 5 білих та 2 червоні. Випадковим чином з букету витягли дві троянді. Яка ймовірність того, що вони всі білі?
 13. Навмання обирається номер коду з 4 цифр. Яка ймовірність того, що всі цифри різні?
 14. В урні 6 білих, 9 чорних, 13 червоних куль. Випадковим чином виймають 4 кулі. Знайти ймовірність того, що серед обраних куль хоча б один червоний?
 15. Фокусник пропонує 3 глядачам задумати довільне число від 1 до 10. Вважаючи, що вибір кожного з глядачів довільного числа з заданих є рівно можливим, знайти ймовірність того, що у кого-то з них задумані числа співпадають?
 16. Прибор складається з 5 елементів, 2 з яких зношені. При включенні прибору випадково включається 2 елемента. Знайти ймовірність, що включеними будуть незношені елементи?
 17. В урні є 15 білих, 5 червоних та 10 чорних куль. Навмання виймають 1 кулю, знайти ймовірність того, що він буде чорним?
 18. Набираючи номер телефону, дівчина забула дві останні цифри, але пам'ятає, що одна з цифр – нуль, а інша – непарна. Знайти ймовірність того, що вона набере правильний номер.
 19. На лавку з 7 міст випадково розсаджуються 7 людей. Яка ймовірність того, що дві фіксовані людини будуть рядом?
 20. Студент знає 25 екзаменаційних питань з 60. Яка ймовірність скласти екзамен, якщо для цього треба відповісти не менше чим на 2 питання з 3?
 21. Яка ймовірність того, що обране навмання чотиризначне число кратно 5?
 22. В шаховому турнірі приймають участь 10 гросмейстерів, 6 міжнародних мастерів та 4 мастера спорту. Знайти ймовірність того, що в першій парі зустрінуться шахматисти однієї категорії
 23. В прямокутник 5×4 вписано коло радіуса 1,5. Яка ймовірність того, що випадково фіксована в прямокутнику точка потрапить в коло?
 24. В урні маємо 20 білих та 5 чорних куль. Навмання послідовно, без повернення виймають по одній кулі до появи білої. Знайти ймовірність, що прийдеться робити третє витягання?

25. Колода карт (36 карт) ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що кількість чорних та червоних карт в обох пачках буде однаковим.
26. Десять студентів домовились їхати визначеним поїздом, але не домовились в якому вагоні. В складі поїзда 10 вагонів та припустимо, що усі можливі розподіли студентів по вагонам рівно ймовірні. Знайти ймовірність того, що ні один з студентів не зустрінеться з іншим.
27. Кожну з трьох книжок навмання кладуть в один з 5 шухлядок. Знайти ймовірність того, що усі книжки потраплять в одну шухляду.
28. В групі з 25 людей три займаються боксом, 10 – футболом, 5 – боротьбою, інші – бадмінтоном. Яка ймовірність того, що з трьох випадково обраних спортсменів один займається боксом, а інші два – боротьбою?
29. Вісім гостей випадковим чином займають місця за столом, який сервірований на 12 персон. Яка ймовірність того, що кожен гість займе місце, яке зарезервоване спеціально під нього?
30. В групі 20 студентів. Викладач навмання викликає до дошки 6 студентів. Яка ймовірність того, що серед викликаних є перший та останній за списком?

Задача 11.2. (Теорема додавання та множення ймовірностей).

1. У студента є 4 відформатовані флешки та 6 неформатованих. Студент випадково бере одну флешку, потім іншу. Яка ймовірність того, що перша буде відформатована, а друга ні?
2. В гаманці є 5 купюр 500гр. та 3 купюри в 1000гр. Навмання виймаються 3 купюри. Знайти ймовірність того, що купюри складуть суму в 2500гр.
3. Ймовірність виконання завдання студентом А та Б відповідно дорівнює 0,6 та 0,8. Знайти ймовірність того, що з першої спроби обидва студенти виконають завдання
4. На фабриці 550 робітників: 380 мають вищу освіту, 412 середню спеціальну, 357 середню спеціальну та вищу. Знайти ймовірність того, що випадковий робітник має вищу або середню спеціальну освіту.
5. Сигналізація має 3 незалежні датчики. Ймовірність спрацювання першого, другого, третього відповідно 0,8; 0,7; 0,9. Знайти ймовірність спрацювання хоча б одного датчика.
6. Робітник обслуговує 4 станка. Ймовірності поломки від 1 до 4 станка відповідно 0,3; 0,7; 0,4; 0,6. Знайти ймовірність того, що жоден з станків не вийде з ладу.
7. Серед 100 приборів шість мають дефекти. Прибори довільним чином

- розділені на 2 рівні групи. Знайти ймовірність того, що всі прибори з дефектом потраплять в одну групу.
8. Ймовірність працевлаштування в банку 0,5 в хедж-фонді 0,6. Крім того одночасне працевлаштування в ці дві організації одночасно складає 0,3. Знайти ймовірність працевлаштування хоча б в одну з організацій.
 9. Снайпер робить незалежно один від одного чотири постріли по мішені з ймовірністю ураження відповідно 0,4; 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність ураження мішені тільки двічі.
 10. Автомобіль проходить 3 типу перевірок на СТО. Першу перевірку проходить в 90% випадків, другу в 80%, третю в 75% випадків. Знайти ймовірність того, що авто пройде техогляд.
 11. Під час експлуатації прибору можливі два типу поломок з ймовірністю 0,2 та 0,25 відповідно. Знайти ймовірність того, що хоча б одна поломка прибору відбудеться.
 12. Монета підкидується три рази. Яка ймовірність того, що цифра випадає рівно два рази.
 13. Три стрілка попадають в мішень з ймовірністю відповідно 0,85; 0,8; 0,7. Знайти ймовірність того, що за одного пострілу хоча б одне попадання в мішень відбудеться.
 14. Є 30 екзаменаційних білетів. Знайти ймовірність того, що випадково витягнутий білет має номер кратний 2 або 3.
 15. Тільки 1 ключ з 6 відкриває сейф. Знайти ймовірність того, що прийдеться випробувати рівно 3 ключа для відкриття сейфу.
 16. Проводиться три незалежних випробування. Ймовірність того, що при одному випробуванні похибка вийде за межі допуску, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що не більше одного випробування вийде за межі допуску.
 17. В урні є 8 червоних та 6 синіх куль. З урни один за одним виймаються три кулі. Знайти ймовірність того, що усі вони сині.
 18. Підкинуто монету та гральний кубик. Знайти ймовірність того, що на монеті випаде герб, а на кубіку – цифра, яка кратна 2.
 19. Ймовірність того, що при трьох незалежних підрахунках голосування буде оголошено результат виборів хоча б один раз, дорівнює 0,875. Знайти ймовірність оголошення результатів виборів в окремому підрахунку голосів.
 20. Два студенти намагаються незалежно один від іншого розв'язати задачу по теорії ймовірності. Перший це зможе зробити з ймовірністю 60%, а другий – 80%. Знайти ймовірність, що хоча б один студент розв'яже задачу.
 21. В партії ноутбуків в середньому 4% браку. Знайти ймовірність того, що серед випадково обраних двох ноутбуків буде хоча б один

бракований.

22. В урні 3 білих та 4 чорних кулі. З урни витягуються 3 кулі. Знайти ймовірність того, що хоча б один з них білий.
23. Гральний кубик підкидується 6 разів. Знайти ймовірність того, що випаде хоча б одна шестірка.
24. Скільки разів потрібно підкинути пару гральних кубиків, щоб із ймовірністю, не менше за 0,5, хоча б раз з'явилася сума очок 12?
25. Рибак може спіймати лина з ймовірністю 0,5, а окуня з ймовірністю 0,7. Улов складається з 5 риб. Яка ймовірність того, що більшість з них окуні?
26. Студент любить включати класичну музику з ймовірністю 0,4, а сучасну музику – 0,7. Яка ймовірність того, що студент буде слухати тільки класичну музику?
27. Два інженера приймають правильне рішення з ймовірністю 0,8 та 0,95 відповідно. Знайти ймовірність того, що обидва приймуть невірне рішення.
28. Професор любить грати в шашки з вахтером інституту. Ймовірність виграшу професора дорівнює 0,4, ймовірність нічиєї – 0,3. Було зіграно 3 партії. Яка ймовірність того, що професор виграв більше партій, ніж вахтер?
29. В університеті чекають іноземну делегацію, в яку входять 2 шпигуни. Перший з них дає інтерв'ю з ймовірністю 0,8, а другий – 0,6. Яка ймовірність того, що інтерв'ю відбудеться хоча б з одним з шпигунів?
30. Кішка обирає запропоновані їй продукти: сметану з ймовірністю 0,7, рибку – з ймовірністю 0,95. Яка ймовірність того, що кішка не буде обирати а ні сметану, а ні рибку?

Задача 11.3. (Формула повної ймовірності та формула Байеса).

1. В двох папках комп'ютеру знаходяться однакові файли: в першій 20, з них 2 зашифрованих; в другій 10 файлів та 4 зашифрованих файлу. Навмання була вибрана папка, а потім файл. Він виявився зашифрованим. Знайти ймовірність того, що він з 2 папки.
2. Два програміста намагалися зробити програму. Перший з них може це зробити з ймовірністю 60%, а другий – 80, незалежно один від одного. Відомо, що як мінімум одному вдалося зробити програму. Знайти ймовірність того, що це вдалося зробити обом.
3. В двох архівах однотипні файли. В першому архіві – 20 файлів,

причому 3 неробочі; в другому – 40 файлів та 2 неробочих. Випадковим чином обраного архіву було обрано 1 файл ,який виявився неробочим. Яка ймовірність того, що він був випадково обраний з першого архіву?

4. На сучасному автомобілі встановлено сигналізацію та супутникову систему безпеки. Ймовірність злому сигналізації становить 0,2, а ймовірність злому супутникової системи – 0,1. Знайти ймовірність того, що автомобіль буде угнано.
5. Гральний кубик підкидається два рази. Знайти ймовірність того, що обидва рази з'явиться однакова кількість очок.
6. Журі складається з трьох судів, які виносять рішення незалежно один від одного: два з них, кожен з ймовірністю 0,8, приймає вірне рішення, а третій для винесення рішення підкидає монету. Остаточне рішення приймається більшістю голосів. Знайти ймовірність винесення правильного рішення.
7. З корзини, яка містить 3 червоних та 7 зелених яблука, виймають по черзі всі яблука, окрім одного. Знайти ймовірність того, що останнє яблуко буде зеленим.
8. Студенти вважають, що з 50 екзаменаційних білетів 10 є «гарними». Петро та Віктор по черзі витягують по одному білету. Знайти ймовірність того, що обидва отримали «гарні» білети.
9. Студент прийшов на екзамен, знаючи 20 питань з 25. Викладач задає три питання. Знайти ймовірність того, що студент зможе відповісти хоча б на одне питання.
10. Ймовірність знаходження кредитної картки в піджаку складає 50%, причому з рівною ймовірністю вона може знаходитись в довільному з восьми карманів. Її власник оглянув 7 карманів та поки не знайшов її. Знайти ймовірність того, що вона в восьмому кармані.
11. В корзині три червоних та сім зелених яблук. З корзини витягли одне

яблуко та не встановивши колір відклали в сторону. Після цього дістали ще одне яблуко, яке виявилось зеленим. Знайти ймовірність, що перше яблуко – зелене.

12. Супермаркет отримує товар від 3 постачальників: 55% товару від 1 постачальника, 20% від другого, 25% від третього. В поставках 1 постачальника 5% браку, в другого – 6%, в третього – 8%. Знайти ймовірність того, що бракований товар був від другого постачальника.
13. Знайти ймовірність відгадати пін-код телефона з першого разу якщо в ньому використовується 4 строго зростаючі цифри.
14. Кожен з котів спить в одній з коробок. Знайти ймовірність того, що усі коти будуть спати в одній коробці, якщо вони обирають кожен коробку з рівною ймовірністю та незалежно один від одного.
15. Три акробати стоять один на одному. Ймовірність падіння нижнього – 0,08, другого – 0,5, третього – 0,31. Знайти ймовірність того, що акробати впадуть.
16. Два студенти приймають участь в олімпіаді. Ймовірність того, що перший зробить усі задачі дорівнює 0,89. Для другого ця ймовірність дорівнює 0,92. Знайти ймовірність того, що тільки один займе перше місце.
17. Для кожного з трьох студентів ймовірність провалу екзамену дорівнює відповідно 0,01, 0,03, 0,1. Знайти ймовірність того, що тільки двоє з них здадуть екзамен.
18. Два випромінювача видають сигнал, причому перший видає вдвічі більше сигналів, ніж другий. Ймовірність отримати спотворений сигнал від першого випромінювача дорівнює 0,06, від другого – 0,03. Яка ймовірність отримати спотворений сигнал в спільному каналі зв'язку?
19. На складі є 12 телевізорів, з яких 8 китайського виробництва. Знайти

ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання телевізорів, будуть більше двох китайських.

20. Курс долара підвищується з ймовірністю 0,9 та знижується з ймовірністю 0,1. При підвищенні курсу фірма отримує прибуток з ймовірністю 0,85, а при зниженні курсу – з ймовірністю 0,5. Знайти ймовірність отримання прибутку.
21. Два з трьох незалежно працюючих приборів відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовив перший та другий прибор, якщо ймовірності відмови першого, другого, третього прибору відповідно дорівнює 0,2; 0,4; 0,3.
22. Партія деталей виготовлена трьома працівниками, причому перший працівник виготовив 35% усіх деталей, другий – 40%, третій – всю іншу продукцію. Брак в їх виробництві складає відповідно 2%, 3%, 4%. Випадково вилучена деталь – бракована. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена третім працівником.
23. Два стрілка незалежно один від іншого стріляють по одній мішені. Ймовірність попадання для першого стрілка дорівнює 0,8, для другого – 0,4. Після пострілу знайдено одне попадання. Знайти ймовірність того, що в мішень попав перший стрілок.
24. В урні 25 куль, серед яких 8 помаранчевих. По черзі виймають три кулі. Знайти ймовірність того, що усі кулі помаранчеві.
25. Роботи з ймовірністю 0,2, 0,3, 0,5 потрапляють на перевірку до одного з 3 викладачів, кожен з яких може пропустити помилку з ймовірністю 0,01, 0,02, 0,015 відповідно. З числа перевірених робіт випадково вибрана одна робота перевірена правильно. Яка ймовірність того, що її перевіряв 3 викладач?
26. По винищувачу робиться 3 незалежних пострілу. Ймовірність попадання першим пострілом складає 0,5, другим – 0,6, третім – 0,8. Для збиття літака достатньо 3 попадань. При одному попаданні

винищувач збивається з ймовірністю 0,3, при двох – 0,6. Знайти ймовірність того, що при 3 пострілах винищувач буде збито.

27. В магазині є 10 плиток білого та 15 чорного шоколаду. Покупець взяв спочатку одну, потім другу шоколадку. Знайти ймовірність того, що перша плитка була білим шоколадом, а друга чорним.
28. Резидент розвідки з ймовірністю 0,3, 0,4, 0,5 відповідно може звернутися до одного з трьох зв'язкових (№1, №2, №3). Ймовірність провалу зв'язкових відповідно дорівнює 0,3, 0,6, 0,7. Зустріч резидента з зв'язковим пройшла вдало. Яка ймовірність того, що це був зв'язковий №2?
29. В коробку, яка містить 3 однакові ручки, поклали ще одну – з червоним стрижнем. Потім випадково витягнули одну ручку. Знайти ймовірність того, що витягли ручку з червоним стрижнем, якщо рівну ймовірність мають усі можливі припущення про число червоних ручок в коробці.
30. На столі дві вази з цукерками. Ймовірність того, що цукерка з першої вази – з вишнею, дорівнює 0,8, а з другої – 0,9. Знайти ймовірність того, що випадково обрана цукерка з довільної вази буде «з вишенькою».

Задача 11.4. (Схема повторних випробувань Бернуллі).

1. Серед 12 договорів, які перевіряються ревізором, сім оформлені невірно. Знайти ймовірність того, що серед довільно обраних п'яти договорів знайдуться три невірно оформлені.
2. Серед білетів лотереї половина виграшних. Знайти мінімальну кількість білетів, щоб з ймовірністю, не меншою за 0,99, бути впевненим в виграші хоча б по одному білету.

3. Банк має 5 відділень. Кожен день з ймовірністю 0,3 кожне відділення, незалежно один від одного, можуть заказати на наступний день крупну суму грошей. Знайти ймовірність, що в кінці дня отримано рівно 2 заявки.
4. Гральний кубик підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що двічі з'явиться число, яке кратне 3.
5. В банку встановили, що середньостатистичний клієнт може загубити на протязі тижня кредитку з ймовірністю 0,001. Банк має 2000 виданих кредиток. Знайти ймовірність того, що на наступному тижні буде загублена рівно одна кредитка.
6. ФБР встановило, що 1% сто доларових купюр складають фальшиві, але банківські касири десяту частину цих купюр приймають за справжні. В деякий банк кожен дені приносять 200 сто доларових купюр (справжніх та фальшивих). Знайти ймовірність того, що серед них є хоча б одна фальшива.
7. Відомо, що під час проходження 10 кіл гонки болід середньої команди формули 1 не отримає серйозних поломок з ймовірністю 0,7, отримає фатальні пошкодження з ймовірністю 0,1 та виникають відкази обладнання з ймовірністю 0,2. Два відкази обладнання приводять до фатальної зупину гонки. Знайти ймовірність того, що при проходженні всієї дистанції гонки (100 кіл) болід не буде повністю зламаний.
8. В цеху знаходяться 4 однотипних станка, які за зміну працюють з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в випадковий момент часу працює хоча б один станок.
9. Схожість насіння деякого овочу має ймовірність 0,8. Яка ймовірність того, що з 5 посіяного насіння зійде не менше 4?
10. Ймовірність банкрутства кожної з 6 фірм до кінця року дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що до кінця року збанкрутують не більше 2

фірм?

11. Ймовірність успіху в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успіх відбудеться рівно 75 разів?
12. Електронна сигналізація складається з 28 однотипних блоків, кожен з яких може відмовити з ймовірністю 0,25. Знайти кількість відказів сигналізації з максимальною ймовірністю.
13. За даними технічного контролю на 100 металічних брусів, виходить 30 з браком. Яка ймовірність того, що з випадково обраних 7 брусів не більше двох будуть браковані?
14. Виробництво дає 1% браку. Яка ймовірність того, що з обраних на дослідження 1100 деталей бракованих буде не більше 17?
15. РЛС складається з 500 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відказу довільного елемента за тиждень роботи складає 0,002. Знайти ймовірність того, що за тиждень неробочими будуть рівно 3 елементи.
16. Ймовірність того, що на протязі часу довільний абонент подзвонить на комутатор, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів. Яка ймовірність того, що на протязі часу подзвонить 5 абонентів.
17. На конференцію запрошені 75 учасників, причому кожен з них прибуває з ймовірністю 0,8. В готелі заброньовано 65 місць. Яка ймовірність того, що усі, хто прибув на конференцію знайдуть місця в hotelі.
18. В епідемію вірусу 40% населення міста заражені вірусом. В лабораторії працює 24 співробітника. Яка ймовірність того, що 10 з них будуть заражені?
19. Поруч з пунктом спостереження пробігають їжаки. Спостерігач виявляє їжака з ймовірністю 0,1. Скільки їжаків повинно пробігти,

- щоб з ймовірністю 0,99 спостерігач зафіксував би не менше 5 їжаків?
20. Два снайпера стріляють по черзі до першого влучання по мішені. Для першого снайпера ймовірність влучання одним пострілом – 0,2, для другого снайпера – 0,3. Враховуючи, що перший постріл розігрується за жеребом, знайти ймовірність того, що перший снайпер зробить більше пострілів, ніж другий.
21. Пара гральних кубиків підкидається 7 разів. Яка ймовірність того, що сума очок дорівнює 7 та випаде двічі?
22. В скількох партіях з рівним за силою опонентом виграш більш є ймовірним: в трьох партіях з чотирьох або в п'яти з восьми?
23. Баскетболіст виконує сім кидків по корзині. Ймовірність влучання при кожному кидку складає 0,6. Знайти ймовірність того, що баскетболіст влучить не менш 6 разів.
24. В коробці 100 сірників. Ймовірність не загорання сірника є 0,117. Яка ймовірність того, що в довільно обраній коробці рівно 11 сірників не загориться?
25. На факультеті 500 студентів. Яка ймовірність того, що 1 січня є днем народження одночасно трьох студентів факультету?
26. В офісе 5 лампочок. Кожна перегорає за рік з ймовірністю 0,02. Знайти ймовірність того, на протязі року перегорить не менш 3 лампочок.
27. Ймовірність забити пенальті у гравців «Барселони» дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 10 пенальті довільний гравець заб'є не менше 8?
28. Ймовірність влучання в мішень дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що при 40 пострілах буде не більше половини влучань?
29. Ймовірність народження хлопчика 0,515. Знайти ймовірність того, що в сім'ї з 5 дітей не більше двох хлопчиків.

30. Ймовірність того, що країна поверне кредит МВФ без затримок, дорівнює 0,8. МВФ видало країні 8 кредитів. Знайти ймовірність того, що як мінімум 6 кредитів повернуть вчасно.

2. Дискретні та неперервні випадкові величини. Функції від випадкових величин та їх закон розподілу.

Задача 11.5. (Дискретна випадкова величина та її числові характеристики). Незалежні дискретні випадкові величини (ДВВ) X, Y задані таблицями розподілу. Знайти математичне сподівання та дисперсії: $M(X), M(Y), D(X), D(Y)$, скласти таблиці розподілу ДВВ $U = X + 2Y, V = X \cdot Y$, знайти $M(U), M(V), D(U), D(V)$.

1.

x_i	-1	1	2
p_i	p	0,1	0,3

y_i	2	4
p_i	0,4	0,6

2.

x_i	-1	1	5
p_i	0,3	0,1	p

y_i	-1	2
p_i	0,9	0,1

3.

x_i	-1	3	5
p_i	0,2	0,5	p

y_i	-2	3
p_i	0,4	0,6

4.

x_i	2	3	4
p_i	p	0,2	0,3

y_i	1	2
p_i	0,6	0,4

5.

x_i	2	4	5
p_i	0,3	p	0,2

y_i	-1	1
p_i	0,4	0,6

6.

x_i	-4	1	2
p_i	p	0,6	0,3

y_i	-1	3
p_i	0,8	0,2

7.

x_i	-1	2	4
p_i	p	0,4	0,1

y_i	-1	3
p_i	0,3	0,7

8.

x_i	1	2	4
p_i	0,2	p	0,5

y_i	3	4
p_i	0,8	0,2

9.

x_i	-8	2	3
p_i	0,4	p	0,5

y_i	2	8
p_i	0,3	0,7

11.

x_i	1	3	4
p_i	0,5	p	0,1

y_i	-1	3
p_i	0,1	0,9

13.

x_i	-2	-1	3
p_i	p	0,1	0,4

y_i	2	8
p_i	0,1	0,9

15.

x_i	1	2	5
p_i	p	0,3	0,2

y_i	3	4
p_i	0,2	0,8

17.

x_i	1	2	3
p_i	p	0,3	0,2

y_i	-1	4
p_i	0,2	0,8

19.

x_i	-3	1	5
p_i	0,1	0,6	p

y_i	2	4
p_i	0,4	0,6

21.

x_i	-4	1	2
p_i	0,5	p	0,3

y_i	1	5
p_i	0,2	0,8

23.

x_i	-5	1	2
p_i	0,6	0,1	p

y_i	1	2
p_i	0,3	0,7

25.

x_i	-4	-1	2
p_i	p	0,2	0,4

y_i	1	3
p_i	0,3	0,7

27.

x_i	-2	-1	1
p_i	p	0,4	0,1

y_i	2	6
p_i	0,2	0,8

29.

x_i	-2	2	5
p_i	0,2	p	0,5

y_i	-4	5
p_i	0,7	0,3

10.

x_i	-3	1	6
p_i	0,1	p	0,5

y_i	-2	1
p_i	0,7	0,3

12.

x_i	2	3	5
p_i	0,2	p	0,2

y_i	-1	1
p_i	0,3	0,7

14.

x_i	-2	-1	3
p_i	0,5	0,1	p

y_i	2	7
p_i	0,8	0,2

16.

x_i	-1	1	2
p_i	0,1	0,5	p

y_i	3	5
p_i	0,7	0,3

18.

x_i	-1	1	2
p_i	0,1	p	0,2

y_i	3	4
p_i	0,5	0,5

20.

x_i	-1	1	2
p_i	0,1	p	0,2

y_i	2	8
p_i	0,3	0,7

22.

x_i	-3	1	2
p_i	0,4	p	0,2

y_i	3	4
p_i	0,9	0,1

24.

x_i	-2	1	2
p_i	p	0,2	0,3

y_i	2	3
p_i	0,6	0,4

26.

x_i	1	3	5
p_i	0,2	0,2	p

y_i	-3	2
p_i	0,4	0,6

28.

x_i	1	4	6
p_i	0,1	0,3	p

y_i	1	4
p_i	0,5	0,5

30.

x_i	3	4	5
p_i	0,3	0,4	p

y_i	-1	2
p_i	0,1	0,9

Задача 11.6. (Дискретна випадкова величина та її числові характеристики).

Для заданої дискретної випадкової величини (ДВВ) X знайти її ряд розподілу, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середньо квадратичне відхилення, ймовірність попадання в $[2,4]$:

1. Фірма обладнана 4 незалежними серверами. Ймовірність відмови кожного з них на протязі дня є $0,1$. ДВВ – кількість безвідмовно працюючих серверів на протязі дня.
2. Гральний кубик підкидається до випадання 6, але не більше 5 разів. ДВВ – кількість підкидань.
3. Схожість насіння деякого овочу дорівнює $0,8$. Посіяно 5 насінь. ДВВ – кількість схожого насіння з 5 посіяного.
4. Серед 10 монет 3 фальшиві. Випадково виймають 5 монет. ДВВ – кількість фальшивих монет в виборці.
5. Ймовірність того, що баскетболіст влучить в корзину складає $\frac{3}{4}$. Він кидає м'яч в корзину до попадання, але не більше 5 разів. ДВВ – кількість кидків.
6. На полиці стоять 5 вітчизняних книг та 4 іноземні книжки. Читач випадково бере 4 книги. ДВВ – кількість вітчизняних книжок в виборці.
7. В першій коробці 4 білих кулі, в другому – 3 білі та 1 чорна куля, в третій – 2 білі та 2 чорні кулі, в четвертій – 1 біла та 3 чорні, в п'ятій – 4 чорні кулі. З кожної коробки випадково виймають 1 кулю. ДВВ – кількість білих куль в виборці.
8. В контрольній роботі 5 задач. Ймовірність правильного розв'язання студентом кожної задачі, дорівнює $\frac{3}{5}$ та не залежить від правильності розв'язання інших задач. ДВВ – кількість правильно розв'язаних задач.
9. В гаманці 5 двогривневих та 3 п'яти гривневих монет. Випадково виймають 4 монети. ДВВ – сума грошей в гривнях, яку складають вибрані монети.
10. В корзині є 3 синіх та 7 червоних м'ячів. Випадково виймають 4 м'яча. ДВВ – кількість червоних м'ячів в виборці.
11. Протилежні грані кубика розмальовані в червоний, зелений та синій колір. Кубик підкидається 5 разів. ДВВ – кількість підкидань, в результаті яких зверху буде зелена грань.
12. В ящику є 4 білі та 6 чорних куль. Випадковим чином виймаються кулі до появи чорної кулі. Кулі не повертаються в ящик. ДВВ – кількість витягнутих куль.

13. Серед партії товару – 30% складають нові покоління, а інші – попередньої генерації. Покупець випадково обирає 4 одиниці товару. ДВВ – кількість товарів попередньої генерації в виборці.
14. В ящику є 10 деталей, серед яких 4 браковані. Випадково виймаються 5 деталей. ДВВ – кількість бракованих деталей в виборці.
15. На екзамен прийшли 6 студентів, рівень підготовки яких однаковий. Ймовірність того, що кожен студент вдало здасть екзамен ,дорівнює $\frac{2}{3}$ і не залежить від результатів здачі решти студентів. ДВВ – число студентів, які вдало здали екзамен.
16. На маршруті працюють 4 автобуси. Ймовірність несправності кожного з них на протязі дня дорівнює $\frac{2}{5}$ і не залежить від стану інших. ДВВ – кількість справних автобусів на протязі дня.
17. Гральний кубик підкидається до випадіння двох шестірок підряд, але не більше 5 разів. ДВВ – кількість підкидань.
18. В гаманці є 4 купюри в 500гр. та 4 в 1000гр. Випадково виймають 5 купюр. ДВВ – сума в гривнях, яку складають вийняті купюри.
19. Ймовірність захворіти вірусом під час епідемії складає 60%. Розглядається контрольна група з 5 людей. ДВВ – кількість людей даної групи, які здорові під час епідемії.
20. На учбових пострілах САУ мало 5 снарядів і закінчували постріли до першого влучання. Ймовірність влучання одного пострілу складає 0,3. ДВВ – число снарядів, які залишаються після кінця пострілів.
21. На чемпіонаті з фігурного катання партнери виконують три підтримки. На першій, другій та третій підтримках партнер роняє партнершу з ймовірністю 0,1; 0,3; 0,8 відповідно. ДВВ – кількість падінь партнерші.
22. В шухляді є 3 банки з консервованими огірками та 5 банок з помідорами. Дехто на Різдво з’їв 2 банки, які обрані були випадковим чином. ДВВ – кількість банок з помідорами ,які залишились після

Різдва.

23. Ймовірність небезпечної концентрації фенолу в річці Інгулець при кожній пробі складає 0,03. Досліджуються 6 проб. ДВВ – кількість проб з небезпечною концентрацією.
24. В партії 10% деталей іншого стандарту. Випадково обрані 4 деталі. ДВВ – число нестандартних деталей серед чотирьох обраних.
25. Ймовірність того, що річ, яку взяли напрокат буде повернена справною, дорівнює 0,8. Було видано 5 речей. ДВВ – число речей, які були взяті напрокат та повернені справними.
26. Монету підкидають 5 разів. ДВВ – кількість числа появ «герба».
27. Чіп містить 2000 транзисторів. Ймовірність поломки одного транзистору за час роботи чіпу складає 0,001. ДВВ – кількість числа транзисторів, які зламалися на протязі часу.
28. Фірма закупила 5 вантажівок марки №1 та 4 марки №2. За рік було зламано 4 вантажівки. ДВВ – число вантажівок марки №2 ,які були зламані за рік.
29. Початковий капітал фірми – 10000 дол. Відомо, що після кожної угоди капітал з ймовірністю 50% збільшується в півтора рази, та з ймовірністю $\frac{1}{4}$ зменшується в півтора рази. ДВВ – сума капіталу після двох угод.
30. При передачі сигналу можливо його спотворення. Кількість сигналів – 12, ймовірність спотворення сигналу – 0,4. ДВВ – кількість спотворених сигналів.

Задача 11.7. (Неперервна випадкова величина). Для варіантів 1-15 по заданій функції розподілу $F(x)$ знайти щільність $f(x)$, параметр A , математичне сподівання та дисперсію неперервної випадкової величини (НВВ), ймовірність попадання в інтервал (a,b) , побудувати графіки

$f(x), F(x)$. В варіантах 16-30 знайти те саме за відомою щільністю.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(4x - x^2), & x \in (0, 2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$a = 0, b = 1.$

$$16. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ A(x-2)(4-x), & x \in [2, 4], \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{3}, \\ A \sin 3x, & x \in (-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}], \\ 1, & x > -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$a = -\frac{\pi}{3}, b = -\frac{\pi}{4}.$

$$17. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(4x+3), & x \in [0, 2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$3. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \arctg x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$a = 0, b = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$18. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2\sqrt{2}, \\ \frac{A}{\pi\sqrt{16-x^2}}, & x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], \\ 0, & x > 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$4. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(x-1)^3, & x \in (1, 3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$a = 1, b = 2.$

$$19. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$5. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ A \cos \frac{x}{3}, & x \in (\frac{3\pi}{2}, 3\pi], \\ 1, & x > 3\pi. \end{cases}$$

$a = \frac{3\pi}{2}, b = \frac{9\pi}{4}.$

$$20. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(2x+1), & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$6. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ A(x+2)^2, & x \in (-2, 0], \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$a = -1, b = 0.$

$$7. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \sin \frac{x}{2}, & x \in (0, \pi], \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

$a = \frac{\pi}{6}, b = \pi.$

$$8. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \arcsin x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$a = 0, b = \frac{1}{2}.$

$$9. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Ax^3, & x \in (0, 2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$a = 1, b = 2.$

$$10. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ A \cos 2x, & x \in (-\frac{\pi}{4}, 0], \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$a = -\frac{\pi}{4}, b = -\frac{\pi}{6}.$

$$11. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(6x - x^2), & x \in (0, 3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$a = 0, b = 1.$

$$21. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(4x - x^3), & x \in [0, 2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$22. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(1-x), & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$23. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ A(6x^2 - x - 3), & x \in [2, 4], \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$24. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ A \cos^2 x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$25. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(x^2 + 2x), & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$26. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(4x - x^2), & x \in [0, 2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$a = -1, b = 1.$

$$12. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ A \sin 2x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}], \\ 1, & x > -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$a = -\frac{\pi}{3}, \quad b = -\frac{\pi}{4}.$$

$$27. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ A(x-3)(7-x), & x \in [3, 7], \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

$$a = -1, \quad b = 1.$$

$$13. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(1 - \cos x), & x \in (0, \pi], \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2}.$$

$$28. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(1 - \frac{x}{3}), & x \in [0, 3], \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$a = -1, \quad b = 1.$$

$$14. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \left(x^2 + \frac{2}{3}x \right), & x \in (0, \frac{1}{3}], \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$a = 0, 1, \quad b = 0, 5.$$

$$29. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ A\sqrt{x+2}, & x \in [-2, 2], \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$a = -1, \quad b = 1.$$

$$15. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ A(x^2 - 4), & x \in (2, 3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$a = 2, \quad b = 2, 5.$$

$$30. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A(e^x - 1), & x \in [0, 1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$a = -1, \quad b = 1.$$

Задача 11.8. (Рівномірний закон розподілу неперервних випадкових величин (НВВ)). НВВ рівномірно розподілена на відрізку $[a, C]$ (або $[C, b]$) з відомим математичним сподіванням M . Знайти сталу C , функцію та щільність розподілу (побудувати їх графіки), знайти дисперсію НВВ:

1. $[-2, C], M = 3.$

11. $[2, C], M = 6.$

21. $[C, 7], M = 1, 5.$

2. $[2, C], M = 3, 5.$

12. $[3, C], M = 5.$

22. $[C, 8], M = 3, 5.$

3. $[-3, C], M = 3.$

13. $[-4, C], M = 3.$

23. $[C, 5], M = 0, 5.$

4. $[-1, C], M = 1, 5.$

14. $[3, C], M = 7.$

24. $[C, 7], M = 4, 5.$

5. $[-2, C], M = 2.$

15. $[-2, C], M = 3.$

25. $[C, 6], M = 1, 5.$

6. $[1, C], M = 5, 5.$

16. $[C, 5], M = 2.$

26. $[C, 3], M = -1, 5.$

7. $[-5, C], M = 2.$ 17. $[C, 2], M = -0,5.$ 27. $[C, 8], M = 3,5.$
 8. $[1, C], M = 4.$ 18. $[C, 4], M = -1,5.$ 28. $[C, 5], M = 1,5.$
 9. $[-1, C], M = 3.$ 19. $[C, 7], M = 2,5.$ 29. $[C, 9], M = 5.$
 10. $[-2, C], M = 3,5.$ 20. $[C, 9], M = 4.$ 30. $[C, 5], M = 2.$

Задача 11.9. (Показниковий закон розподілу неперервних випадкових величин (НВВ)).

1. Дистанція X між двома сусідніми літаками в строю має показниковий розподіл з $M(X) = 100$ м. Небезпека зіткнення літаків виникає при зменшенні дистанції до 20 м. Знайти ймовірність виникнення цієї небезпеки.
2. Строк експлуатації прибору – НВВ X , яка розподілена за експоненціальним законом з параметром $\mu = 3$. Знайти щільність та її числові характеристики цієї випадкової величини.
3. Ймовірність виходу з ладу трансформатора за час t визначається формулою: $f(t) = 1 - e^{-0,002t}$. Випадкова величина T – час безвідмовної роботи трансформатора. Знайти математичне очікування та дисперсію T .
4. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом зі щільністю ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 4e^{-4x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність події $\{X \in (0, 2; 0, 5)\}$.

5. Для якого значення k функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2k} e^{-kx}, & x \geq 0, \end{cases}$$

є щільністю ймовірності експоненціального розподілу?

6. Ймовірність поломки муфти повного приводу позашляховика за час експлуатації t задається формулою $f(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Випадкова величина T – час роботи муфти до поломки (в міс.). Знайти середній час безвідмовної роботи муфти.
7. Час безвідмовної роботи розподілений за експоненціальним законом зі щільністю

$$f(t) = 0,002e^{-0,002t}, \quad t > 0.$$

Знайти ймовірність того, що робот пропрацює без відмов не менше 1000 год.

8. Час безвідмовної роботи телевізору розподілений за

експоненціальним законом з математичним сподіванням 5000 год. Яка ймовірність того, конкретний телевізор безвідмовно пропрацює від 7000 до 10000 год.?

9. Час служби чіпу – НВВ, який розподілений експоненційно ($\mu = 0,001$). Знайти середній строк служби чіпу та ймовірність того, що він пропрацює більше 50 год?
10. Час безвідмовної роботи генератору розподілений за експоненціальним законом з математичним сподіванням 18 міс. Яка ймовірність того, що генератор відмовить не менше чим через рік після ремонту?
11. Час T роботи лазера до моменту поломки має експоненціальний розподіл зі щільністю $f(t) = 0,00042e^{-0,00042t}$, $t > 0$. Знайти ймовірність того, що лазер пропрацює до поломки 5000 год.
12. Час T безвідмовної роботи прибору має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 1,5 тис. год. Яка ймовірність того, що прибор зламається менш ніж за 100 год. роботи?
13. Час T безвідмовної роботи елемента схеми розподілений за експоненціальним законом з параметром $\mu = 0,01$. З якою ймовірністю елемент пропрацює безвідмовно не менш за 200 год?
14. Час T роботи шарніру до поломки має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 1250 год. Яка ймовірність того, що шарнір безвідмовно пропрацює від 1250 до 2500 год?
15. Кількість відказів за час T елементів апаратури – НВВ, яка розподілена за експоненціальним законом $\mu = 0,2$. Знайти функцію розподілу та ймовірність того, що кількість зламаних елементів знаходиться між 3 до 10.
16. Час T безвідмовної роботи рентген-контролю має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням 1300 год. Яка ймовірність того, що апарат безвідмовно пропрацює від 240 до 480 год?
17. За звичай промова президента триває годину. На цей раз за годину воно не закінчилося. Враховуючи, що тривалість промов розподілена за експоненціальним законом, знайти ймовірність того, що вона закінчиться в найближчі 15 хв.
18. Час, необхідний для оформлення договору, є НВВ, яка розподілена за експоненціальним законом з параметром $\mu = 0,3$ дог/год. Знайти ймовірність того, що оформлення договору займе менше 7 год. Знайти середній час оформлення договору.
19. Час T виявлення цілі радіолокатором розподілений за експоненціальним законом. Знайти ймовірність того, що ціль буде виявлена за час від 5 до 15 с після початку пошуку, якщо середній час виявлення цілі дорівнює 10 с.

20. Середній час роботи кожного з 3 незалежних елементів схеми дорівнює 750 год. Для безвідмовної роботи схеми потрібна безвідмовна робота хоча б одного з трьох елементів. Знайти ймовірність того, що схема буде працювати від 450 до 600 год., якщо час роботи кожного елемента незалежно та розподілений за експоненціальним законом.

Варіанти 21-24.

НВВ X розподілена за експоненціальним законом з параметром рівним номеру варіанта. Знайти щільність розподілу НВВ, функцію розподілу, побудувати їх графіки, знайти математичне сподівання та дисперсію, знайти ймовірність того, що X приймає значення, які менші за її математичне сподівання.

Варіанти 25-27.

Середнє значення НВВ X , яка розподілена за експоненціальним законом, дорівнює $2a$, де a – номер варіанту. Знайти щільність розподілу НВВ, функцію розподілу, побудувати їх графіки, знайти математичне сподівання та дисперсію, знайти ймовірність того, що X попадає в $(a, 2a)$.

Варіанти 28-30.

Ймовірність того, що НВВ X , яка розподілена за експоненціальним законом, приймає значення більші за $2n$, де n – номер варіанту, дорівнює e^{-2} . Знайти щільність розподілу НВВ, функцію розподілу, побудувати їх графіки, знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 11.10. (Нормальний закон розподілу неперервних випадкових величин (НВВ)).

1. Поточна ціна акцій може бути наближена нормальним розподілом з математичним сподіванням 15,28 дол. та середнє квадратичним відхиленням 0,12 дол. Знайти ймовірність того, що ціна акції буде знаходитись між 15,1 та 15,4 дол.
2. Ціна акцій деякої компанії має нормальний розподіл. На протязі року в 20% робочих днів ціна акцій була менше за 20 дол., а в 75% робочих днів вона була більше 25 дол. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення ціни акцій.
3. При розслідуванні ДТП було встановлено, що вона могла трапитись в наслідок деталі, розміри якої виходять за межі допуску (15 мм, 25

мм). Розмір деталей на заводі-виробнику мають нормальний розподіл з математичним сподіванням 20 мм., та середнім відхиленням – 5 мм. Знайти ймовірність того, що причиною аварії є деталь нестандартного розміру.

4. Відомо, що значення тесту IQ Стенфорда-Біне розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 100$ та середнім квадратичним $\sigma = 16$. Знайти частку людей, у яких IQ менше 75.
5. Маса зловленої риби підпорядковується нормальному розподілу з $a = 375$ г., $\sigma = 25$ г. Знайти ймовірність того, що маса однієї риби буде від 300 г. до 425 г.
6. Випадкова величина розподілена нормально з $\sigma = 5$. Знайти довжину інтервалу симетричного відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,9973 потрапить випадкова величина.
7. НВВ X – помилка прибору, яка розподілена за нормальним законом з $a = 0$, $\sigma = 3$ мм. Знайти ймовірність того, що в трьох незалежних вимірюваннях похибка хоча б один раз потрапить в $(0,2; 4)$.
8. Прес виробляє деталі. Деталь годна, якщо відхилення випадкової величини – діаметру деталі від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,7 мм. Випадкова величина розподілена нормально з параметром $\sigma = 0,4$ мм. Знайти скільки в середньому буде годних деталей серед 100 виготовлених.
9. Точність виготовлення деталей характеризується систематичною помилкою 2 мм., а випадкове відхилення розподілений за нормальним законом з середнє квадратичною помилкою 10 мм. Яка ймовірність того, що відхилення довжини деталі від стандарту знаходиться в межах від 8 до 12 мм.
10. Коливання прибуття потягів на станцію має нормальний розподіл з $\sigma = 6$ та середнім значенням – 40 потягів в сутки. Знайти ймовірність того, що за добу на станцію прибуло від 37 до 43 потягів.
11. Час виплавки деталі є випадковою величиною з нормальним розподілом з $\sigma = 5$ хв. та середнім значенням 40 хв. Знайти ймовірність того, що час формування деталі прийме значення від 35 до 45 хв.
12. Випадкові помилки вимірювання експерименту мають нормальний розподіл із середнім квадратичним відхиленням 20 мм. та математичним сподіванням 0. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведено з похибкою , яка не перевищує за абсолютною величиною 10 мм.
13. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 10. Ймовірність потрапляння X в інтервал $(10, 20)$ дорівнює 0,3. Знайти ймовірність потрапляння X в інтервал $(0, 10)$.

14. Випадкова величина – період накопичення холестерину в організмі людини – розподілений за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 6$ міс. та $\sigma = 1$ міс. Яка ймовірність того, що випадкова величина буде знаходитися між 4 та 7 міс.?
15. Число машин на стоянці – випадкова величина, яка розподілена за нормальним законом з $a = 100$, $\sigma = 10$ машин. Знайти ймовірність того, що на стоянці буде не більше 90 машин.
16. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу:

$$f(x) = \frac{0,1}{\sqrt{\pi}} e^{-0,01(x-2)^2}.$$

Знайти ймовірність того, що X приймає значення від 0 до 12.

17. Якість виробленого хімічного препарату – випадкова величина з нормальним розподілом: математичне сподівання – 5 молей, дисперсія – $0,81 \text{ мол}^2$. Яка ймовірність того, що якість випадково взятого препарату знаходиться в межах 4-7 молей?
18. Коливання часу захвату цілі РЛС розподілений за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 16$ хв. та $\sigma = 2$ хв. Знайти ймовірність часу захвату цілі більшим ніж 19 хв?
19. Випадкова похибка вимірювання має нормальний розподіл з параметрами $a = 0$, $\sigma = 5$ мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведено з похибкою, яка перевищує за абсолютною величиною 12 мм.

В варіантах 20-30 НВВ X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням a та середнє квадратичним відхиленням σ . За допомогою заданої умови, знайти σ , щільність $f(x)$ та ймовірність попадання НВВ в $[c, d]$.

20. $a = 1$, $P(X \leq 0,6) = 0,3085$, $[c, d] = [0,4; 1,4]$.
21. $a = -1$, $P(X \leq -0,4) = 0,8413$, $[c, d] = [-2,2; 0,2]$.
22. $a = 1,2$, $P(X \leq 0,2) = 0,0228$, $[c, d] = [0,7; 1,7]$.
23. $a = -1,2$, $P(X \leq -0,6) = 0,8413$, $[c, d] = [-1,8; -0,9]$.
24. $a = 1,5$, $P(X \leq 1,9) = 0,6915$, $[c, d] = [1,26; 1,74]$.
25. $a = -1,5$, $P(X \leq -1) = 0,8413$, $[c, d] = [-1,8; -1,1]$.
26. $a = 0,5$, $P(X \leq 0,1) = 0,1587$, $[c, d] = [0,1; 0,9]$.
27. $a = -0,5$, $P(X \leq -0,1) = 0,6919$, $[c, d] = [-0,98; 0,06]$.
28. $a = 0,8$, $P(X \leq 1,2) = 0,8413$, $[c, d] = [0,6; 1,04]$.
29. $a = 0,4$, $P(X \leq 0,2) = 0,3085$, $[c, d] = [0; \infty]$.

30. $a = 0,8$, $P(X \geq 0,6) = 0,6915$, $[c, d] = [0,4; 1,4]$.

3. Вибірка та її характеристики. Оцінка параметрів розподілу та довірчі інтервали.

Задача 11.11. Знайти для даної вибірки:

- а) варіаційний та статистичний ряд;
- б) інтервальний статистичний ряд з рівними інтервалами (7 шт.) та побудувати гістограму;
- в) полігон частот та емпіричну функцію розподілу;
- г) вибіркове середнє, дисперсію, моду та медіану.

1.

112	101	155	137	109	129	152	128	132	116
125	125	142	140	125	118	125	135	149	145
106	109	138	145	118	128	125	105	122	138
120	118	133	118	129	149	124	153	132	118
132	132	138	128	122	115	143	140	122	152
128	118	126	132	134	123	122	159	112	110
112	121	105	117	112	129	129	118	112	116

2.

87	85	91	94	102	80	75	102	99	101
120	122	101	88	80	97	92	91	94	82
115	100	97	91	87	116	121	101	123	97
88	90	101	95	93	92	88	94	98	99
95	105	112	116	118	108	95	99	92	100
94	106	112	122	100	92	93	82	111	102
100	101	123	97	90	104	108	101	96	111

3.

547	565	587	553	548	554	561	562	551	572
565	555	563	568	586	549	575	537	581	553
543	568	574	564	547	549	553	572	535	555
552	545	554	571	569	539	549	553	562	561
558	563	563	547	552	562	554	563	558	572
577	554	552	566	557	551	552	571	551	552
599	561	552	551	561	538	533	541	588	558

4.

90	123	132	85	122	105	125	142	99	125
118	105	115	92	115	142	98	123	103	144
106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
103	122	94	112	97	128	102	116	125	132

5.

139	112	132	85	122	105	125	142	99	125
116	105	92	115	98	123	103	144	115	142
106	92	118	86	125	105	122	138	105	118
102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
95	124	103	102	118	112	115	103	95	122
125	118	96	126	98	106	128	118	126	103
134	112	101	105	117	92	129	99	118	112

6.

154	143	155	113	155	171	168	153	135	168
145	168	122	163	117	165	132	139	107	125
146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
155	152	145	198	192	143	159	116	126	155
163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
168	157	143	179	165	159	149	141	102	169

7.

470	801	790	764	764	950	533	402	520	780
699	840	869	551	707	635	703	801	859	475
797	797	789	875	698	580	821	737	910	856
950	741	473	988	737	787	667	649	797	939
532	885	590	590	975	910	731	869	435	889
584	967	950	531	775	485	756	656	680	741
950	458	511	857	536	699	474	789	889	533

8.

450	434	424	432	440	443	415	446	423	472
442	452	444	425	403	458	455	431	446	424
438	442	482	432	416	477	431	432	412	462
496	468	424	438	452	446	418	474	432	452
466	488	452	489	451	422	442	492	473	402
481	468	404	498	467	398	440	449	417	425
444	498	466	442	483	462	492	435	449	422

9.

250	244	224	232	240	224	244	226	253	232
248	216	230	254	258	202	225	224	252	234
242	212	231	251	204	246	232	282	242	252
296	242	254	218	226	252	238	224	298	260
276	254	282	242	270	254	260	232	268	242
244	276	224	240	272	268	281	234	268	251
271	212	234	262	204	261	254	266	278	248

10.

165	143	152	167	164	199	171	171	156	149
147	155	158	145	158	177	161	181	153	171
175	153	174	154	163	174	152	188	162	197
187	158	154	171	163	172	152	178	151	172
153	186	147	169	147	166	161	171	161	186
148	161	189	199	162	167	198	168	135	152
154	175	163	149	162	161	161	193	172	175
161	164	178	138	164	172	187	178	143	161

11.

153	174	154	163	174	152	188	162	197	234
188	158	154	171	163	172	152	178	151	172
155	186	147	169	147	166	161	171	161	186
149	161	189	199	162	167	198	168	135	152
156	175	163	149	162	161	161	193	172	175
162	164	178	138	164	172	187	178	143	161
165	163	177	161	149	146	152	139	156	152

12.

212	231	251	204	246	232	282	242	252	276
297	242	254	218	226	252	238	224	298	260
277	254	282	242	270	254	260	232	268	242
345	276	224	240	272	268	281	234	268	232
272	212	234	292	204	261	254	266	278	248
253	262	256	264	272	242	244	246	253	234
237	264	252	248	247	268	229	235	262	212
238	242	254	263	261	266	254	264	248	251

13.

165	143	52	166	164	199	171	171	156	171
148	155	158	145	158	177	161	181	153	197
176	153	174	154	163	174	152	188	162	172
189	158	154	171	163	172	152	178	151	186
157	186	147	169	147	166	161	171	161	152
150	161	189	199	162	167	198	168	135	175

158	175	163	149	162	161	161	193	172	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--

14.

216	230	254	258	202	225	224	252	234	250
243	212	231	251	204	246	232	282	242	252
298	242	254	218	226	252	238	224	298	260
278	254	282	242	270	254	260	232	268	242
246	276	224	240	272	268	281	234	268	232
273	212	234	262	201	261	254	266	278	248
254	262	256	264	272	242	244	246	253	234
239	264	252	248	247	268	229	235	262	212

15.

165	143	152	167	165	199	171	171	156	152
149	155	158	145	158	177	161	181	153	171
153	174	154	163	174	152	188	162	197	178
190	158	154	171	163	172	152	178	151	172
159	186	147	169	147	166	161	171	161	186
151	161	189	199	162	167	198	168	135	152
160	175	163	149	162	161	161	193	172	175
165	164	178	137	164	172	187	178	143	161

16.

147	153	179	165	159	149	141	102	169	157
169	154	143	155	113	155	171	168	153	135
150	152	142	132	152	161	148	136	138	149
157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
156	152	145	198	192	143	159	116	126	155
164	169	165	148	151	153	139	166	138	128
169	169	155	152	175	177	131	154	174	187
180	177	162	149	146	113	151	152	134	125

17.

558	563	569	547	552	562	554	549	575	578
561	552	551	561	538	533	547	552	557	543
547	565	587	553	548	554	561	564	562	558
566	555	563	568	586	549	575	564	553	555
567	556	546	552	543	554	556	566	592	562
544	568	574	564	547	549	553	578	557	561
553	545	554	571	569	539	549	538	575	554
577	552	566	557	551	552	546	584	572	535

18.

577	568	557	564	547	549	553	578	557	575
554	5455	554	571	569	539	549	538	575	566
558	563	563	547	552	562	554	549	575	558
547	595	587	553	548	554	561	564	562	544
555	563	568	586	549	575	564	553	585	592
577	554	552	566	557	551	552	546	584	556
601	561	552	551	561	538	533	547	552	557
555	541	588	558	563	558	572	578	539	556

19.

77	45	49	92	13	69	52	26	22	36
48	25	59	57	65	69	55	68	49	63
38	53	48	68	52	73	42	62	71	45
63	55	16	78	52	95	77	66	35	54
68	55	49	65	79	48	59	53	41	38
12	39	57	51	65	66	43	52	63	43
55	69	31	62	48	46	51	43	16	34
74	51	82	52	46	75	49	55	57	54

20.

347	365	387	348	354	361	364	362	346	358
365	355	363	368	359	375	364	353	385	363
343	368	374	364	347	349	353	378	357	358
352	345	354	352	371	369	349	338	375	388
366	358	363	347	352	362	354	349	375	341
377	354	352	366	357	351	352	346	384	351
399	363	361	352	351	361	338	353	333	357

21.

9	9	6	9	9	7	6	11	6	7
6	10	6	7	6	8	6	5	5	4
6	6	7	12	5	7	8	5	10	9
7	7	5	11	9	7	6	5	7	6
5	5	12	9	8	7	9	8	5	5
6	13	11	11	5	8	10	9	4	7
3	6	9	8	12	11	9	10	4	14

22.

39	40	38	43	41	42	40	38	41	42
41	40	42	39	41	41	36	43	41	42
34	36	37	42	42	42	40	41	41	46
47	48	52	56	68	70	68	64	56	58

41	42	39	33	34	37	43	45	47	71
43	42	43	41	42	47	48	49	52	53
57	52	41	42	46	48	49	39	32	40
39	37	42	43	54	58	59	64	66	68

23.

10	15	16	17	18	19	20	15	16	11
17	12	13	14	15	11	18	16	15	18
20	20	21	23	26	28	23	28	27	24
27	24	25	25	26	32	33	31	34	43
26	32	26	27	28	29	30	21	22	23
42	24	23	35	23	25	36	37	24	21
58	54	49	47	32	36	43	23	24	28

24.

150	144	124	132	140	124	144	153	151	148
116	130	154	158	102	125	124	152	134	148
142	121	112	131	151	104	146	132	182	142
152	196	142	154	158	118	126	152	138	124
144	176	124	140	172	168	181	134	168	132
144	112	134	162	104	161	154	166	178	148
162	164	164	172	142	144	146	112	171	

25.

128	105	115	92	115	142	98	123	103	144
112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
92	112	132	85	122	105	125	142	99	125
106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
103	122	94	112	97	128	102	116	125	132

26.

102	112	118	85	112	115	103	95	122	125
157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
157	143	179	165	159	149	141	102	169	168
151	168	122	163	117	165	132	139	107	125
152	152	142	132	152	161	148	136	138	149
153	154	143	155	113	155	171	168	153	135
157	152	145	198	192	143	159	116	126	155
165	169	165	148	151	153	139	166	138	128

27.

242	254	218	226	252	238	224	298	260	287
250	216	230	254	258	202	225	224	252	234

244	212	231	251	204	246	232	282	242	252
299	254	282	242	270	254	260	232	268	242
276	224	240	272	268	281	234	268	232	300
274	212	234	262	204	261	254	266	278	248
255	262	256	264	272	242	244	246	253	234
240	264	252	248	247	268	229	235	262	212

28.

262	267	275	266	246	252	261	269	262	268
259	248	266	259	252	248	252	232	269	287
253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
253	268	277	249	248	263	243	266	212	255
249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
267	232	258	246	278	279	257	255	243	258
254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
249	252	294	232	269	263	269	271	245	235

29.

558	565	587	553	548	554	561	564	562	544
563	568	586	549	575	564	553	585	577	553
563	564	547	552	562	554	549	575	558	592
546	577	568	574	564	547	549	553	578	557
557	577	568	574	564	547	549	538	575	566
558	554	552	566	557	551	552	546	584	532
602	561	552	551	561	538	533	547	552	557
556	541	588	558	563	558	572	578	539	556

30.

165	143	152	167	164	199	171	171	156	151
155	155	158	145	158	177	161	181	153	171
177	153	174	154	163	174	152	188	162	197
191	158	154	171	163	172	152	178	151	172
161	186	147	169	147	166	161	171	161	186
161	189	199	162	167	198	168	135	152	146
162	175	163	149	162	161	161	193	172	175
153	164	178	138	164	172	187	178	1433	161

Задача 11.12. (Точкові оцінки параметрів розподілу). За даними задачі 11.11. (припускаючи, що задано нормальний розподіл), знайти точність оцінки математичного сподівання a за вибірковою середньою \bar{x}_e з надійністю γ :

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $\gamma = 0,95$. | 11. $\gamma = 0,97$. | 21. $\gamma = 0,92$. |
| 2. $\gamma = 0,97$. | 12. $\gamma = 0,96$. | 22. $\gamma = 0,94$. |

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 3. $\gamma = 0,93.$ | 13. $\gamma = 0,92.$ | 23. $\gamma = 0,93.$ |
| 4. $\gamma = 0,94.$ | 14. $\gamma = 0,95.$ | 24. $\gamma = 0,99.$ |
| 5. $\gamma = 0,98.$ | 15. $\gamma = 0,98.$ | 25. $\gamma = 0,95.$ |
| 6. $\gamma = 0,99.$ | 16. $\gamma = 0,93.$ | 26. $\gamma = 0,98.$ |
| 7. $\gamma = 0,93.$ | 17. $\gamma = 0,92.$ | 27. $\gamma = 0,93.$ |
| 8. $\gamma = 0,94.$ | 18. $\gamma = 0,95.$ | 28. $\gamma = 0,97.$ |
| 9. $\gamma = 0,93.$ | 19. $\gamma = 0,94.$ | 29. $\gamma = 0,94.$ |
| 10. $\gamma = 0,95.$ | 20. $\gamma = 0,95.$ | 30. $\gamma = 0,99.$ |

Задача 11.13. (Точкові оцінки параметрів розподілу). Використовуючи табл. 1 додатку 2 (кожен номер варіанту відповідає номеру строки), отримати реалізацію вибірки x_1, \dots, x_n , $n=15$, рівномірно розподілених на $[0, \theta]$ випадкових чисел та знайти:

- варіаційний ряд;
- емпіричну функцію розподілу та намалювати її графік разом з теоретичною функцією розподілу;
- методом моментів оцінку параметру θ .

Задача 11. 14. (Довірчі інтервали). В умовах задачі 11.11 знайти довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання a з надійністю задачі 11.12.

Задача 11.15. (Довірчі інтервали). За вибіркою, яка відповідає нормально розподіленої випадкової величині X , потрібно побудувати:

- довірчий інтервал для математичного сподівання m , який відповідає довірчій ймовірності p_1 , якщо відомо середнє σ ;
- довірчий інтервал для m , який відповідає довірчій ймовірності p_2 , якщо невідомо середнє σ ;
- довірчі інтервали для дисперсії та середнього σ , які відповідають довірчій ймовірності p_3 , якщо відоме математичне сподівання m .
- довірчі інтервали для дисперсії та середнього σ , які відповідають довірчій ймовірності p_4 , якщо невідоме математичне сподівання.

1.

$$m = -12; \sigma = 0,15; p_1 = 0,8; p_2 = 0,9; p_3 = p_4 = 0,99;$$

-11,9; -12; -12,2; -12,3; -12; -11,7; -12; -12;
-12,2; -12,2; -12,2; -11,9; -11,9; -11,8; -11,9; -12,3;
-12; -12; -11,9; -12,2; -11,9; -12,3; -11,9; -12,2;
-11,9; -12; -12,3.

2.

$$m = 14; \sigma = 0,16; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,95; p_4 = 0,98;$$

14; 13,9; 13,8; 14,1; 14; 14,4; 14,1; 13,9 14,2;
13,9; 13,7; 13,9 14; 14; 14,3; 13,8; 24,2; 13,7;
13,9; 13,8; 13,9; 14,1; 14,3; 14,1; 14; 13,1.

3.

$$m = -20; \sigma = 0,12; p_1 = 0,9; p_2 = 0,95; p_3 = p_4 = 0,99;$$

-19,98; -20,04; -20,13; -19,95 -20,1; -19,97 -19,86;
-19,97; -20,04; -19,95; -20,05; -19,78; -20;
-20,03; -19,99;

4.

$$m = -24; \sigma = 0,13; p_1 = 0,98; p_2 = 0,8; p_3 = p_4 = 0,95;$$

-23,98; -23,97; -24,06; -24,12; -23,73; -23,92; -24,1;
-24,04; -23,94; -24,04; -24,03; -23,8; -23,99; -24,12;
-23,98; -24,02; -24,06; -24,02; -23,91; -24,06; -23,99.

5.

$$m = -6; \sigma = 0,1; p_1 = 0,99; p_2 = 0,9; p_3 = p_4 = 0,95;$$

-6,01; -5,74; -6,14; -6,13; -5,93; -6,05; -6,14; -5,96;
-5,91; -6,02; -5,9; -5,92; -5,84; -5,98; -6,14; -5,82;
-5,95; -5,98; -6,09; -5,9; -6,09; -6,14; -6,05; -6,03;
-6,06; -5,97.

6.

$$m = -8; \sigma = 0,12; p_1 = 0,95; p_2 = 0,8; p_3 = p_4 = 0,99;$$

-8,1; -8,12; -8,12; -8,13; -8,08; -7,92; -7,73; -8;
-8,06; -8,1; -7,8; -7,97; -8,07; -8,17; -7,89; -8,2;
-7,7; -8,2; -8,2; -7,84; -8,01; -8,03; -8,03; -8,05;
-8,03; -7,94; -7,94.

7.

$$m = 42; \sigma = 0,11; p_1 = 0,99; p_2 = 0,8; p_3 = 0,9; p_4 = 0,95;$$

42,22; 42,05; 41,96; 41,86; 41,92; 41,86; 41,91; 41,86;
41,94; 42,08; 41,95; 41,96; 41,92; 41,92; 41,74; 41,93;
42,02; 42,01; 42,28; 41,86; 42,12; 41,98; 42,11; 42,04.

8.

$$m = -10; \sigma = 0,1; p_1 = 0,99; p_2 = 0,95; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$$

-10,11; -10,04; -10,14; -9,97; -9,95; -9,85; -10,1;
-10,09; -10,04; -9,93; -9,98; -10,1; -10,08; -10,08;
-10,08; -10,06; -9,95; -9,86; -10,04; -10,13; -9,87;
-9,97; -9,86; -9,94; -9,84; -10,18.

9.

$m = 20, 3; \sigma = 0, 12; p_1 = 0, 98; p_2 = 0, 9; p_3 = 0, 95; p_4 = 0, 99;$
20,38; 20,17; 20,4; 20,26; 20,17; 20,28; 20,47; 20,19;
20,17; 20,07; 20,34; 20,23; 20,4; 20,18; 20,34; 20,1;
20,24; 20,2; 20,18; 20,41; 20,35; 20,35; 20,19; 20,41;
20,43.

10.

$m = 12, 2; \sigma = 0, 14; p_1 = 0, 9; p_2 = 0, 8; p_3 = 0, 99; p_4 = 0, 99;$
12,2; 12,1; 12,2; 12,3; 12,4; 12; 12,5; 12,2; 12,2;
12,3; 12,4; 12,4; 12; 12,2; 12,5; 11,9; 12,1; 12,4;
12; 12,4; 12,2; 12,4; 12,5; 12; 12,2; 11,9; 12,1;
12,1; 12,3; 12,3.

11.

$m = 52; \sigma = 0, 12; p_1 = 0, 8; p_2 = 0, 95; p_3 = 0, 9; p_4 = 0, 99;$
51,8; 52,19; 52,02; 1,86; 52,14; 52,1; 51,88; 51,94;
51,99; 52,02; 51,96; 52; 52; 52,06; 51,91; 52,09;
52,02; 51,98; 52,15; 52,11; 51,98; 52; 51,74; 52,06;
52,06; 52,17; 51,98.

12.

$m = -10, 2; \sigma = 0, 1; p_1 = 0, 95; p_2 = 0, 8; p_3 = 0, 9; p_4 = 0, 99;$
-10,29; -10,12; -10,26; -10; -10,27; -10,33; -10,25;
-10,3; -10,19; -10,15; -10,3; -10,17; -10,11; -10,25;
-10,21; -10,14; -10,12; -10,22; -10,15; -10,36; -10,03;
-10,06; -9,98; -10,35; -10,91; -10,11; -10,31; -10,36;
-10,03.

13.

$m = 12, 4; \sigma = 0, 14; p_1 = 0, 8; p_2 = 0, 9; p_3 = 0, 99; p_4 = 0, 95;$
12,3; 12,3; 12,6; 12,6; 12,4; 12,5; 12,5; 12,6; 12,3;
12,4; 12,3; 12,4; 12,5; 12,5; 12,4; 12,5; 12,6; 12,3;
12,5; 12,6; 12,4; 12,4; 12,4; 12,7; 12,7; 12,2; 12,4;
12,4; 12,1.

14.

$m = 32, 1; \sigma = 0, 12; p_1 = 0, 95; p_2 = 0, 8; p_3 = 0, 98; p_4 = 0, 99;$
32,09; 32,04; 32,15; 32,01; 32,09; 32,28; 32,08; 32,28;
32,29; 32,18; 32,2; 32,09; 31,91; 32,19; 32,06; 32,04;
32,15; 32,25; 32,07; 32,09; 32,26; 32,13; 32; 32,18;
31,88; 32,29; 32,26; 31,98.

15.

$$m = -10,2; \sigma = 0,1; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,98; p_4 = 0,95;$$

-10,17; -10,21; -10,26; -10,21; -10,23; -10,02; -10,18;
-10,26; -10,15; -10,28; -10,09; -10,1; -10,22; -10,08;
-10,29; -10,11; -10,28; -10,26; -10,19; -10,2; -10,21;
-10,22; -10,19; -10,06; -10,08.

16.

$$m = 28,2; \sigma = 0,13; p_1 = 0,99; p_2 = 0,9; p_3 = 0,95; p_4 = 0,98;$$

28,19; 28,2; 28,32; 28,24; 28,11; 28,27; 28,29; 27,87;
28,21; 28,22; 28,22; 28,08; 28,11; 28,2; 28,26; 28,06;
28,05; 28,18; 28,01; 28,23; 28,37; 28,24; 27,95; 28,2;
28,06; 28,27; 28,23.

17.

$$m = 15,6; \sigma = 0,12; p_1 = 0,98; p_2 = 0,8; p_3 = 0,95; p_4 = 0,9;$$

15,74; 15,66; 15,46; 15,56; 15,48; 15,46; 15,58; 15,52;
15,59; 15,44; 15,39; 15,7; 15,6; 15,55; 15,81; 15,65;
15,71; 15,32; 15,62; 15,54; 15,47; 15,63; 15,61; 15,82;
15,48; 15,79.

18.

$$m = 72; \sigma = 0,11; p_1 = 0,9; p_2 = 0,95; p_3 = 0,98; p_4 = 0,8;$$

72,05; 71,93; 71,91; 71,95; 72,2; 72,08; 71,96; 72,14;
72,01; 72,1; 71,99; 71,92; 72,01; 71,96; 72,28; 71,97;
71,95; 71,86; 72,06; 71,86; 72,03; 71,8; 71,94; 71,8;
71,03; 72,07; 71,97.

19.

$$m = 15,6; \sigma = 0,15; p_1 = 0,8; p_2 = 0,9; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$$

15,6; 15,6; 15,5; 15,8; 15,7; 15,7; 15,3; 15,5; 15,8;
15,7; 15,3; 15,6; 15,7; 15,7; 15,6; 15,7; 15,6; 15,3;
15,8; 15,8; 15,6; 15,7; 15,6; 15,8; 15,8; 15,5; 15,6;
15,8; 15,6; 15,7.

20.

$$m = -30; \sigma = 0,14; p_1 = 0,95; p_2 = 0,8; p_3 = 0,9; p_4 = 0,99;$$

-30,02; -30,04; -30,12; -29,92; -30,21; -30,15; -30,04;
-30,09; -29,99; -29,85; -29,93; -29,98; -29,99; -30,29;
-30,13; -30,15; -30,11; -29,95; -29,87; -30,05; -29,95;
-29,87; -30,05; -30,14; -30,17; -30,11; -29,74; -30,21.

21.

$$m = 42; \sigma = 0,1; p_1 = 0,9; p_2 = 0,95; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$$

42,03; 41,93; 42,22; 41,86; 42,12; 41,92; 42,06; 41,92;
41,99; 41,98; 41,96; 42,01; 42,03; 41,95; 41,98; 42,01;
42,17; 41,83; 42,08; 41,93; 41,87; 41,96; 41,82; 42;
42,11; 42,04; 41,94; 42,18.

22.

$$m = 65,1; \sigma = 0,12; p_1 = 0,9; p_2 = 0,98; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$$

65,21; 65,19; 64,94; 65,08; 65; 65,22; 65,33; 65,26;
65,03; 65; 65,07; 65,33; 65,11; 65,19; 65,13; 65,15;
65,13; 65,21; 65,14; 64,88; 65,1; 65,27; 65,03; 65,14;
65,02; 65,05; 64,94.

23.

$$m = -24; \sigma = 0,13; p_1 = 0,95; p_2 = 0,9; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$$

-23,85; -23,86; -24,19; -24,18; -23,98; -23,95; -23,93;
-23,92; -23,9; -23,96; -24,13; -24,05; -23,92; -23,86;
-23,88; -24,01; -23,84; -23,94; -24,07; -24,06; -23,87;
-24,17; -23,93; -23,94; -24,22; -24,25.

24.

$$m = -44; \sigma = 0,12; p_1 = 0,8; p_2 = 0,95; p_3 = 0,9; p_4 = 0,98;$$

-44; -43,9; -44; -44; -44; -44; -44,1; -44,3; -43,9;
-44,2; -43,8; -44,1; -43,9; -44; -43,9; -44,3; -44; -44,2;
-44,1; -44,1; -43,7; -44,3; -44; -43,9; -44; -43,9; -43,9.

25.

$$m = 18,2; \sigma = 0,12; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$$

18,52; 18,2; 18,3; 18,21; 18,38; 18,03; 18,12; 18,19;
18,27; 18,29; 18,31; 18,21; 18,37; 18,21; 18,25; 18,25;
18,36; 18,36; 18,01; 18,36; 18,18; 18,12; 17,9; 18,45;
18,3; 18,36; 18,41; 18,27; 17,99.

26.

$$m = 15,3; \sigma = 0,13; p_1 = 0,8; p_2 = 0,95; p_3 = 0,9; p_4 = 0,98;$$

15,2; 15,17; 15,43; 15,08; 15,15; 15,24; 15,26; 15,07;
15,29; 15,38; 15,1; 15,61; 15,29; 15,22; 15,19; 15,45;
15,48; 15,43; 15,35; 15,28; 15,3; 15,41; 15,34; 15,25;
15,18; 15,41; 15,43; 15,31.

27.

$$m = 16,4; \sigma = 0,14; p_1 = 0,95; p_2 = 0,9; p_3 = 0,8; p_4 = 0,98;$$

16.3; 16.5; 16.5; 16.3; 16; 16.6; 16.3; 16.3; 16.4;
16.6; 16.4; 16.3; 16.3; 16.6; 16.3; 16.6; 16.6; 16.6;
16.4; 16.2; 16.5; 16.2; 16.3; 16.4; 16.3; 16.3; 16.3.
16.5; 16.5.

28.

$$m = 25,2; \sigma = 0,1; p_1 = 0,98; p_2 = 0,9; p_3 = 0,95; p_4 = 0,8;$$

25.27; 25.13; 25.33; 25.27; 25.23; 25.22; 25.2; 25.18;
25.2; 25.18; 25.31; 25.28; 25.14; 25.1; 25.19; 25.35;
25.24; 25.04; 25; 25.24; 25.11; 25.46; 25.19; 25.36;
25.21; 25.08.

29.

$$m = 41; \sigma = 0,15; p_1 = 0,99; p_2 = 0,95; p_3 = 0,99; p_4 = 0,8;$$

41.2; 40.7; 41.1; 41.1; 41.3; 40.9; 40.8; 40.8; 40.7;
41; 40.9; 41.1; 40.9; 41; 41.2; 41; 41.1; 41.2;
41; 41; 41.4; 41.1; 40.8; 41; 41; 41.

30.

$$m = -50; \sigma = 0,15; p_1 = 0,9; p_2 = 0,8; p_3 = 0,95; p_4 = 0,99;$$

-50.2; -49.9; -50.1; -50.3; -49.8; -50; -49.8; -50.1;
-50.1; -49.9; -49.9; -50.1; -50.1; -49.9; -50; -50.2;
-50.3; -49.9; -49.8; -50; -50.1; -50.1; -50.1; -50.1.

Задача 11.16. (Довірчі інтервали).

1. З великої партії авто деталей на випробування взяли 100 деталей, причому 5 з них зламалися раніше гарантійного терміну. Знайти довірчий інтервал ймовірності отримати брак з довірливою ймовірністю 0,95.
2. Студент купив 100 лотерейних білетів, причому з них 4 є виграшними. Знайти довірчий інтервал ймовірності виграшу в лотереї з довірливою ймовірністю 0,9.
3. З попередніх досліджень відомо, що місячний дохід працівника має нормальний розподіл зі стандартним відхиленням 60 дол. Випадковим чином були опитані 225 працівників. Їх середній дохід склав 310 дол. Знайти 95%-й довірчий інтервал середнього місячного

доходу усіх працівників.

4. Для випадково відібраних 100 шин деякої фірми середній пробіг склав 40000 км при стандартном відхиленні 8000 км. Знайти 99 %-й довірчий інтервал для генерального середнього.
5. З 30 випадково обраних хворих поліклініки 5 людей виявилось хворими грипом. Знайти довірчий інтервал ймовірності захворювання грипом серед усіх хворих з довірчою ймовірністю 0,85.
6. При працюючому контролі якості з 20 деталей 2 виявилися бракованими. Знайти довірчий інтервал ймовірності виявлення браку з довірчою ймовірністю 0,9.
7. Для випадково обраних 16 курсантів академії середній вік склав 21 рік. Знайти 95 %-й довірчий інтервал для генерального середнього, якщо відомо, що розподіл віку всіх курсантів має нормальний розподіл з стандартним відхиленням 0,6.
8. При дослідженні 200 пограбувань, в яких постраждалим була потрібна допомога, з'ясувалося, що 40 % з них трапилося у постраждалих вдома. Знайти 90 %-й довірчий інтервал для частки пограбувань, які трапляються вдома.
9. В одному місті для дослідження випадку нападів собак на людей розглянули період 5 місяців. З'ясувалося, що в середньому кожен місяць собаки нападають на 8 людей. Стандартне відхилення за вибіркою дорівнює 3. Знайти 95 %-й довірчий інтервал для середнього числа людей, які кожен місяць наражаються нападів собак.
10. В китайському місті Н. серед 200 народжених в один з місяців дітей доводилося 120 хлопчиків. Знайти довірчий інтервал для ймовірності народження хлопчика з довірчою ймовірністю 0,85.
11. В університеті взяли вибірку 2 потоки студентів. Вибірка містила 150 студентів: 60 чоловіків та 90 жінок. З надійністю 90% знайти довірчий інтервал для ймовірності того, що студент університету – чоловік.
12. Середній вік 12 аспірантів університету виявився 26,8 рок, стандартне відхилення вибірки склало 4,8 роки. Знайти 95 % -й інтервал для середнього віку генеральної сукупності усіх аспірантів університету.
13. Враховуючи проведення 100 експериментів було виявлено, що в середньому для виробництва чіпу потрібно 5,5 с, а оцінка середнє квадратичного відхилення складає 1,7 с. Зробив припущення, що час виробництва чіпу має нормальний розподіл, знайти довірчий інтервал для математичного сподівання часу виробництва чіпу з надійністю 0,85.
14. За результатом 5 незалежних вимірювань з рівною точністю заряду електрона отримані наступні результати:
4,781·10⁻¹⁰, 4,792·10⁻¹⁰, 4,795·10⁻¹⁰, 4,779·10⁻¹⁰, 4,792690⁻¹⁰. Вважаючи,

що похибки розподілені за нормальним законом та вимірювання не мають систематичної помилки, знайти довірчий інтервал для заряду електрона з надійністю 99%.

15. На контрольних випробуваннях 16 однакових конденсаторів середній термін роботи виявився рівним 3000 год, оцінка середнє квадратичного відхилення – 20 год. Вважаючи, що термін роботи конденсатору має нормальний розподіл, знайти для нього довірчий інтервал з довірчою ймовірністю 0,9.
16. При перевірці 100 деталей з великої партії знайдено 10 бракованих. Знайти 95 %-й довірчий інтервал для частки бракованих деталей в усій партії.
17. З великої партії транзисторів одного типу було перевірено 100 шт. Коефіцієнт підсилення 36 транзисторів виявився менший за 10. Знайти 95 %-й інтервал частки таких транзисторів в усій партії.
18. Менеджер бажає з'ясувати з точністю до 25 дол середню суму поштових витрат компанії. Який повинен бути об'єм вибірки, щоб мати 85 %-ю гарантію правильності результатів? Стандартне відхилення дорівнює 80 дол.
19. При випробуванні 100 приладів середній час безвідмовної роботи дорівнює 500 год. Знайти 99 %-й довірчий інтервал часу роботи, якщо виправлена вибіркова дисперсія $s^2 = 100$.
20. Знайти 99 %-й довірчий інтервал середнє квадратичного відхилення вимірювання ємкості конденсатору, якщо середнє за 16 вимірюваннями дорівнює 20 мкФ, а оцінка середнє квадратичного відхилення склала 4 мкФ.
21. На протязі великого часу при аналізі матеріалу на вміст нікелю встановлено стандартне відхилення 0,12%. Знайти з довірчою ймовірністю 0,95 довірчий інтервал для справжнього вмісту нікелю в матеріалі, якщо за результатами 6 аналізів середній вміст нікелю склало 32,56%.
22. Вибірка з великої партії гідроприводів містить 100 одиниць. Середня тривалість роботи гідроприводу з вибірки дорівнює 1000 год. Знайти з довірчою ймовірністю 0,95 довірчий інтервал для середньої тривалості a роботи гідроприводу всієї партії, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості роботи $\sigma = 40$ год.
23. Робот виробляє макети. За вибіркою об'ємом $n = 100$ обчислено вибіркоче середнє розмірів виготовлених макетів. Знайти з довірчою ймовірністю 0,95 точність, з якою вибіркоче середнє оцінює математичне сподівання розмірів вироблених макетів, якщо їх середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$ мм.
24. Зроблено 5 незалежних вимірювань товщини пластини: 2,15; 2,18; 2,14; 2,16; 2,17. Оцінити справжнє значення товщини пластини за

- допомогою довірчого інтервалу з довірчою ймовірністю 0,95.
25. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,925 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковим середнім дорівнюватиме 0,2, якщо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 1,5$.
 26. За даними 9 незалежних однаково точних вимірювань деякої величини знайдені середнє арифметичне результатів вимірювань $\bar{x} = 30,1$ та виправлене середнє квадратичне відхилення дорівнює 6. Оцінити істинне значення вимірюваної величини за допомогою довірчого інтервалу з надійністю 0,99.
 27. За даними вибірки об'ємом $n = 16$ з генеральної сукупності знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення – 1 нормально розподіленої якісної ознаки. Знайти довірчий інтервал, який накриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю 0,95.
 28. При дослідженні 60 однакових приборів знайдено 10 зламаних. Знайти 90 %-й довірчий інтервал появи зламаних приборів в усій партії.
 29. Проведено 10 вимірювань одним приладом (без систематичної помилки) деякої фізичної величини, причому виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових помилок вимірювань дорівнює 0,8. Знайти точність приладу з надійністю 0,95.
 30. З 400 комп'ютерів, яких відібрали для перевірки, 10 виявилось бракованими. Знайти 95 %-й довірчий інтервал появи бракованого комп'ютера.

4. Статистична перевірка гіпотез. Кореляція та регресія.

Задача 11.17. (Критерій χ^2 при відомих параметрах розподілу). Розглянути інтервальну вибірку з задачі 11.11 відповідного варіанту. Використати χ^2 - критерій Пірсона з рівнем значущості $\alpha = 0,05$ для перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу.

Задача 11.17. (Критерій χ^2 при невідомих параметрах розподілу).

1. Стверджується, що результат дії лік залежить від способу його застосування. Перевірити цю гіпотезу за даними, які представлені в таблиці. Рівень значущості прийняти 0,95.

Результат/ спосіб застосування	А	В	С
--------------------------------	---	---	---

Несприятливий	11	17	16
сприятливий	20	23	19

2. В таблиці наведені дані про розподіл доходів (в тис. крон) заводських майстрів Швеції в 1939 році для вікових груп 40-50 років та окремо 50-60 років:

Дохід / вік	40-50 рок.	50-60 рок.
0-1	71	54
1-2	430	324
2-3	1072	894
3-4	1609	1202
4-6	1178	903
>6	158	112

Потрібно перевірити на рівні значущості 0,95 гіпотезу про те, що доходи заводських майстрів вікової групи 40-50 років та групи 50-60 років розподілені однаково.

3. В результаті проведеного дослідження було встановлено, що у 782 світлооких батьків сини теж мають світлі очі, а у 89 світлооких батьків сини – темноокі. У 50 темнооких батьків сини теж темноокі, а в 79 темнооких батьків сини – світлоокі. Перевірити гіпотезу о незалежності між кольором очей батьків та кольором очей їх синів. Рівень значущості 0,99.
4. Група студентів розбита на 2 групи по 300 людей в кожній. Результати ректорського контролю в кожній групі наступні: в 1-й групі бали 2,3,4,5 отримали відповідно 33, 43, 89, 144 студента, в другій групі відповідно 39, 35, 72, 154. Чи можливо за рівнем значущості 0,05 вважати обидві групи студентів однорідними?
5. Наступна таблиця містить дані про смертність серед матерів, які народили першу дитину за 4 різних термінах часу (n_i – кількість матерів, v_i – кількість смертей):

n_i	1072	1133	2455	1995
v_i	22	23	49	33

Перевірити гіпотезу H_0 про те, що в рівнях смертності між цими періодами не існує відмінності.

6. Через рівні проміжки часу в тонкому шарі розчину золота

регіструвалось число ξ частинок золота, які можна роздивитись за допомогою мікроскопа. За даними спостережень, які представлені в таблиці:

Число частинок	0	1	2	3	4	5	6	7	Σ
h_i	11	2168	130	68	32	5	1	1	518

перевірити гіпотезу H_0 , про пуасоновський розподіл випадкової величини ξ .

7. В таблиці наведені числа h_i ділянок рівної площі $0,25 \text{ км}^2$ південної частини Лондона, на кожний з яких прийшлося по i влучань ракет ФАУ 1,2 під час другої світової війни. Перевірити згоду досвідчених даних з законом розподілу Пуассона, якщо прийняти рівень значущості рівним $0,05$.

i	0	1	2	3	4	5	Σ
h_i	229	211	93	35	7	1	576

8. Серед 2020 сімей, які мають двох дітей, є 527 сімей, в яких 2 хлопчика, 476 – дві дівчини, інші – один хлопчик та одна дівчина. Чи можна з рівнем значущості $0,05$ стверджувати, що кількість хлопчиків в сім'ї з двома дітьми – біноміальна випадкова величина.
9. З 300 абітурієнтів, які поступили в університет на деякий факультет, 97 людей мали бал 5 в школі та 48 отримали 5 на вступних іспитах за тим самим предметом, причому тільки 18 абітурієнтів мали 5 і в школі і на іспиті. З рівнем значущості $0,1$ перевірити гіпотезу про незалежність оцінок 5 в школі та на іспиті.
10. В результаті застосування лік у різний спосіб, отримано наступні дані:

Результат / спосіб застосування	А	В	С
Несприятливий	11	17	16
Сприятливий	20	23	19

При рівні значущості $0,05$ перевірити гіпотезу, що результат дії лік залежать від способу застосування.

11. Відношення глядачів одного ток-шоу представлено соціологами в таблиці:

<i>Стать глядача</i>	<i>Позитивне</i>	<i>Байдуже</i>	<i>Негативне</i>
Чоловік	14	24	2
Жінка	29	36	15

Чи можна вважати, що відношення до даної передачі не залежить від статі, якщо рівень значущості 0,1?

12. Зміна продуктивності праці на заводі при проведенні заходів А, В, С задається наступними даними:

<i>Продуктивність / Тип заходу</i>	<i>А</i>	<i>В</i>	<i>С</i>
Збільшилась	14	47	16
Не змінилася	22	37	7
Зменшилась	20	25	2

Чи можна вважати, що проведення цих засобів не впливає на продуктивність праці, якщо рівень значущості 0,1?

13. Результати обстеження жителів різних районів та відповідно кольору волос людей:

<i>Район / Колір волос</i>	<i>Русий</i>	<i>Світлий</i>	<i>Темний</i>
А	2	9	9
В	3	6	21
С	15	15	20

Чи можна вважати, що ці результати свідчать про залежність кольору волос людей від місця проживання (рівень значущості 0,1)?

14. Зміст нікотину (в мг) для 2 марок цигарок характеризуються наступним чином:

Марка №1: 24 26 25 22

Марка №2: 27 28 25 29

Чи вказують ці результати на різницю змісту нікотину в цигарках цих марок? (Рівень значущості 0,1).

15. В випадково обраному тижні були отримані наступні дані про кількість нещасних випадків, які трапилися на тижні:

День тижня	Пон.	Вів.	Сер.	Чет.	Пят.	Суб.	Нед.
Частота	28	32	15	14	38	43	19

Чи достатньо підстав для того, щоб спростувати гіпотезу, яка стверджує, що кількість нещасних випадків розподілене рівномірно на протязі тижня? Рівень значущості 0,05.

16. За рівнем значущості 0,05 потрібно перевірити твердження про то, що частота купівлі зброї не залежить від місяця:

Місяць	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
Частота	18	23	28	15

17. За рівнем значущості 0,01 з'ясувати, чи існує зв'язок між віком та кількістю спожитого кофе:

<i>Вік / Споживання кофе</i>	<i>Низьке</i>	<i>Середнє</i>	<i>Високе</i>
21-30	18	16	12
31-40	9	15	27
41-50	31	15	18
>50	13	9	6

18. За рівнем значущості 0,05 потрібно перевірити, чи існує залежність між віком покупця та ціною машини:

<i>Вік / Ціна машини (дол.)</i>	<i>До 20000</i>	<i>20000 – 30000</i>	<i>> 30000</i>
21 – 30	16	25	3
31 – 40	44	23	15
41 – 50	31	15	18
> 50	9	11	12

19. За рівнем значущості 0,05 перевірити твердження, що спосіб отримання інформації не залежить від освіти:

<i>Освіта / Спосіб отримання</i>	<i>Телебачення</i>	<i>Чутки</i>	<i>Інтернет</i>
Середня	159	90	51
Вища	27	42	31

20. На екзамені екзаменатор задає студентам одне питання з однієї із

чотирьох частин курсу. Зі 100 студентів 26 одержали питання з 1 частини, 32 – з другої, 17 – з третьої, 25 – з четвертої. Чи можна за цими результатами прийняти гіпотезу, що студент з однаковою ймовірністю може дістати на екзамені питання з будь якої частини курсу? Рівень значущості 0,05.

21. Розглядаючи розподіл розмірів чоловічого взуття, проданого магазином за зміну, як вибірку з генеральної сукупності, перевірити гіпотезу про те, що ознака розподілу – нормальна. Рівень значущості 0,01.

Розмір взуття x_i	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар n_i	1	2	3	5	10	13	9	6	1

22. Страхова компанія опитала 86 водіїв 4 вікових груп з метою дізнатися, чи сідають вони за кермо після «вживання». Були отримані наступні результати:

<i>Відповідь / Вік водія</i>	21–29	30–39	40–49	> 50
Так	32	28	26	21
Ні	54	58	60	65

При рівні значущості 0,05 перевірте твердження про те, що частка водіїв, які відповіли ствердно, однакова для усіх вікових категорій.

23. За результатами соціології відношення глядачів до однієї з телепередач отримані дані:

<i>Стать глядача</i>	<i>Позитив.</i>	<i>Байдуже</i>	<i>Негатив.</i>
Чоловіки	11	35	28
Жінки	24	20	29

Чи можна вважати, що відношення до даної передачі не залежить від статі? Рівень значущості 0,1.

24. Зміна продуктивності праці на підприємстві при проведенні заходів А, В, С визначається наступними даними:

<i>Продуктивність / Заход</i>	А	В	С
<i>Збільшилась</i>	32	57	41
<i>Без змін</i>	21	33	17
<i>Зменшилась</i>	24	35	12

Чи можна вважати, що проведення цих заходів не впливає на продуктивність праці? Рівень значущості 0,05.

25. Дані про засміченість партії насіння жита насінням бур'яну представлено:

<i>Кількість насіння в одній пробі x_i</i>	0	1	2	3	4	5	6	Σ
<i>Кількість проб n_i</i>	405	366	175	40	8	4	2	1000

За рівнем значущості 0,05 перевірити гіпотезу про те, що випадкова величина – кількість насіння бур'яну розподілена за законом Пуассона.

26. Відомі дані про число зданих екзаменів в сесію студентами-заочниками:

<i>Число зданих екзаменів</i>	0	1	2	3	4	Σ
<i>Число студентів n_i</i>	1	1	1	3	35	60

За рівнем значущості 0,05 перевірити гіпотезу про те, що кількість зданих студентами екзаменів розподілена за біноміальним законом.

27. Фірма розсилає рекламні каталоги замовникам. За досвідом, ймовірність того, що організація, яка отримала каталог, замовить рекламований товар, дорівнює 0,08. Фірма розіслала 1000 каталогів нового, покращеного змісту та отримала 100 замовлень. На рівні значущості 0,05 з'ясувати, чи можна вважати нову форму каталогу суттєво кращою ніж попередня.
28. Порівнюється різні форми оцінки якості деталі, яку виготовляють різні постачальники (в балах експертів): 40, 39, 42, 37, 38, 43, 45, 41, 48. Є підстави думати, що показник останньої фірми (48) невірний. Чи є це значення аномальним (різко виділяється) з 5% рівнем значущості?
29. В експериментах з селекцією гороху Г. Мендель спостерігав частоти появи різних видів насіння при схрещуванні рослин з круглими жовтим насінням та рослин із зморшкуватим зеленим насінням. Ці дані та значення теоретичних ймовірностей по теорії спадковості наведені:

Види насіння	Частота	Ймовірність
Круглі та жовті	315	9/16
Зморшкуваті та жовті	101	3/16
Круглі та зелені	108	3/16
Зморшкуваті та зелені	32	1/16

Перевірити на рівні значущості 0,1 гіпотезу про узгодження частотних даних з теоретичними ймовірностями.

30. Для кожної з 9 партій сиру наведені його жирність (в %) та усереднені (за 80 опитаних респондентах) результати опитування смакових якостей сиру за 6-бальною шкалою (від 1 до 6):

Партія	Жирність (в%)	Результат опитування
1	44,4	2,6
2	45,9	3,1
3	41,9	2,5
4	53,3	5,0
5	44,7	3,6
6	44,1	4
7	50,7	5,2
8	45,2	2,8
9	60,1	3,8

Перевірити за результатами опитування гіпотезу про зв'язок жирності сиру та його смакових якостях на рівні значущості 0,05.

Задача 11.19. (Кореляція та регресія). Дана двовимірна вибірка випадкової величини, знайти:

- точкову оцінку коефіцієнта кореляції;
- інтервальну оцінку коефіцієнта кореляції ($\gamma = 0,95$);
- перевірити гіпотезу про відсутність кореляційної залежності;
- оцінки параметрів a_0, a_1 лінії регресії $\bar{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$;
- побудувати діаграму розсіювання та лінію регресії;

1. (-11.03;-10.74) (2.22; -8.72) (-5.28; -2.96) (-1.86; -6.39) (-2.81; 1.61) (-6.39;-5.63) (-3.04; -7.92) (-1.26; -5.98) (-5.87; -3.86) (-2.84; -3.45) (-3.75; -3.31) (-9.25; -8.91) (-8.59; -5.81) (-2.49; -3.04) (-5.64;-11.00) (-3.84; -7.75) (-4.12; -3.56) (-5.90; -5.63) (-2.46; -7.49) (-0.06; -3.62) (-4.70; -9.40) (-2.57; -1.16) (-7.37; -5.09) (-3.20; -3.43) (-7.20; -2.45) (-0.73; -1.98) (-5.99; -5.66) (-2.76; -4.16) (-5.45; -2.52) (-9.00; -1.30) (-0.10; -8.55) (-6.24; -2.06) (-2.94; -4.68) (-1.54; -2.33) (-1.44; -9.95) (0.63; -6.17) (-4.71; 1.64) (-10.73; -1.48) (-4.44;-12.69) (-3.44; -7.23) (-1.23; -4.27) (-1.03; -7.81) (-7.06; -3.94) (-5.22;-10.72) (-3.12; -8.23) (-3.23; -3.23) (-8.29; -5.97) (-0.35; -6.60) (-4.65; -2.56) (-2.92; -2.09).
2. (0.08; -1.30) (0.61; -3.25) (-1.85; -1.60) (-1.38; -2.78) (-0.52; -2.64) (-3.90; -2.36) (0.10; -0.85) (-0.14; -4.85) (-3.09; -2.82) (-1.75; -0.32) (-0.72; -2.50) (-0.77; -2.69) (0.91;0.73) (-2.67; -2.53) (-2.08; -0.88) (-2.64; -0.20) (-1.11; -0.64) (-2.20; -2.81) (-1.27; -0.67) (-2.24; -2.15) (-1.13; -2.43) (-2.29; -1.26) (-0.29; -3.18) (-0.75; -0.11) (-0.99; -2.23) (-2.77; -3.29) (-5.34; -0.93) (-0.35; -2.39) (-4.47; -1.52) (-1.46; -3.46) (-1.55; -1.16) (-1.84; -0.57) (-1.46; -3.90) (-2.39; -2.77) (-2.90; -1.07) (-2.74; -1.40) (-1.50; -2.72) (-2.83; -1.19) (-4.62; -3.24) (-1.69;-2.59) (-1.85;0.98) (-2.69; -2.60) (-0.29; -3.49) (-2.67; -1.18) (-0.69; -4.53) (-1.19; 0.35) (-1.31; -2.45) (-1.76; -1.89) (0.17; -3.13) (-2.47; -1.24).
3. (1.78; 4.22) (5.35; 0.36) (9.48; 2.08) (5.30; 7.24) (7.64; 12.73) (5.27; 8.15) (-0.61; 7.46) (-2.26; 4.78) (-1.41; 4.43) (6.18; 6.03) (0.72; 4.00) (7.31; 7.70) (8.37; 8.56) (4.95; 0.37) (10.18; 4.23) (5.99; 9.57) (5.25; 7.07) (6.90; 4.60) (2.84; 7.11) (2.53; 8.64) (-1.47; 1.87) (5.13; 8.02) (6.71; 4.41) (0.57; 5.55) (0.74; 4.13) (5.54; 7.36) (8.72;12.73) (5.67; 3.58) (8.24; 5.61) (4.02; 5.34) (-1.64; -4.25) (9.31; 10.32) (4.31; 8.77) (-1.42; 8.06) (11.66; 8.77) (5.04; -0.62) (13.14; 10.69) (6.79; 3.49) (3.37; 6.40) (3.89; 8.19) (4.31; 5.15) (6.78; 11.69) (0.98; 7.28) (2.72; 6.08).
4. (2.10; 1.53) (4.69; 0.86) (4.08; -0.24) (5.54; 7.99) (6.66; 10.52) (1.60; 3.06) (5.42; 6.48) (6.75; 8.75) (2.85; 3.15) (2.43; 14.72) (4.60; 1.63) (-6.41; 10.34) (6.35; 6.24) (8.94;4.03) (-4.10; 0.56) (6.86; 6.07) (5.52; 0.93) (10.09; 1.54) (6.99; 2.02) (-1.29; 1.99) (-0.05; -1.21) (4.67; 7.09) (2.29; 15.45) (6.53; 6.17) (0.44; 0.19) (-0.97; -0.71) (13.55; 6.10) (6.32; 6.83) (4.79; 8.31) (7.13; 13.46) (7.32; -3.32) (2.78; 6.01) (-0.33; 4.55) (3.09; 0.67) (-0.27; 6.81) (4.37; 7.96) (-0.17; 6.99) (-3.89; 3.41) (9.63; 2.46) (-4.09; 1.14) (5.18; 4.15) (-1.71; 4.08) (5.82; 8.02) (0.56; 7.87) (7.67; 3.22) (4.02; 9.68) (3.59; 1.52) (-0.77; 3.96) (5.12; -0.03) (3.50; 4.93).
5. (0.98; -3.88) (3.27; -4.08) (1.89; 0.81) (-7.02; -7.79) (2.69; 1.43) (2.25; -4.40) (0.20; -2.36) (-5.68; -4.36) (-1.90; -5.31) (-0.81; -3.58) (-0.81; -0.09) (1.53; -3.11) (1.82; 0.63) (-3.52; -5.94) (-5.66; -4.41) (-1.38; -7.55) (-6.69; 4.43) (0.15; -4.83) (-0.45; -7.59) (-2.13; -7.06) (-3.30; 2.91) (-4.41; -0.80) (-5.04; -3.67) (-2.37; -4.91) (3.89; -1.19) (-3.48; -2.04) (2.19; -7.81) (3.55; -1.49) (-0.84; -2.30) (1.02; 2.48) (-5.40; -9.99) (3.46; 1.84) (-3.29; 1.55) (5.62; 2.50) (1.17; -1.44) (-1.93; -4.16) (-9.94; -7.63) (3.18; -2.22) (-9.76; -4.65) (-4.41; -8.34) (4.60; -2.00) (-7.27; -5.15) (-0.62; -6.08) (-4.01; -6.15) (-1.59; -1.69) (1.74; -2.52) (-4.31; -6.65) (-9.21; -0.81) (1.09; -2.92) (-4.15; -1.55).
6. (4.19; -2.36) (4.55; -1.42) (3.45; -0.47) (4.31; -1.25) (4.39; -1.26) (3.80; -3.66) (5.71; -2.32) (3.65; -1.05) (6.03; -4.61) (2.30; -0.43) (5.31; -0.17) (1.87; -0.68) (2.91; -1.87) (4.60; -0.90) (1.93; 0.43) (0.08; 3.08) (2.51; 0.04) (3.20; -1.11) (3.08; 0.43) (5.06; -1.74) (1.11; -0.65) (7.69; -4.16) (4.42; -3.55) (2.66; -1.40) (4.29; -2.32) (0.21; -0.08) (6.34; -4.19) (0.84; 1.94) (5.06; -2.64) (7.08; -4.92) (3.13; -0.88) (5.57; -1.24) (3.16; -1.26) (7.25; -5.01) (1.50; -1.97) (-3.22; 4.66) (2.73; -0.16) (6.20; -4.07) (3.88; -1.80) (4.64; -0.71)

(4.72; -1.34) (-0.75; 2.23) (5.56; -3.89) (4.16; -1.61) (2.91; -0.81) (9.20; -6.97) (1.23; 0.30) (-1.19; 2.24) (3.91; -1.82) (0.35; 0.40).

7. (1.34; 3.53) (5.11; 2.79) (5.42; 4.25) (4.86; 2.84) (4.01; 3.63) (-0.50; 4.91) (0.87; 4.06) (3.33; 3.37) (0.60; 3.51) (1.79; 2.75) (1.88; 5.73) (3.51; 2.61) (3.14; 3.60) (4.47; 4.37) (1.75; 2.97) (0.63; 4.99) (3.50; 2.99) (4.66; 2.07) (5.33; 0.29) (1.96; 2.30) (2.00; 1.61) (4.32; 4.80) (2.82; 1.88) (2.82; 4.85) (3.72; 3.93) (4.82; 2.82) (3.12; 0.64) (3.56; 2.47) (4.67; 2.66) (4.02; 3.99) (2.20; 3.14) (4.51; 2.19) (2.78; 3.76) (4.27; 6.12) (2.79; 5.31) (2.53; 1.19) (1.85; 3.77) (2.36; 1.24) (1.58; 3.88) (2.58; 1.52) (4.12; 3.13) (4.30; 3.09) (1.82; 4.63) (3.56; 2.76) (1.80; 1.72) (2.96; 6.24) (1.62; 3.80) (1.65; 5.85) (4.42; 4.04) (0.70; 4.40).

8. (4.32; 4.68) (4.79; 2.50) (5.25; 1.13) (6.12; 4.39) (3.79; 3.05) (4.94; 3.06) (3.45; 3.73) (2.90; 1.49) (5.55; 1.37) (2.42; 4.93) (2.13; 2.29) (3.11; 3.43) (3.14; 3.06) (3.49; 2.90) (4.07; 2.39) (1.93; 1.94) (3.39; 4.92) (2.59; 3.00) (4.41; 2.78) (3.75; 3.18) (3.02; 4.46) (2.88; 2.09) (3.23; 0.91) (3.73; 2.52) (4.12; 3.35) (4.53; 5.71) (3.57; 3.89) (3.54; 1.16) (4.24; 5.03) (4.46; 3.32) (5.27; 0.25) (2.89; 1.34) (5.42; 5.81) (3.19; 6.06) (2.50; 3.90) (3.87; 1.36) (5.86; 2.36) (4.20; 2.33) (4.66; 2.55) (4.16; 3.51) (2.17; 3.18) (2.17; 1.98) (5.02; 3.17) (2.54; 2.04) (2.74; 2.79) (0.96; 3.63) (1.77; 5.95) (3.70; 1.67) (3.12; 3.45) (3.28; 2.17).

9. (-1.84; 0.16) (-2.81; 2.19) (5.68; -2.84) (2.17; -2.00) (2.07; 1.02) (5.30; 2.24) (-0.89; 4.10) (-0.66; -0.68) (-2.48; 5.68) (3.57; 11.12) (3.37; 5.13) (4.61; -3.41) (5.45; 1.08) (-3.95; -4.04) (3.59; 0.79) (-1.28; 1.44) (-1.05; 0.30) (2.30; -0.55) (3.08; -1.20) (-3.28; -0.68) (1.53; -1.35) (0.67; 0.73) (8.82; 1.12) (-2.24; 5.75) (11.66; 0.80) (-3.63; 2.35) (-2.02; 0.80) (3.21; -2.97) (-6.45; 3.91) (0.22; -2.21) (0.93; -1.63) (-2.00; -1.17) (-0.55; -3.16) (0.34; 4.18) (2.05; -1.45) (1.98; -8.78) (6.53; -1.16) (5.13; -3.38) (6.36; -1.95) (3.33; 8.82) (5.28; 3.91) (8.87; -3.17) (-0.34; -5.75) (0.38; 8.26) (-7.82; -0.42) (1.19; 3.97) (5.09; 0.04) (-3.40; 10.90) (10.78; -6.54) (8.27; 7.59).

10. (1.57; -1.30) (-5.49; -5.47) (-1.75; -1.37) (-9.50; -10.72) (-5.45; -7.07) (-4.60; -8.39) (-7.22; -8.72) (3.13; -3.25) (-9.89; -8.92) (-3.19; -5.51) (-4.41; -4.48) (-3.07; -5.85) (-4.50; -5.92) (-8.31; -7.17) (-2.90; -4.37) (-2.50; -1.89) (-1.24; -4.82) (-3.13; -4.21) (-3.83; -2.09) (-4.52; -5.77) (-5.13; -4.16) (-0.77; -3.01) (2.44; -4.07) (-1.06; -5.75) (-7.57; -11.34) (-1.56; -2.70) (-8.39; -10.94) (-2.76; -4.96) (-7.83; -4.58) (-8.54; -9.88) (-2.74; -4.05) (-5.47; -10.73) (0.42; -2.87) (-5.63; -4.92) (-7.38; -5.65) (-1.05; -2.68) (-12.44; -9.21) (1.55; 1.94) (-6.45; -8.58) (-9.16; -11.01) (-2.81; -1.81) (0.48; -0.28) (-1.13; -3.44) (-1.76; -2.84) (-3.50; -3.88) (0.52; -3.21) (-0.54; -1.94) (-7.05; -7.41) (-1.68; -3.85) (-4.48; -6.36).

11. (2.74; 2.94) (0.86; 3.48) (1.68; 2.62) (-0.48; 0.03) (-0.17; -0.47) (1.25; 1.62) (0.76; 1.00) (0.71; -1.03) (1.38; 2.83) (2.75; 1.32) (2.63; 3.10) (0.04; 4.64) (2.06; 0.15) (2.57; 4.14) (2.42; 3.26) (1.53; 2.48) (3.70; 0.98) (0.75; 1.67) (0.23; 3.85) (1.06; 0.44) (2.36; 3.18) (2.53; 1.66) (3.15; 3.52) (0.80; 0.88) (3.03; 1.65) (0.65; 2.41) (0.69; 0.10) (-0.31; 0.53) (0.87; 2.88) (2.56; 3.16) (2.68; 3.36) (2.54; 2.17) (1.40; 1.51) (1.23; 2.47) (3.06; 3.52) (4.18; 4.22) (3.61; 0.99) (4.09; 1.84) (1.96; 1.16) (-0.21; 2.47) (0.15; 2.27) (0.27; 2.51) (0.68; 0.64) (0.18; 0.70) (3.64; 1.61) (1.03; 2.25) (-0.39; 4.15) (3.63; 3.92) (2.08; 3.46) (4.07; 1.27).

12. (3.06; 2.86) (0.65; 2.46) (-0.56; -0.61) (2.00; 1.91) (1.30; 3.87) (2.77; 2.61) (0.80; 2.87) (1.59; 2.08) (2.44; 1.28) (0.84; 2.64) (-1.47; -0.69) (2.10; 4.13) (0.67; 0.10) (0.89; 1.07) (0.39; 2.57) (3.54; 1.83) (0.42; 0.19) (5.11; 3.27) (0.68; 0.18) (1.14;

- 1.33) (0.29; 0.13) (-0.02; 1.78) (0.09; 1.51) (3.12; 3.30) (2.94; 0.42) (0.63; 1.61)
(3.52; 3.80) (0.94; 1.66) (1.67; 0.62) (1.93; 2.14) (2.90; 2.64) (1.47; 1.97) (3.25;
0.35) (0.72; 1.64) (0.71; 0.07) (0.93; 1.59) (1.59; 3.61) (0.31; 1.57) (0.61; 0.80)
(-0.86; 2.88) (3.53; 3.85) (-1.38; 2.30) (1.70; 2.99) (1.27; 1.05) (3.16; 3.35) (1.46;
1.81) (3.48; 4.35) (1.77; 2.29) (1.54; 1.58) (2.57; 4.27).
13. (-2.51; -3.14) (-2.49; -4.63) (-2.70; -4.55) (-4.27; -0.32) (-6.92; -3.00) (-1.97; -0.98) (2.83;
-4.23) (-2.83; -5.11) (-3.99; -4.25) (-0.14; -5.44) (-4.14; -6.94) (-1.78; -0.88) (-2.53; -7.26)
(-7.53; -5.19) (-6.50; -4.95) (-4.88; -2.34) (-3.57; -1.89) (-6.83; -8.19) (-3.65; -3.18) (-2.81;
-2.99) (-7.09; 0.54) (-9.70; -4.25) (-4.06; -1.82) (-2.14; -1.33) (-6.61; -2.55) (-6.14; -2.12)
(-2.60; -6.63) (-4.02; -5.61) (-4.89; 2.52) (-6.29; -0.05) (-4.47; -3.07) (-2.89; -6.71) (-4.72;
-0.75) (-3.52; -3.24) (-4.35; -0.88) (-0.15; -4.58) (-5.39; -4.57) (-5.53; 0.15) (-2.19; -1.27)
(-7.22; -4.85) (-1.33; -2.02) (-2.01; -2.27) (-3.40; 0.39) (-1.82; -7.48) (-3.71; -3.95) (-5.30;
-0.13) (-2.83; -6.45) (-7.14; 2.28) (-3.96; -2.74) (-8.66; -4.69).
14. (0.05; -0.57) (0.65; 0.20) (0.19; 1.36) (0.38; -0.68) (0.78; -0.86) (0.12; 1.57) (-0.08;
-0.72) (2.99; -2.68) (-0.75; -0.35) (1.57; -0.43) (-2.16; 1.46) (-0.72; -1.16) (2.19; -4.33)
(-1.37; 2.70) (4.45; -1.87) (-0.76; -1.45) (-0.92; 1.21) (-2.65; 2.66) (-1.84; 1.49) (0.15;
0.87) (-0.41; -1.05) (1.63; -0.48) (-2.17; 1.60) (-3.92; 3.50) (2.38; 1.46) (-2.46; 3.10)
(-2.50; 3.09) (1.19; -1.70) (-0.00; 0.59) (-0.20; 0.54) (3.20; -1.29) (-0.97; 2.11) (0.46;
-3.07) (-0.60; 1.44) (2.81; -2.00) (3.92; -2.48) (2.24; -1.50) (2.18; -0.00) (2.90; -1.30)
(-2.43; 2.96) (0.70; -0.67) (-0.41; 0.93) (0.74; -1.28) (3.38; -3.01) (1.69; -1.18) (1.05;
-0.04) (0.06; -0.17) (0.86; -1.34) (3.76; -0.62) (1.03; 1.58).
15. (3.56; 4.06) (4.35; 4.57) (3.67; 1.58) (6.40; 3.14) (4.34; 6.40) (3.80; 6.53) (4.95; 5.19) (4.02;
3.87) (4.61; 2.76) (4.17; 2.96) (2.87; 7.32) (4.59; 4.67) (3.77; 5.34) (6.21; 5.54)
(4.38; 4.54) (3.45; 5.19) (5.21; 6.25) (3.87; 2.30) (1.76; 4.49) (6.17; 2.83) (2.90;
6.39) (3.38; 4.09) (5.66; 4.26) (4.85; 4.99) (4.65; 2.89) (5.11; 5.48) (4.69; 5.04)
(4.54; 5.95) (3.64; 5.00) (6.23; 5.39) (4.49; 5.13) (4.13; 4.06) (3.36; 5.22) (3.75;
2.62) (4.99; 4.62) (4.77; 5.75) (3.83; 3.89) (2.69; 2.33) (4.02; 5.13) (4.77; 7.23)
(2.14; 7.36) (5.08; 3.81) (3.29; 6.53) (3.74; 3.57) (4.76; 5.45) (5.66; 4.11) (5.01;
4.31) (4.01; 5.77) (5.47; 6.21) (4.84; 4.64).
16. (-4.05; -9.72) (-11.06; -6.47) (-4.33; -6.00) (-3.51; -4.40) (-5.92; -2.84) (-1.40; -3.02) (0.54;
-7.11) (2.37; -2.04) (-0.94; -8.60) (-11.55; -11.70) (-0.64; -5.61) (-3.76; -8.37) (-4.29; -1.90)
(-0.81; 2.20) (-1.93; -7.94) (-10.26; 0.88) (-3.83; -6.60) (-5.27; -12.11) (-5.80; -5.31) (-2.23;
-6.21) (-4.14; 0.58) (-5.54; -7.23) (-7.40; -9.21) (-6.08; -5.22) (-8.77; -5.99) (-3.07; -7.99)
(1.90; -9.17) (0.18; -2.05) (-3.69; -9.42) (2.09; 2.33) (-7.20; -7.74) (0.98; -5.89) (-12.91;
-4.91) (-0.84; -2.84) (-4.76; -6.61) (2.17; -4.00) (-11.41; -6.69) (-3.66; -7.71) (7.15; -8.53)
(1.64; -2.67) (-3.71; -5.97) (-2.81; -1.20) (-2.87; -7.10) (3.96; -3.66) (-2.14; -4.60) (-2.29;
-2.76) (1.34; -3.70) (-3.52; -0.04) (-3.26; -5.30) (-5.10; -4.43).
17. (4.59; 4.76) (5.12; 5.82) (2.23; 2.75) (4.72; 5.05) (3.36; 3.89) (2.80; 3.34) (4.38;
4.89) (4.99; 5.22) (4.10; 4.47) (5.86; 6.48) (4.58; 5.03) (3.79; 4.05) (3.82; 4.23)
(2.74; 3.29) (5.39; 5.63) (3.44; 3.93) (4.66; 5.27) (4.19; 5.00) (5.25; 5.89) (3.34;
3.58) (5.01; 5.26) (4.17; 4.43) (3.25; 3.60) (4.52; 4.80) (3.33; 3.81) (3.71; 3.96)
(4.57; 4.84) (3.14; 3.46) (5.28; 5.85) (4.45; 4.72) (4.67; 5.21) (4.34; 4.65) (2.55;
3.18) (5.75; 6.36) (3.18; 3.57) (2.06; 2.46) (4.58; 5.11) (4.07; 4.78) (2.67; 3.10)
(4.94; 5.41) (2.81; 3.19) (3.56; 3.72) (2.58; 3.03) (4.70; 5.09) (2.43; 2.99) (7.27;
7.41) (1.68; 2.25) (2.27; 2.53) (3.96; 4.30) (1.11; 1.59).
18. (-5.84; -2.51) (-4.35; -2.93) (-6.65; -5.67) (-5.95; -2.51) (-3.10; -6.22) (-4.51; -1.95) (-4.02;

-2.21) (-3.71; -5.51) (-3.74; -3.71) (-3.24; -2.61) (-1.11; -6.33) (-1.69; -3.45) (-3.25; -6.63)
(-5.03; -1.94) (-4.79; -3.02) (-0.04; -2.52) (-5.77; -0.04) (-2.24; -4.94) (-2.72; -4.03) (-3.82;
-3.41) (-2.47; -3.30) (-3.35; -3.56) (-5.53; -3.61) (-2.88; -3.46) (-4.82; -3.23) (-6.69; -3.89)
(-3.53; -1.93) (-5.79; -2.89) (-5.41; -4.82) (-5.97; -6.80) (-4.05; -5.25) (-5.15; -6.27) (-3.77;
-2.12) (-5.21; -4.49) (-3.78; -5.69) (-3.92; -2.82) (-1.99; -3.06) (-2.83; -4.79) (-4.65; -0.12)
(-4.71; -4.89) (-5.46; -4.43) (-3.29; -1.55) (-4.71; -5.82) (-5.90; -3.00) (-4.90; -2.67) (-3.79;
-5.09) (-6.19; -1.59) (-3.52; -5.05) (-3.63; -1.26) (-3.71; -5.39).

19. (-6.67; -2.53) (-0.25; -4.06) (-1.77; -1.17) (-3.30; 1.01) (-6.33; -0.45) (-3.60; -9.65) (1.94;
-0.40) (-1.64; 3.11) (-0.70; -1.73) (-0.33; -5.46) (-10.32; 3.64) (2.46; -3.45) (3.89; -6.79)
(-2.15; -0.78) (-0.94; -6.27) (-2.72; -2.91) (-1.33; -0.14) (-5.13; -0.55) (-1.00; 0.23) (-7.93;
3.06) (-6.11; -1.37) (-0.28; -4.54) (-6.93; 3.72) (-11.95; -0.10) (-7.18; 1.50) (-9.12; 2.30)
(-5.62; 3.91) (-1.71; -0.69) (-0.53; -2.54) (-1.84; 0.63) (3.26; -0.33) (-1.71; -3.88) (-6.07;
-0.56) (-5.78; 1.31) (-2.79; -5.73) (-3.93; -0.98) (-3.45; -11.66) (-2.39; -3.53) (2.07; -0.88)
(-8.13; 3.71) (-0.42; -2.88) (1.81; -5.77) (-8.76; 0.56) (-2.44; -4.03) (1.76; -8.21) (-1.22;
-5.47) (-0.83; -4.69) (0.73; -3.45) (-3.04; -2.56) (-3.59; -5.05).

20. (-3.29; 2.57) (0.08; -3.09) (-8.36; -5.36) (-4.08; 1.27) (1.00; -4.79) (0.17; -7.10) (-2.01;
-8.06) (-3.30; -5.46) (-3.61; -4.45) (-4.64; -11.31) (-0.53; -5.07) (-16.97; -4.96) (-3.86; -10.29)
(-0.40; -5.09) (-6.15; -7.95) (-7.03; -11.08) (1.12; -4.42) (-1.87; -4.75) (-3.37; -6.38) (1.12;
-2.96) (-3.37; -5.53) (-0.97; -4.14) (2.83; -6.08) (-2.94; -3.68) (-0.76; -3.96) (1.34; -2.18)
(-0.95; -0.31) (-2.70; -7.51) (-6.08; -5.60) (-2.70; -4.81) (-2.92; -5.87) (-6.43; -3.38) (-2.60;
0.21) (0.95; -2.12) (-3.53; -6.98) (-1.57; -6.37) (-3.75; -0.68) (-4.35; -4.65) (-10.11; -18.77)
(-0.40; -4.02) (-5.26; -7.44) (-2.43; -4.00) (-3.55; -3.99) (-1.40; 0.28) (-2.32; -4.47) (-2.28;
-2.18) (4.27; -7.56) (-4.26; -6.52) (0.24; -3.73) (0.37; -4.90).

21. (-1.48; -4.62) (-5.12; -4.83) (-2.67; -5.54) (-4.97; -5.79) (-1.95; -6.15) (2.87; 0.81) (-6.00;
-7.73) (-4.10; -6.04) (-2.63; -3.37) (-7.02; -5.52) (-2.42; -4.16) (-4.71; -6.89) (-7.82; -8.18)
(-3.50; -5.39) (-2.59; -4.15) (0.59; -2.42) (-0.45; -1.51) (-2.80; -5.69) (-3.92; -3.82) (-4.02;
-4.25) (-1.50; -4.89) (0.52; -5.38) (-4.70; -3.89) (-2.67; -5.44) (-6.24; -0.71) (-3.05; -6.39)
(-5.44; -3.28) (-7.01; -5.00) (-2.31; -5.85) (1.54; -0.42) (-1.02; -4.61) (-3.02; -5.81) (-3.35;
-3.43) (-1.92; -0.15) (-1.98; -3.66) (-2.83; -4.59) (-4.71; -6.60) (3.28; -1.19) (1.17; -1.25)
(0.22; -2.76) (-3.98; -4.81) (-4.00; -3.71) (-3.14; -1.05) (-1.47; -4.11) (-1.26; -4.16) (-3.34;
-4.96) (-2.60; -2.97) (-5.98; -1.17) (-5.61; -6.11) (-2.92; -6.26).

22. (1.82; 1.02) (1.85; -2.06) (0.23; 1.87) (4.06; -0.37) (1.86; -1.80) (0.66; 2.77) (2.95;
-1.27) (1.09; 2.00) (7.21; 2.63) (4.18; 2.47) (1.44; 2.24) (0.36; -0.03) (3.73; -4.40)
(2.17; 0.70) (-1.00; -2.36) (3.14; 1.54) (1.60; 0.86) (3.29; -4.12) (-0.69; 0.53) (4.13;
-3.10) (-2.77; 0.11) (4.90; 2.08) (3.72; 3.12) (0.97; 1.24) (-0.92; -0.19) (-0.21; 1.73)
(0.65; 2.48) (3.51; 4.43) (0.85; -2.16) (-1.45; 1.91) (-2.33; 3.63) (1.04; 2.95) (-2.15;
0.27) (4.02; 1.03) (2.82; 1.95) (2.68; 1.04) (0.18; 0.24) (-5.97; -1.68) (-0.33; 1.54)
(-0.86; 2.70) (2.94; 1.36) (1.34; 1.23) (2.77; -0.30) (5.72; 2.24) (5.30; 0.65) (-2.59;
0.31) (1.53; 0.88) (3.10; 4.83) (1.28; 5.76) (-4.16; 1.17).

23. (-2.54; -4.56) (-3.09; -3.26) (-6.87; -0.10) (-5.29; -3.06) (-1.16; -0.88) (0.34; -4.90) (-5.37;
-1.94) (-6.22; -1.93) (-5.36; -2.57) (-1.56; -6.58) (-4.04; -3.65) (-4.23; -4.95) (-2.13; -5.45)
(-5.49; -1.35) (-0.95; -2.54) (-4.34; -2.05) (-5.41; -0.69) (-6.14; -3.04) (1.95; -4.70) (-3.15;
-3.14) (-4.21; 0.99) (-6.13; 2.03) (-1.57; -3.43) (-5.25; -2.02) (-5.89; 1.05) (-3.33; -0.92)
(-6.69; -3.14) (-4.29; -6.26) (0.54; -4.95) (-4.72; -3.80) (-3.58; 1.36) (-0.94; -5.64) (-7.27;
-6.79) (-6.63; -1.36) (-5.25; -0.74) (-2.81; -6.55) (-6.38; -0.03) (-2.61; -4.67) (-2.24; -3.06)
(-3.97; -1.94) (-5.29; -6.37) (-3.24; -1.48) (-4.90; -2.24) (-2.83; -4.42) (-2.62; -5.44) (-5.03;

-1.29) (-7.14; -5.67) (-5.70; -5.33) (-8.24; -2.93) (-5.45; -3.29).

24. (-1.72; -0.39) (-3.03; -2.92) (-4.83; -3.57) (-1.50; -4.29) (-2.63; -2.05) (-2.82; -3.13) (-4.37; -3.38) (-3.49; -3.54) (-5.10; -1.61) (-3.23; -3.23) (-3.08; -4.76) (-4.66; -3.96) (-2.65; -2.54) (-2.63; -5.63) (-3.42; -4.76) (-1.26; -2.70) (-3.35; -1.58) (-5.20; -1.73) (-1.41; -1.96) (-2.40; -2.69) (-1.60; -2.02) (-3.19; -1.62) (-0.09; -4.12) (-1.29; -2.09) (-1.39; -4.38) (-2.94; -2.74) (-2.75; -4.03) (-4.41; -6.54) (-3.36; 1.99) (-1.00; -4.62) (-2.56; -3.80) (-3.59; -4.37) (-4.91; -4.14) (-1.10; -6.13) (-2.97; -4.22) (-3.83; -4.99) (-2.29; -3.57) (-3.57; -4.22) (-2.42; -2.14) (-3.75; -5.04) (-2.75; -0.51) (-4.74; -4.53) (-3.77; -4.04) (-4.27; -0.48) (-1.92; -1.12) (-1.53; -2.19) (-2.91; -4.90) (-2.97; -0.97) (-3.81; -2.67) (-4.95; 0.33).

25. (6.73; 8.69) (-0.00; 0.81) (3.18; 4.01) (-2.16; -0.76) (3.68; 5.96) (4.24; 4.99) (6.70; 7.55) (4.39; 4.90) (-1.19; -1.91) (2.59; 2.34) (2.90; 5.47) (3.29; 5.56) (5.99; 8.40) (6.94; 6.33) (6.30; 6.74) (6.36; 7.16) (4.05; 4.93) (6.08; 7.20) (3.47; 7.08) (3.15; 2.91) (-1.57; 1.81) (5.90; 3.87) (8.92; 12.20) (5.43; 6.73) (6.07; 6.78) (5.37; 6.63) (4.52; 6.94) (10.62; 12.82) (5.95; 6.13) (-1.14; 3.17) (4.67; 3.00) (3.13; 4.90) (2.38; 1.60) (1.13; 2.31) (-2.13; -0.64) (4.81; 4.94) (-5.76; -4.17) (4.15; 4.12) (0.08; 0.72) (2.32; 2.87) (6.32; 7.64) (2.60; 4.01) (4.96; 5.97) (4.07; 4.76) (7.16; 8.24) (6.83; 9.37) (4.41; 5.21) (5.98; 9.26) (2.99; 4.06) (8.24; 9.07).

26. (-0.27; -0.25) (2.71; 4.81) (3.36; 3.89) (0.16; 0.58) (2.50; 3.67) (4.64; 4.94) (2.19; 2.62) (0.97; 1.18) (2.37; 2.31) (0.78; 1.98) (1.63; 1.43) (0.64; 1.01) (2.50; 3.13) (2.92; 3.54) (-0.39; 1.50) (2.27; 4.44) (0.87; 2.83) (2.79; 3.30) (3.82; 3.11) (2.25; 2.05) (1.05; 1.28) (1.99; 3.02) (0.02; 0.17) (2.97; 3.36) (0.75; 0.88) (4.06; 3.73) (3.17; 1.88) (1.45; 4.01) (0.15; 1.50) (2.27; 4.62) (3.95; 3.57) (3.60; 3.46) (2.93; 3.54) (0.23; 2.38) (1.12; 2.67) (2.28; 4.81) (1.54; 2.43) (2.00; 2.47) (1.71; 1.69) (0.48; 3.08) (3.62; 2.82) (2.87; 1.30) (4.47; 3.00) (1.13; 0.63) (1.45; 2.31) (2.53; 2.54) (1.26; 2.58) (2.89; 1.28) (1.24; 2.48) (1.71; 3.92).

27. (-2.92; 2.08) (-3.68; 1.45) (-3.11; 1.52) (-3.07; 1.45) (-1.46; 0.10) (-2.42; 1.08) (-0.28; -1.52) (-2.04; 0.52) (-4.58; 3.00) (-2.45; 1.16) (-2.52; 1.74) (-3.29; 2.08) (-1.64; 0.50) (-4.50; 2.67) (-2.33; 1.76) (-3.46; 2.54) (-0.93; 0.34) (-2.83; 0.78) (-1.69; 0.84) (-5.60; 4.50) (-1.16; -0.21) (-3.00; 1.26) (-3.59; 2.34) (-4.13; 3.10) (-4.46; 2.86) (-3.15; 1.95) (-2.63; 1.56) (-5.37; 4.57) (-4.11; 3.22) (-4.38; 3.35) (-3.28; 2.48) (-1.58; 0.43) (-3.17; 2.19) (-5.55; 4.53) (-3.55; 2.57) (-1.71; 0.73) (-4.61; 3.12) (-4.39; 3.19) (-1.79; 0.37) (-2.82; 1.82) (-2.20; 0.67) (-3.62; 2.50) (-2.81; 2.28) (-4.17; 2.36) (-3.09; 2.12) (-3.77; 2.57) (-4.97; 4.07) (-2.30; 1.23) (-2.98; 1.36) (-2.73; 2.18).

28. (-2.30; -1.32) (-1.01; -3.97) (0.89; 0.43) (1.66; -0.84) (2.71; 1.32) (-1.58; -1.31) (-0.53; -0.05) (1.01; -1.50) (1.80; 5.83) (0.68; 1.40) (-1.10; -0.90) (1.42; 0.91) (0.29; -0.13) (1.96; 1.38) (-3.07; -4.36) (-3.10; -3.69) (-2.15; -1.96) (-1.60; -0.95) (1.05; 2.64) (-2.06; -2.05) (2.44; 2.95) (1.97; 2.26) (1.67; 1.97) (-0.67; 0.09) (0.09; -0.81) (2.98; 2.62) (-0.04; -1.22) (-1.16; -0.46) (3.34; 4.47) (0.35; 0.38) (-0.65; -3.59) (-1.78; -3.84) (-0.05; 1.94) (2.92; 3.85) (-1.15; -0.26) (3.23; 2.14) (-0.93; -0.41) (1.14; 1.82) (-1.84; -0.86) (-4.50; -4.25) (-4.54; -5.32) (3.24; 4.02) (0.36; 0.04) (-0.28; 1.85) (-2.45; 4.19) (-1.07; 1.40) (0.97; 0.72) (-6.04; -4.03) (-2.26; -0.91) (2.26; -0.73).

29. (0.46; 1.68) (3.71; 0.66) (-1.04; 1.42) (-2.33; -0.40) (-0.83; 1.66) (-0.05; 3.19) (0.31; 0.28) (0.44; 0.83) (1.87; 1.01) (-1.13; 4.50) (-1.66; 2.03) (-0.66; -2.75) (2.81; -0.31) (-0.03; 0.74) (1.59; 0.23) (1.60; 1.27) (2.68; 0.10) (-1.55; -0.03) (3.11; -0.12) (1.28; 2.09) (-0.02; 1.89) (-0.75; 1.58) (-1.34; 1.19) (0.20; 1.25) (0.85; 2.91) (-1.47; 2.15)

(-2.40; 1.11) (0.08; -2.61) (0.59; 0.13) (-2.44; -1.54) (0.05; -1.29) (0.24; 0.04) (-1.78; 1.97) (-1.22; 1.06) (-3.14; -0.31) (2.19; 1.70) (0.78; 0.54) (-2.23; 0.35) (-1.18; -0.92) (3.32; -0.65) (-2.14; -0.23) (0.71; -0.16) (1.65; -2.99) (-1.31; -0.85) (2.13; -1.62) (-2.11; -4.65) (-0.65; 0.31) (1.06; -0.42) (-2.52; -2.52) (-0.96; 0.93).

30. (6.10; 5.44) (6.49; 7.62) (4.43; 5.04) (5.13; 4.02) (6.23; 6.69) (6.14; 8.43) (4.48; 5.68) (5.00; 4.48) (6.36; 9.08) (6.12; 8.11) (4.28; 5.97) (3.05; 4.13) (6.84; 7.24) (1.09; 2.79) (5.34; 7.13) (4.57; 7.76) (3.41; 4.83) (6.37; 6.65) (3.95; 6.61) (-0.08; 3.36) (4.43; 5.94) (3.00; 4.94) (1.93; 6.29) (2.29; 5.01) (5.04; 6.40) (4.31; 5.07) (2.19; 2.92) (3.97; 4.23) (4.54; 7.85) (6.51; 5.06) (5.46; 6.69) (3.82; 5.95) (2.91; 4.55) (5.18; 5.89) (5.33; 6.65) (4.07; 6.86) (3.31; 6.61) (2.52; 5.51) (1.35; 6.86) (4.56; 3.95) (5.33; 7.84) (4.15; 4.94) (3.38; 4.09) (5.46; 8.06) (3.26; 5.79) (6.33; 5.07) (1.39; 3.25) (4.36; 3.91) (3.58; 5.76) (5.06; 6.38).

Задача 11.20. (Метод найменших квадратів). Результати спостереження над випадковими величинами X, Y представлені в таблиці. Припускаючи, що між X, Y відома залежність, знайти невідомі параметри a, b методом найменших квадратів.

1.

X	1	2	-1	3
Y	2	3	1	4

$$Y = aX + b.$$

2.

X	1	2	4	6
Y	2	2,5	2,3	2,1

$$Y = a + \frac{b}{X}.$$

3.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

4.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

5.

X	1	2	-1	3
Y	2	3	1	4

16.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

17.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

18.

X	1	2	-1	3
Y	2	3	1	4

$$Y = aX + b.$$

19.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

20.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX + b.$$

6.

X	1	2	4	6
Y	2	2,5	2,3	2,1

$$Y = a + \frac{b}{X}.$$

7.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

8.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

9.

X	1	2	-1	3
Y	2	3	1	4

$$Y = aX + b.$$

10.

X	1	2	4	6
Y	2	2,5	2,3	2,1

$$Y = a + \frac{b}{X}.$$

11.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

12.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

21.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

22.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

23.

X	1	2	4	6
Y	2	2,5	2,3	2,1

$$Y = a + \frac{b}{X}.$$

24.

X	1	2	4	6
Y	2	2,5	2,3	2,1

$$Y = a + \frac{b}{X}.$$

25.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

26.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

27.

X	-1	0	1	4
Y	0	1	2	5

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

13.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

14.

X	1	2	-1	3
Y	2	3	1	4

$$Y = aX + b.$$

15.

X	1	2	4	6
Y	2	2,5	2,3	2,1

$$Y = a + \frac{b}{X}.$$

28.

X	1	2	4	6
Y	2	2,5	2,3	2,1

$$Y = a + \frac{b}{X}.$$

29.

X	0	1	5	6
Y	5	3	4	7

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

30.

X	1	2	-1	3
Y	2	3	1	4

$$Y = aX + b.$$

Додаток 1. Задачі підвищеної складності по темі «Диференціальні рівняння».

Задача Д1 (Тема: диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними)
Розв'язати рівняння:

- | | |
|---|--|
| 1. $y' + y^2 \sin x = 0$. | 16. $y' = (3x^2 - 1)(3 + 2y)$. |
| 2. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$. | 17. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$. |
| 3. $x dx + ye^{-x} dy = 0$. | 18. $2x\sqrt{1 - y^2} = y'(1 + x^2)$. |
| 4. $y' = \frac{2x}{y + x^2 y}$. | 19. $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0$. |
| 5. $y' = xy^3(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$. | 20. $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$. |
| 6. $y' = x(x^2 + 1) / 4y^3$. | 21. $(x + 1)y' + y(y + 1) = 0$. |
| 7. $y^2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dy = \arcsin x dx$. | 22. $(1 + y^2) y dx = x(1 + 2y^2) dy$. |
| 8. $y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}$. | 23. $x^2(x^2 + 4)y' = \cos^2 y$. |
| 9. $y' = 2y^2 + xy^2$. | 24. $ye^x dy + xe^{y^2} dx = 0$. |
| 10. $(1 + y^2) dx + xy dy = 0$. | 25. $x(1 + y)y' + (\sqrt{x} + \ln x)(1 + y^2) = 0$. |
| 11. $y' \sin x - y \cos x = 0$. | 26. $(x - 1)yy' + (x^2 + 1)(y + 1)^2 = 0$. |
| 12. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$. | 27. $x^2 dx + (1 + x^6)\sqrt{1 - 2y} dy = 0$. |
| 13. $x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} = 0$. | 28. $y'\sqrt{1 - x^4} + x(1 + e^y) = 0$. |
| 14. $e^{-y}(1 + y') = 1$. | 29. $y' \frac{\sin^2 x}{\cos x} + e^{-y} \sqrt{1 + e^y} = 0$. |
| 15. $y \ln y dx + x dy = 0$. | 30. $(2x + y + 2) dx - (4x + 2y + 9) dy = 0$. |

Задача Д2. (Тема: однорідні диференціальні рівняння)
Розв'язати рівняння:

- | | |
|--|--|
| 1. $(x - y \cos \frac{y}{x}) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$. | 16. $(y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx = x dy$. |
| 2. $(4x + 3y) dx + (x + y) dy = 0$. | 17. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$. |
| 3. $(y^3 + 2x^2 y) dx + (2x^3 + 2xy^2) dy = 0$. | 18. $(x^2 + xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$. |
| 4. $2x^3 + x^2 y + y^3 + (2y^3 + xy^2 + x^3) y' = 0$. | 19. $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0$. |
| 5. $(2x^3 + 3xy^2) dx + y^3 dy = 0$. | 20. $2xy dx + (y^2 - x^2) dy = 0$. |

6. $\left((x+y)^2 e^{\frac{y}{x}} + y^2 \right) dx - xy dy = 0.$
7. $(6xy + 5y^2) dx + (3x^2 + 10xy - y^2) dy = 0.$
8. $xy' - x \cos \frac{y}{x} = y.$
9. $(2\sqrt{xy} - y) dx - x dy = 0.$
10. $(x \operatorname{ctg} \frac{y}{x} - y) dx + x dy = 0.$
11. $(xy e^{\frac{x}{y}} + y^2) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0.$
12. $(x - y - \sqrt{xy}) dx + \sqrt{xy} dy = 0.$
13. $(6x + y - 1) dx + (4x + y - 2) dy = 0.$
14. $(3x^2 - y^2) dx - 2xy dy = 0.$
15. $x dy - (\sqrt{x^2 + y^2} + y) dx = 0.$
21. $(x + y + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0.$
22. $(x - 2) dx + (y - 2x + 1) dy = 0.$
23. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y - 1}{x - 2y - 1}.$
24. $xy dx + (y^4 - x^2) dy = 0.$
25. $(x - 2y + 5) dx + (x - y + 4) dy = 0.$
26. $(ax + y) dx - x dy = 0.$
27. $(x^3 - 3x^2 y) dx + (y^3 - x^3) dy = 0.$
28. $(8x + 25y - 62) dx - (11x + 4y - 11) dy = 0.$
29. $(5x - 7y + 1) dx + (x + y - 1) dy = 0.$
30. $(6x + y - 1) dx + (4x + y - 2) dy = 0.$

Задача ДЗ. (Тема: лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі)

Розв'язати рівняння:

1. $(x+1)dy - (2y + (x+1)^4)dx = 0.$
2. $y' = \frac{1}{x \sin y + 2 \sin 2y}.$
3. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$
4. $x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}.$
5. $y' + y \cos x = \sin x \cos x.$
6. $x \ln x \cdot y' - (1 + \ln x)y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln x) = 0.$
7. $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}.$
8. $8xy' - y = -\frac{1}{y^3 \sqrt{x+1}}.$
9. $(xy + x^2 y^3)y' = 1.$
10. $x^2 y' + 2x^3 y = y^2(1 + 2x^2).$
11. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}.$
12. $2 \sin x \cdot y' + y \cos x = y^3(x \cos x - \sin x).$
16. $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^3.$
17. $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy dx = 0.$
18. $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$
19. $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1).$
20. $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x.$
21. $y' \cos y + \sin y = x + 1.$
22. $y' + \sin y + x \cos y + x = 0.$
23. $y' - 2xy = \cos x - 2x \sin x.$
24. $2\sqrt{x}y' - y = -\sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x}.$
25. $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x}(\cos x - 1) \ln 2.$
26. $\cos x \cdot y' - y \sin x = y^4.$
27. $(1 + x^2)y' = xy + x^2 y^2.$

$$13. y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}.$$

$$14. y' + y \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} = \frac{(1 - x^2)y^2}{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$15. (1 + x^2)y' = xy + x^2y^2.$$

$$28. xydx + (x^2 + y^2 + 1)dy = 0.$$

$$29. xy' + y = xy^2 \ln x.$$

$$30. y' + xy = y^2(\sin x + x \cos x).$$

Задача Д4. (Тема: Рівняння Рікатті.)

Розв'язати рівняння:

$$1. x^2y' - x^2y^2 + 5xy = 3.$$

$$2. x^3y' - y^2 - x^2y + x^2 = 0.$$

$$3. y' + xy^2 + \frac{y}{x} - x^3 = 2.$$

$$4. y' = y^2 - x^2 + 1.$$

$$5. y' - y^2 - xy - x + 1 = 0.$$

$$6. (x - x^4)y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0.$$

$$7. y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

$$8. y' = \frac{y^2 - x^2y - 2x}{1 - x^3}.$$

$$9. xy' - 3y + y^2 + 4x - 4x^2 = 0.$$

$$10. x^2y' + (xy - 2)^2 = 0.$$

$$11. y' + y^2 = 2x^{-4}.$$

$$12. y' + y^2 = x^{-\frac{4}{3}}.$$

$$13. y' + y^2 = x^{-2}.$$

$$14. y' - y^2 = 2x^{-\frac{2}{3}}.$$

$$15. xy' - 5y - y^2 = x^2.$$

$$16. 3xy' - 9y - y^2 = x^{\frac{2}{3}}.$$

$$17. y' + \frac{5}{x}y + \frac{3}{x}y^2 = x.$$

$$18. y' + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

$$19. (1 + x^2)y' + 2 \frac{1 - x^2}{x}y + 3 = y^2.$$

$$20. y' + \frac{3}{x}y + xy^2 = x^{-1}.$$

$$21. y' + \frac{3}{x}y + \frac{y^2}{x} = x.$$

$$22. xy' + 4y = 3xy^2.$$

$$23. xy' = 2y - 4x^2y^2.$$

$$24. xy' + 3xy^2 = 2y.$$

$$25. ydx + (2x^2y - 3x)dy = 0.$$

$$26. xy' + 3y = 4x^2y^2.$$

$$27. y(y + 1)dx + (x + 1)dy = 0.$$

$$28. y' \cos x + y \sin x + 3y^2 \cos x = 0.$$

$$29. xy' - y + 2xy^2 \ln x = 0.$$

$$30. 2x^2y' + xy = 2y^3.$$

Задача Д5. (Тема: рівняння в повних диференціалах та інтегрувальний множник.) Розв'язати рівняння:

$$1. (2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0.$$

$$2. (1 + x^2y)dx + x^2(x + y)dy = 0.$$

3. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$
4. $(x^2y + y^2 + 2xy)dx + (x^2 + x)(x + 2y)dy = 0.$
5. $x(3y + 2x)dy + 3(x + y)^2 dx = 0.$
6. $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0.$
7. $y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0.$
8. $(2xy + ax)dx + dy = 0.$
9. $(1 + \frac{y}{x^2})dx + (\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2})dy = 0.$
10. $(\frac{y}{x} - 3x)dx - (\frac{4y}{x} - 1)dy = 0.$
11. $(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2})dy = \frac{y}{x^3} dx.$
12. $(1 + \frac{3y^2}{x^2})dx = \frac{2y}{x} dy.$
13. $e^{y-x}dx + (xe^{y-x} - 2ye^{-x})dy = 0.$
14. $yx^y dx + x^{y+1} \ln x dy = 0.$
15. $(xy^2 + y)dx - xdy = 0.$
16. $(y^2e^x + y)dx - xdy = 0.$
17. $(2xy + y^2)dx + (2x^2 + 3xy + 4y^2)dy = 0.$
18. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0.$
19. $dx + (x + e^{-y}y^2)dy = 0.$
20. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$
21. $y(1 - y \sin x) \cos^2 y dx - (y^2 + x \cos^2 y)dy = 0.$
22. $(y - \frac{ay}{x} + x)dx + ady = 0.$
23. $y^2dx + (xy - 1)dy = 0.$
24. $(2x^2y + x)dy + (y + 2xy^2 - x^2y^3)dx = 0.$
25. $(x^3 + xy^2 - y)dx + (y^3 + x^2y + x)dy = 0.$
26. $(x^2 + y)dy + x(1 - y)dx = 0.$
27. $(x + x^2 + y^2)y' = y.$
28. $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0.$
29. $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0.$
30. $2y^3y' + xy^2 = x^3.$

Задача Д6. (Тема: диференціальні рівняння, не розв'язні відносно похідної.)

Розв'язати рівняння:

1. $xy'^2 - 2yy' + x = 0.$
2. $(x^2 - 2xy)y'^2 - 2xyy' + (y^2 - 2xy) = 0.$
3. $y'^3 + (x + 2)e^y = 0.$
4. $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0.$
5. $y = y'^2 e^{y'}.$
6. $x = \ln y' + \sin y'.$
7. $x = y'^2 - 2y' + 2.$
8. $y = y' \ln y'.$
9. $y = \arcsin y' + \ln(1 + y'^2).$
10. $y = (y' - 1)e^{y'}.$
11. $x(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a.$
12. $y^{\frac{2}{5}} + y'^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}.$
13. $y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0.$
14. $x = y' + \sin y'.$
15. $y = y'(1 + y' \cos y').$
16. $x^3 y'^2 + x^2 yy' + a = 0.$
17. $9yy'^2 + 4x^3 y' - 4x^2 y = 0.$
18. $8xy'^3 - 12yy'^2 + 9y = 0.$
19. $16y^2 y'^3 + 2xy' - y = 0.$
20. $y'^3 - axyy' + 2ay^2 = 0.$
21. $y'^3 - xy^4 y' - y^5 = 0.$
22. $xy'^2 - 2y' - y = 0.$
23. $xy'^2 + yy' + a = 0.$
24. $y'^3 + xy'^2 - y = 0.$
25. $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$
26. $y = xy' + \sin y'.$
27. $(3x + 1)y'^2 - 3(y + 2)y' + 9 = 0.$
28. $y = xy' + a\sqrt[3]{1 - y'^3}.$
29. $x\sqrt{1 + y'^2} - y' = 0.$
30. $x(1 + y'^2) = 1.$

Задача Д7. (Тема: метод послідовних наближень.)

Методом послідовних наближень, знайти три перших члени розв'язку задачі Коші:

1. $y' = x^2 - y^2, \quad y(-1) = 0.$
2. $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0.$
3. $y' = x + y, \quad y(0) = 1.$
4. $y' = 2y - x^2 - 3, \quad y(0) = 2.$
5. $xy' = 2x - y, \quad y(1) = 2.$
6. $y' + y = x + 1, \quad y(0) = 1.$
7. $y' + y = 2e^x, \quad y(0) = 1.$
8. $y' - y = 1 - x, \quad y(0) = 1.$
9. $y' - y = e^{2x}, \quad y(0) = 1.$
16. $y' = \frac{x + 2y}{2x + y}, \quad y(1) = 1.$
17. $y' = 1 - y^3, \quad y(-1) = 3.$
18. $y' = 2(y + 1), \quad y(0) = 0.$
19. $y' = -y - 1, \quad y(0) = 0.$
20. $y' = -\frac{y}{2} + x, \quad y(0) = 0.$
21. $y' = y + 1 - x, \quad y(0) = 0.$
22. $y' = xy + 1, \quad y(0) = 0.$
23. $y' = x^2 y - x, \quad y(0) = 0.$
24. $y' = -\sin y + 1, \quad y(0) = 0.$

10. $y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1.$

11. $y' = y^2 + x^3, \quad y(0) = 0.$

12. $y' = 2y^2 + x, \quad y(0) = 1.$

13. $y' = x^2 - 2y^2, \quad y(0) = 0.$

14. $y' = y^2 + 2x, \quad y(0) = 0.$

15. $y' = xy + 2x - x^3, \quad y(0) = 0.$

25. $y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = 0.$

26. $y' = 1 + x \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi.$

27. $y' = 2x(1 + y), \quad y(0) = 0.$

28. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$

29. $y' = x - y, \quad y(0) = 1.$

30. $y' = 3x - y^2, \quad y(0) = 0.$

Задача Д8. (Тема: існування та єдність розв'язку задачі Коші.)

Користуючись достатньою умовою єдності задачі Коші, вказати область, через кожную точку якої проходить єдина інтегральна крива рівняння:

1. $y' = y^2 + x^4.$

2. $y' = x + \sqrt[3]{y-x}.$

3. $y' = y^3 + \sqrt{x+y}.$

4. $(x+y)y' = x \ln y.$

5. $xy' = e^x + ctgy.$

6. $y' = y + \sqrt{y-x^2}.$

7. $y' = (y+1)(y-1)^{\frac{2}{3}}.$

Знайти значення параметрів α, β та лінії на площині в кожній точці яких порушується теорема єдності розв'язку:

8. $y' = y^\alpha (1-y)^\beta.$

9. $y' = y^\alpha \ln^\beta \frac{1}{y}.$

10. $y' \ln y = y^\alpha (1-y)^\beta.$

Довести єдність розв'язку задачі Коші:

11. $y' = \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) e^{-y^2 \sin^2 x}, \quad y(0) = 1.$

Дослідити питання існування та єдності розв'язку

12. $y' = 1 + y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$
 13. $y' = \sin(xy), \quad y(0) = 1.$
 14. $y' = (x + y)x^2y^2, \quad y(0) = 1.$
 15. $y' = e^x + \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$
 16. $y' = y^3 \frac{e^x}{1 + y^2} + x^2 \cos y, \quad y(0) = 1.$
 17. $y' = (\cos x)e^{-y^2} + \sin y, \quad y(0) = 0.$
 18. $y' = (x^2 - y^2)\sin y + y^2 \cos y, \quad y(0) = 0.$

На площині (x, y) знайти множину точок (x_0, y_0) для яких виконується умови існування та єдності розв'язку:

19. $y' = \frac{y}{1 + x^2}.$
 20. $y' = \frac{x - y}{3x - 7y}.$
 21. $y' = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{7}{3}}.$
 22. $y' = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{3}}.$
 23. $y' = (x + y)^{\frac{1}{5}}.$
 24. $xy' = y^2 + 1.$
 25. $(y - 1)y' = \cos x.$
 26. $y' = \frac{x^3 + 1}{x(y + 1)}.$
 27. $y' = (1 - x^2 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}.$
 28. $y' = y^{\frac{1}{3}}\sqrt{y - 1}.$

Знайти значення параметра a при якому існує єдиний розв'язок задачі Коші:

29. $y' = \frac{3}{2}|x|^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = a.$
 30. $y' = e^{y^2}, \quad y(0) = a.$

Задача Д9. (Тема: продовження розв'язку.)

1. Чи продовжуваний на всю вісь $x \in R$ розв'язок задачі
 $y' = e^{-y} \sin(e^y), \quad y(0) = 0.$

2. Знайти максимальний інтервал існування розв'язку
 $(2 - x^2)y' = xy^2, \quad y(\sqrt{2 + 3e^{-1}}) = -2.$

3. Знайти непродовжуваний розв'язок задачі
 $y' = \frac{xy^2}{\pi^2 - x^2}, \quad y(-\sqrt{3}) = \frac{1}{\ln(\sqrt{\pi^2 - 3} - 1)}.$

4. Знайти максимальний інтервал існування розв'язку
 $y' = (x^2 - y^2) \sin y + y^2 \cos y, \quad y(0) = 0.$

5. Чи є продовжуваним розв'язок задачі
 $y' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad x \in (-1/2e, 1/2e).$

6. Чи є продовжуваним розв'язок задачі
 $y' = y \tan x + 1, \quad y(0) = 1, \quad x \in (-3\pi/2, \pi/2).$

7. Чи можливо розв'язок задачі $y' = -x/y, \quad y(0) = 1$ продовжити за межі інтервалу $x \in (-1, 1).$

8. Довести, що максимальним інтервалом існування розв'язку задачі $y' = y^2, \quad y(0) = 2$ є інтервал $x \in (-\infty, 1/2).$

9. Довести, що максимальним інтервалом існування розв'язку задачі $y' = 2xy^2, \quad y(0) = 1$ є інтервал $x \in (-1, 1).$

10. Довести, що максимальним інтервалом існування розв'язку задачі $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 1$ є інтервал $x \in (-3\pi/4, \pi/4).$

Знайти максимальний інтервал існування розв'язку:

11. $y' + (\sin x)y^2 = 3x^2y^2, \quad y(0) = 2.$

12. $y' + 3y^{\frac{4}{3}} \sin x = 0, \quad y(\pi/2) = 1/8.$

13. $yy' - 3x^2(1 + y^2) = 0, \quad y(0) = 1.$

14. $y' = y(1 - y), \quad y(0) = 2.$

15. $y' = x^{-1}y + 4x^2y^2, \quad y(1) = 1/15.$

$$16. \quad y' = \frac{1-2x}{\cos y}, \quad y(1) = 2.$$

$$17. \quad y' = xy^3, \quad y(0) = x_0.$$

$$18. \quad y' = -y^2 \cos x, \quad y(\pi/2) = x_0.$$

$$19. \quad y' = \frac{y^2}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = x_0.$$

$$20. \quad y' = 5 + y^2, \quad y(1) = 2.$$

$$21. \quad y' = (y+1)^2, \quad y(1) = 1.$$

$$22. \quad y' = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad y(0) = 1.$$

Чи є продовжуваним розв'язок задачі Коші за межі відрізка $[a, b]$:

$$23. \quad y' = y^2 + \cos x^2, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, b = 1/2.$$

$$24. \quad y' = e^{-x^2} + y^2, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, b = \frac{\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2}.$$

$$25. \quad y' = y + e^{-y} + e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, b = 1.$$

$$26. \quad y' = y^3 + e^{-5x}, \quad y(0) = 0,4, \quad a = 0, b = 3/10.$$

$$27. \quad y' = e^{(y-x)^2}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} e^{-((1+\sqrt{3})/2)^2}.$$

$$28. \quad y' = (4y + e^{-x^2})e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, b = \frac{1}{8\sqrt{e}}.$$

$$29. \quad y' = e^{-x} + \ln(1 + y^2), \quad y(0) = 0, \quad a = 0, b = \infty.$$

$$30. \quad y' = 1 + y + y^2 \cos x, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, b = 1/3.$$

Задача Д10. (Тема: Похідна розв'язку за параметром та початковими даними. Рівняння в варіаціях.)

Знайти похідну за параметром ε при $\varepsilon = 0$ розв'язку задачі Коші:

$$1. \quad y' = y + \varepsilon(x^2 + y^2), \quad y(0) = 0.$$

$$2. \quad y' = -y + \varepsilon(x + y^2), \quad y(0) = 0.$$

$$3. \quad y' = 2y + \varepsilon(y^2 - x^2), \quad y(0) = 0.$$

$$4. \quad y' = -3y + \varepsilon(y^2 - x), \quad y(0) = 0.$$

$$5. \quad y' = y - y^2 + \varepsilon(x + y^3), \quad y(0) = 0.$$

$$6. \quad y' = y^2 - y + \varepsilon(y^4 - x), \quad y(0) = 0.$$

$$7. \quad y' = 2xy + \varepsilon(y^4 + 2x), \quad y(0) = 0.$$

$$8. \quad y' = -2xy + \varepsilon(y^3 - 2x), \quad y(0) = 0.$$

9. $y' = \varepsilon x + \frac{1}{2y}$ ($x > 0$), $y(1) = 1 - 2\varepsilon$.
10. $y' = \frac{y}{x} + \varepsilon x e^{-y}$ ($x > 0$), $y(1) = 1 + 2\varepsilon$.
11. $y' = y - x + \varepsilon x e^{2y}$, $y(1) = 2 - \varepsilon$.
12. $y' = \varepsilon x + \sin y$, $y(0) = 2\varepsilon$.
13. $y' = y + \sin y$, $y(0) = \varepsilon$.
14. $y' = \varepsilon(1 - x) + y - y^2$, $y(0) = 0$.
15. $y' = y^2 + y + \varepsilon(1 + x)$, $y(0) = 0$.
16. $y' = -y^2 + y + \varepsilon x$, $y(0) = 0$.

Знайти $\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}$ при $y_0 = 0$, де $y(x, x_0, y_0)$ - розв'язок задачі

Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:

17. $y' = 2y + x^2 y^2 - y^3$, $y(0) = y_0$.
18. $y' = y + 2xy^2 + y^3$, $y(0) = y_0$.
19. $y' = -2y + 2x^2 y^2 + y^3$, $y(0) = y_0$.
20. $y' = -y - y^2 - x^2 y^3$, $y(0) = y_0$.
21. $y' = 2xy + \sin y$, $y(1) = y_0$.
22. $y' = y^3 \sin x + y \cos x$, $y(0) = y_0$.
23. $y' = y - y^2$, $y(0) = y_0$.
24. $y' = 8 - 6y + y^2$, $y(0) = y_0$.
25. $y' = 1 + y^2$, $y(0) = y_0$.
26. $y' = \arctg y$, $y(0) = y_0$.

Знайти $\frac{\partial y(x, 0, 0)}{\partial x_0}$ для розв'язку $y(x, x_0, 0)$ задачі Коші

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = 0$, якщо:

27. $y' = y + x(y^3 + y^2)$, $y(0) = 0$.
28. $y' = -y + 2x(y^3 - y^2)$, $y(0) = 0$.
29. $y' = 2y - x(y^2 + y^4)$, $y(0) = 0$.
30. $y' = -2y - x^2 y(y^2 + 2y)$, $y(0) = 0$.

Задача Д11. (Тема: зниження порядку.)

Розв'язати рівняння:

1. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0.$

2. $y''^2 - 2y''y' + 3 = 0.$

3. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$

4. $y''^2 + y'^2 = y'^4.$

5. $y''(1+2 \ln y') = 1.$

6. $x = y''^2 + 1.$

7. $4y' + y''^2 = 4xy''.$

8. $y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$

9. $y''(y'+2)e^{y'} = 1.$

10. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}.$

11. $xy''' + y'' - x - 1 = 0.$

12. $y'y''' - 3y''^2 = 0.$

13. $xy'^2 y'' - y'^3 = \frac{1}{3}x^4.$

14. $y''y^3 = 1.$

15. $yy'' - y'^2 - 1 = 0.$

16. $2y''y^2 = 1.$

17. $4y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}.$

18. $1 + y'^2 = 2yy''.$

19. $yy'' - y'^2 = y^2 y'.$

20. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$

21. $xyy'' + xy'^2 - 3yy' = 0.$

22. $y''(y-1) = 2y'^2.$

23. $x^3 y'' = (y - xy')^2.$

24. $xy'' - x^2 yy' = y'.$

25. $(x^2 + 1)y'' = 2xy'.$

26. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0.$

27. $yy'' = 2xy'^2.$

28. $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0.$

29. $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$

30. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y.$

Задача Д12. (Тема: лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.)

Розв'язати рівняння:

1. $y'' - y' - 2y = 3x + 4.$
2. $y'' - y' - 6y = 2 \sin 3x.$
3. $4y'' + 4y' + y = 3xe^x.$
4. $y'' + y' + y = \sin^2 x.$
5. $y'' - 4y = shx.$
6. $y'' + 2y' - 3y = 1 + xe^x.$
7. $y'' + 9y = 2 \cos 3x + 3 \sin 3x.$
8. $y'' + 4y = \cos^3 x.$
9. $y'' + 2y' + 5y = e^x \sin x.$
10. $y'' + 9y = 2 \cos 3x + 3 \sin 3x.$
11. $y'' + 4y = 3x \cos 2x.$
12. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$
13. $y'' + 3y' + 2y = e^x.$
14. $y'' - 2y' + 2y = x + 1.$
15. $y'' + 2y' + 2y = \sin 3x.$
16. $y'' + y = 4x \cos x.$
17. $y'' - 4y = e^{2x}.$
18. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x.$
19. $y'' - 4y = e^{2x}.$
20. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}.$
21. $y'' + 9y = 6e^{3x}.$
22. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x.$
23. $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x.$
24. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3.$
25. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
26. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$
27. $4y'' + 8y' = x \sin x$
28. $y'' - 2y' + y = x^3$
29. $y'' + y = x^2 \sin x$
30. $y'' - 4y' + 5y = \sin x$

Задача Д13. (Тема: лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.)

Розв'язати рівняння:

1. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$
2. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$
3. $y'' + y = 2 \sin x \sin 2x$
4. $y'' + 4y = x \sin^2 x$
5. $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2$
6. $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x + x^2 + \sin 2x$
7. $5y'' - 6y' + 5y = 13e^x \cos x$
8. $y'' + 4y' + 3y = 8e^x + 9$
9. $y'' - 4y' + 4y = (9x^2 + 5x - 12)e^{-x}$
10. $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$
11. $y'' + 2y' - 3y = 2x - e^{3x}$
12. $y'' + y' = x^2 + \cos^2 x$
13. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$
14. $y'' - y = xe^x + \cos x$
15. $y'' - 2y' + y = e^x \cos x + \sin 2x + x^2$
16. $y'' + 4y = 3 \sin 2x + 1$
17. $y'' + 4y = 2 \cos 2x - 8x \sin 2x$
18. $y'' - 5y' + 6y = 10 \sin x + e^{2x}$
19. $y'' - 7y' + 6y = \sin x + xe^x$
20. $y'' + y = 2 \sin x \sin 2x$
21. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$
22. $y'' + 2y' - 3y = 2 \cos x - 8xe^{-3x}$
23. $y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x$
24. $y'' + 9y = 6xe^{-3x} - 3 \cos 3x$
25. $y'' + y' = (5 - 2x)e^{-x} - 10 \sin 2x$
26. $y'' - y' = (4x + 3)e^x - 2 \cos x$
27. $y'' - 4y' = -8e^{2x} \cos 2x - 8x + 2$
28. $y'' + y' = -2e^x (\cos x + 3 \sin x) - 2 \cos x$
29. $y'' - 3y' - 4y = -3 \cos x - 5 \sin x + e^{-x}$
30. $y'' + 2y' + y = 4 \cos x + 1$

Задача Д14. (Тема: метод Лагранжа.)

Розв'язати рівняння:

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}$

2. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$

3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^x}$

4. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

5. $y'' - 2y' = 5(3 - 4x)\sqrt{x}$

6. $y'' - 2y' + 10y = \frac{9e^x}{\cos 3x}$

7. $y'' - 4y' + 8y = 4(7 - 21x + 18x^2)\sqrt[3]{x}$

8. $y'' + y = -ctg^2 x$

9. $y'' - 4y = (15 - 16x^2)\sqrt{x}$

10. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x + 1}$

11. $y'' + 3y' = \frac{3x - 1}{x^2}$

12. $y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2x}}{1 + x^2}$

13. $y'' + y' = 7(4 + 3x)\sqrt[3]{x}$

14. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin x}$

15. $y'' + 2y = 2 - 4x^2 \sin x^2$

16. $y'' + 2y' + 5y = \frac{2e^{-x}}{\cos 2x}$

17. $y'' + 2y' + y = (x + 2)\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

18. $y'' - 2y = -2 - 4x^2 \cos x^2$

19. $y'' - y' = -\frac{x + 1}{x^2}$

20. $y'' - 2y' = \frac{1}{x} - 2 \ln(ex)$

21. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$

24. $y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x)$

25. $y'' - y' = e^{2x} \sin(e^x)$

26. $y'' + y = tg^2 x$

27. $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$

28. $y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}$

29. $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$

30. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} ctgx.$

$$22. y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$$

$$23. y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$$

Задача Д15. (Тема: Лінійні неавтономні диференціальні рівняння, формула Абеля.) Розв'язати рівняння:

$$1. (2x^2 + 3x)y'' - 6(x+1)y' + 6y = x(2x+3)^2, x > 0.$$

$$2. x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = x+4, x > 0.$$

$$3. (2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + (2 - 2x)y = (2x - x^2)^2$$

$$4. x(1+2x)y'' + 2(1+x)y' - 2y = (1+2x)^2 \sin x, x > 0$$

$$5. xy'' - (1+x)y' + y = \frac{x^2}{1+x}, x > 0$$

$$6. x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 2x^3e^{2x}$$

$$7. 2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, x > 0$$

$$8. xy'' - (6x+2)y' + (9x+6)y = 12x^3e^{3x}$$

$$9. (x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^x$$

$$10. xy'' - (2x+1)y' + 2y = 16x^2e^{4x}$$

$$11. x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3e^x$$

$$12. (x^2 - 3x)y'' + (6 - x^2)y' + (3x - 6)y = (x - 3)^2$$

$$13. xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 2x^2e^{2x}$$

$$14. (x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = (x-1)^3e^x$$

$$15. x(2x+1)y'' + 2(1-2x^2)y' - 4(x+1)y = (2x+1)^2, x > 0$$

$$16. x(x+3)y'' + (12-x^2)y' - 3(x+4)y = (x+3)^2, x > 0$$

$$17. 2x(x-2)y'' + (x^2-8)y' + (x-4)y = (x-2)^2, x > 2$$

$$18. x^2y'' - x(x^2+3)y' + (x^2+3)y = 10x^5 \sin x^2$$

$$19. (x-1)y'' + (1-2x)y' + xy = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

$$20. x^2(x-1)y'' + 2xy' - 2y = x^3e^x$$

$$21. xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = e^{2x}, x > 0$$

$$22. x(3x+2)y'' + 3(2-3x^2)y' - 18(x+1)y = (3x+2)^2, x > 0$$

$$23. 2x(x+2)y'' + (8-x^2)y' - (x+4)y = (x+2)^2, x > 0$$

$$24. (\ln x)y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \ln^2 x$$

$$25. xy'' - (4x-2)y' + 4(x-1)y = e^{2x} \cos x$$

$$26. (1-x)y'' + (2-4x)y' - 4xy = e^{-2x} \sin x$$

27. $(x+1)y'' + (x-1)y' - 2y = e^{-x}(x+1)^3$
28. $(2x-x^2)y'' + 2y' - \frac{2}{x}y = (2-x)^2 xe^{-x}$
29. $(x+1)^2 y'' - 2(x^2+3x+2)y' + 2(x+2)y = -2x(x+1)^3 e^{2x}$
30. $x(x+1)^2 y'' + 2(x+1)y' - 2y = (x+1)^3 e^x, x > 0$

Задача Д16. (Тема: теорія Штурма коливних розв'язків)

1. Довести, що кожен нетривіальний розв'язок рівняння $y'' + \frac{1}{1+\sqrt{x}}y = 0$ має на $(0, +\infty)$ нескінченну кількість нулів.
2. Довести, що кожен нетривіальний розв'язок рівняння $y'' + \frac{1}{16(1+x^2)}y = 0$ має на $(0, +\infty)$ скінченну кількість нулів.
3. Довести, що кожен нетривіальний розв'язок рівняння $y'' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ має на $(0, +\infty)$ нескінченну кількість нулів.
4. Довести, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння $y'' - xy' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ має не більше 5 нулів.
5. Довести, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння $y'' - (x-3)^2 y' + (x+1)y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ має не більше 6 нулів.
6. Довести, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння $y'' + x^2 y' + (x+4)y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ має не більше 6 нулів.
7. Довести, що розв'язок $J_0(x)$ рівняння Бесселя $xy'' + y' + xy = 0$ на $0.1 < x < 10$ має не менше 3 нулів.
8. Довести, що нетривіальний розв'язок $y_\alpha(x)$ рівняння $xy'' + (\frac{1}{2} - x)y' - \alpha y = 0$ при будь-якому α має на $(1, +\infty)$ тільки скінченну кількість нулів.
9. Довести, що розв'язок $J_1(x)$ рівняння Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ має один з нулів на $(3, 7)$.
10. Довести, що кожен нетривіальний розв'язок рівняння $y'' + \frac{2}{x}y' + e^x y = 0$ на інтервалі $[1, +\infty)$ має нескінченну кількість нулів.
11. Довести, що кожен нетривіальний розв'язок рівняння $x^2 y'' + 2x^2 y' + (\frac{1}{2}x^2 - 2)y = 0$ на інтервалі $(0, +\infty)$ має не більше одного нуля.

Довести, що кожен розв'язок рівняння є коливним на відрізку $[0, 9]$, та оцінити відстань між двома послідовними нулями на цьому відрізку:

12. $y'' + 2y' + (1 + e^x)y = 0$
13. $(x+1)y'' + 2y' + (x+1)(x^2 + 1)y = 0$.
14. $(x^2 + 1)y'' + 4xy' + 43y = 0$
15. $y'' + 2\operatorname{th}xy' + (1 + \operatorname{ch}x)y = 0$
16. $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + (x^3 + 5x^2 + 7x + 5)y = 0$
17. $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 51y = 0$
18. $y'' - 6y' + (9 + e^{2x})y = 0$
19. $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 3)y = 0$
20. $(x+1)(x^2 + 1)y'' + 2(x^2 + 1)y' + 82(x+1)y = 0$
21. $(x+5)y'' + 2y' + (x^2 + 8x + 15) = 0$
22. $y'' - 2xy' + (x+1)^2 y = 0$
23. $y'' - 2e^x y' + e^{2x} y = 0$
24. Довести, що всі нетривіальні розв'язки рівняння $y'' - x^2 y = 0$ є неколивними в довільному інтервалі (a, b) .
25. Оцінити відстань між послідовними нулями розв'язку рівняння $y'' + y \sin^2 x = 0$ ($\pi/4 < x < 3\pi/4$).
26. Дослідити коливність розв'язків рівняння $x^3 y'' + xy' + (x^3 - 1/4)y = 0$, $x > 0$
27. Навести приклад лінійного диференціального рівняння 3 порядку для якого не має місце 1 теорема Штурма.
28. Довести, що рівняння Єрміта $y'' - 2xy' + 2y = 0$ має скінченну кількість нулів на всій осі.
29. Довести, що кожен нетривіальний розв'язок рівняння $y'' + \frac{1}{1+x^2} y = 0$ має на $(0, +\infty)$ нескінченну кількість нулів.
30. Довести, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння $y'' + x^2 y' + (x+4)y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ має не більше 6 нулів.

Задача Д17. (Тема: Крайові задачі, функція Гріна.)
Знайти функцію Гріна:

1. $y'' + y = f(x)$, $y(0) - y(\pi) = 0$, $y'(0) - y'(\pi) = 0$
2. $y'' - y = f(x)$, $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$
3. $y'' - y = f(x)$, $y(0) - y'(0) = 0$, $y(2) - y'(2) = 0$.

4. $x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0$
5. $x^2 y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0$
6. $y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
7. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
8. $y'' = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
9. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$
10. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
11. $y'' + 4y = f(x), \quad y(0) = y'(1) = 0$
12. $y'' - 4y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad 2y(1) = y'(1)$
13. $y'' - y' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1)$
14. $y'' - y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$
15. $x^2 y'' + 2xy' = f(x), \quad y'(1) + y(1) = 0, \quad y'(2) = 0$
16. $y'' + y' = f(x), \quad y(0) = y'(1) = 0$
17. $y'' - y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(2) + y(2) = 0$
18. $y'' - 2y' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) - y(1) = 0$
19. $x^2 y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0$
20. $x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0$
21. $xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$
22. $y'' + 2y' + 2y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
23. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = f(x), \quad y(-1) = y'(0) = 0$
24. $xy'' + y' = f(x), \quad y'(1) = y(e) = 0$
25. $x^2 y'' + 3xy' - 3y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 2y'(2)$
26. $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = f(x), \quad y(0) = y'(1) = 0$
27. $xy'' + y' = f(x), \quad y(1) = y(2) = 0$
28. $x^2 y'' + xy' - y = f(x), \quad y(1) = y'(2) = 0$
29. $y'' + y = f(x), \quad y'(0) = y(\pi) = 0$
30. $y'' + y = f(x), \quad y(0) = y'(\pi) = 0$

Задача Д18. (Тема: Асимптотична теорія диференціальних рівнянь)

Знайти розв'язок диференціального рівняння в вигляді степеневого ряду в околі $x_0 = 0$.

1. $xy'' + 2y' + xy = 0$
2. $4xy'' + 2y' + y = 0$

3. $y'' - (1 + x^2)y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$
4. $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
6. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
7. $y'' + \frac{x}{1+x^2}y' - \frac{y}{1+x^2} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
8. $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
9. $y'' + xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
10. $y'' + (x-1)y' + y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
11. $(2x-x^2)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
12. $y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
15. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
16. $(1-x^2)y'' - xy' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
17. $y'' - (1+x^2)y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$
18. $y'' = x^2y - y', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y'' - ye^x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
20. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
21. $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$
22. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1$
23. $(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1$
24. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
25. $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
26. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
27. $(4-x^2)y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
28. $y'' + x^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
29. $(1-x)y'' + xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
30. $y'' + y \sin x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Задача Д19. (Тема: Метод Фробеніуса, рівняння Бесселя, Лежандра та ін.)

Знайти два лінійно незалежних розв'язка в вигляді узагальнено степеневих рядів:

1. $4xy'' + 2y' + y = 0$
2. $2xy'' + 3y' - y = 0$

3. $2xy'' - y' - y = 0$
4. $3xy'' + 2y' + 2y = 0$
5. $2x^2y'' + xy' - (1 + 2x^2)y = 0$
6. $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$
7. $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$
8. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
9. $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$
10. $2xy'' + (1 - 2x^2)y' - 4xy = 0$

Знайти загальний розв'язок через функції Бесселя:

11. $x^2y'' - 5xy' + (8 + x)y = 0$
12. $36x^2y'' + 60xy' + (9x^3 - 5)y = 0$
13. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x^2)y = 0$
14. $2x^2y'' - 3xy' - 2(14 - x^5)y = 0$
15. $16x^2y'' - (5 - 144x^3)y = 0$
16. $4x^2y'' - 12xy' + (15 + 16x)y = 0$
17. $16x^2y'' + 24xy' + (1 + 144x^3)y = 0$

Дослідити сингулярні точки на регулярність:

18. $x^2(1 - x)y'' + (x - 2)y' - 3xy = 0$
19. $x^2(1 - x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
20. $(1 - x^2)^2y'' + x(1 - x)y' + (1 + x)y = 0$

21. Дослідити сингулярні точки рівняння Лагера $xy'' + xy' + x^2y = 0$ та надати загальний розв'язок через степеневі ряди Лагера.

22. Дослідити сингулярні точки рівняння Лагера $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ та надати загальний розв'язок через степеневі ряди Лагера.

23. Знайти гіпергеометричні ряди рівняння Гауса $x(1 - x)y'' + (\frac{1}{2} - 3x)y' - y = 0$

24. Знайти гіпергеометричні ряди рівняння Гауса $x(1 - x)y'' + (\frac{3}{4} - 4x)y' - 2y = 0$

25. Знайти регулярні особливі точки рівняння Чебишова $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2y = 0$ та знайти два лінійно незалежних розв'язка в околі $x = 1$.

26. Дослідити регулярність особливих точок рівняння Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad \text{та надати загальний розв'язок в околі } x=1, x > 1.$$

27. Дослідити регулярність особливих точок гіпергеометричного рівняння

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad \text{та надати загальний розв'язок в околі } x=0, \gamma > 1.$$

Дослідити нерегулярні сингулярні особливі точки на нескінченності та знайти лінійно незалежні розв'язки:

28. $y'' + x^2y = 0$

29. $y'' + (x^4 + 1)y = 0$

30. $y'' + e^{2x}y = 0$

Задача Д20. (Тема: теорія збурень.)

Знайти перші члени регулярного розвинення до порядку $O(\varepsilon^3)$.

1. $y'' + y' + \varepsilon y^3 = 0, \quad x \in [0,1], \quad y(0,\varepsilon) = 1, \quad y(1,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$

2. $y'' + y' + \varepsilon y^3 = 0, \quad x \in [0,1], \quad y(0,\varepsilon) = 1, \quad y(\pi/2,\varepsilon) = 0$

3. $y'' + y + \varepsilon y^3 = 0, \quad x \in [0,\pi/2], \quad y(0,\varepsilon) = 1, \quad y(\pi/2,\varepsilon) = 0$

4. $x^2y'' - (4x + \varepsilon x^3 e^x)y' + 6y = 0, \quad x \in [0,1], \quad y(-1,\varepsilon) = 2, \quad y(1,\varepsilon) = 0$

5. $y'' + (1 - \varepsilon x e^{-x})y = 0, \quad x > 0, \quad y(0,\varepsilon) = 0, \quad y'(0,\varepsilon) = 1$

6. $y' = 1 + x^2 + \varepsilon \sin y, \quad y(0) = 1 + \sin \varepsilon$

7. $y' = \sin x + \varepsilon e^y, \quad y(0) = 1 - \varepsilon$

8. $y' = \cos x + \varepsilon \ln(1+y), \quad y(0) = \varepsilon$

9. $y'' + (1 - \varepsilon x)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

10. $y'' + y = ky^2, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0.$

Сингулярна теорія збурень.

Знайти перші декілька членів сингулярного розкладу методом малого параметру:

11. $(x + \varepsilon y)y' + y = 0, \quad y(1) = 1$

12. $(x + \varepsilon y)y' - \frac{1}{2}y = 1 + x^2, \quad y(1) = 1$

13. $\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

14. $\varepsilon y'' + y' + y \sin x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

15. $\varepsilon y'' + y' + y \sin x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1$
16. $\varepsilon y'' + y' + xy = 0, \quad y(\varepsilon, 0) = 0, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$
17. $\varepsilon(y'' + y') = y, \quad y(\varepsilon, 0) = 1, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$
18. $\varepsilon y'' + \frac{1}{1+x} y' + \varepsilon y = 0, \quad y(\varepsilon, 0) = 0, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$
19. $(x + \varepsilon y)y' + y = 0, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$
20. $\varepsilon y'' + y' + \sin y = 0, \quad y(\varepsilon, 0) = 1, \quad y'(\varepsilon, 0) = 0$

За допомоги методу малого параметру знайти апроксимацію 2π – періодичного розв'язку (граничного циклу):

21. $y'' + \varepsilon(\frac{1}{3}y^3 - y') + y = 0, \quad \varepsilon \in (0, 1)$
22. $y'' - \varepsilon y y' + y = 0$
23. $(1 + \varepsilon y')y'' + y = 0$
24. $y'' + y + \varepsilon y^2 = 0$

Знайти внутрішню та зовнішню апроксимацію задачі:

25. $\varepsilon y'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
26. $\varepsilon y'' + y' + y \sin x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1$
27. $\varepsilon y'' + y' + xy = 0, \quad y(\varepsilon, 0) = 0, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$
28. $\varepsilon(y'' + y') - y = 0, \quad y(\varepsilon, 0) = 1, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$
29. $\varepsilon y'' + \frac{1}{1+x} y' + \varepsilon y = 0, \quad y(\varepsilon, 0) = 0, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$
30. $(x + \varepsilon y)y' + y = 0, \quad y(\varepsilon, 1) = 1$

Задача Д21. (Тема: Лінійні системи-1.)

Розв'язати систему $x' = A \cdot x, \quad x \in R^3$:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$
11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$
12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$
13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
14. $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$
15. $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -12 & -5 \end{pmatrix}.$
16. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & -7 & 4 \\ -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & -8 & 6 \\ 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -5 \\ 18 & -1 & 10 \\ 11 & -7 & 10 \end{pmatrix}$

24. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \\ -14 & -18 & -7 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & -8 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 4 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

26. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & -16 & 5 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 \\ -1 & -6 & 5 \\ 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}$

27. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & -6 & 12 \\ -8 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 7 \\ -3 & -2 & 1 \\ -7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -5 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Задача Д22. (Тема: Лінійні системи-2. Кратні власні значення.)

Розв'язати систему $x' = A \cdot x$, $x \in R^3$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ -5 & -7 & 1 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -3 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ -5 & -7 & 1 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ 7 & -11 & -17 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll}
4. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & 17. A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 18. A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
5. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} & 19. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & -1 \\ 13 & 7 & -3 \end{pmatrix} & 20. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\
6. A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 21. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} & 22. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
7. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} & 23. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} & 24. A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 16 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
8. A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} & 25. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 7 & -6 \end{pmatrix} & 26. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix} \\
9. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} & 27. A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 15 & -6 \end{pmatrix} & 28. A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \\
10. A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} & 29. A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix} & 30. A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Задача Д23. (Тема: матрична експонента.)

Знайти вигляд матрицанта e^{Ax} , якщо:

$$\begin{array}{lll}
1. A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -5 \\ 18 & -1 & 10 \\ 11 & -7 & 10 \end{pmatrix} & 11. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 12. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
2. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 4 \\ -14 & -18 & -7 \end{pmatrix} & 13. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} & 14. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
3. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 4 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} & 15. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 16. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
4. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & -16 & 5 \end{pmatrix} & 17. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 18. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
5. A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & -6 & 12 \\ -8 & -8 & 6 \end{pmatrix} & 19. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 20. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
6. A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 7 \\ -3 & -2 & 1 \\ -7 & -1 & -4 \end{pmatrix} & 21. A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} & 22. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
7. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 23. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 24. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
8. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} & 25. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} & 26. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
9. A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} & 27. A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} & 28. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
10. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & 29. A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 30. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Задача Д24. (Тема: Лінійні неоднорідні системи з постійними коефіцієнтами).

Розв'язати систему рівнянь $x' = A \cdot x + f(t)$, $x \in R^2$, де :

$$\begin{array}{ll}
1. A = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ -2t - 1 \end{pmatrix} & 16. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{4t} \end{pmatrix} \\
2. A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} & 17. A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\
3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} & 18. A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} \\
4. A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 6t + 1 \\ -3t^2 + 3t + 1 \end{pmatrix} & 19. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \\
5. A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix} & 20. A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix} \\
6. A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} & 21. A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 40e^t \\ 9e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 10 \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ te^t \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \sin t \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} (\sin t)^{-1} \\ (\cos t)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -7 & -9 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t^2 e^{-2t} \\ -te^t \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} \sin 4t \\ -te^t \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

Задача Д25. (Тема: Перші інтеграли).

Знайти перші інтеграли:

$$1. \frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}.$$

$$2. \frac{tdt}{t^2 - 2xy - y^2} = \frac{dx}{2tx} = \frac{dy}{2ty}.$$

$$3. \begin{cases} tdx = (t - 2x)dt \\ tdy = (tx + ty - t + 2x)dt \end{cases}$$

$$4. \frac{tdt}{y^2 - 2xy - x^2} = \frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{x - y}.$$

$$16. \begin{cases} x' = x - y^2, \\ y' = y, \\ z' = x + y^2 + z. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x' = x^2 y - x, \\ y' = -xy^2, \\ z' = z. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x' = z^2 - y^2, \\ y' = z \\ z' = -y. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x' = x(x + y), \\ y' = -y(x + y), \\ z' = -z(x - y). \end{cases}$$

$$5. \frac{dt}{xt} = \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{txy - 2t^2}.$$

$$6. \frac{dt}{xy} = \frac{dx}{ty} = \frac{dy}{tx}.$$

$$7. \frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{-dz}{y}.$$

$$8. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy + z}.$$

$$9. \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$$

$$10. \begin{cases} x' = xy - x^2 \\ y' = y^2 \\ z' = z^2 + 2yz. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x' = y^2, \\ y' = yz, \\ z' = -z^2. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x' = 1 + z, \\ y' = y^2 e^{3x}, \\ z' = (1 + z)^2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x' = x(2y + z), \\ y' = xe^z + y, \\ z' = -(2y + z). \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x' = -x^2, \\ y' = xy - 2z^2, \\ z' = xz. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x' = xz^2, \\ y' = 2y(y - z^2), \\ z' = -z^3. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x' = xy, \\ y' = y, \\ z' = xe^{-y} + z. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x' = x(y - z), \\ y' = -y(y + z), \\ z' = z(y + z). \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x' = xz, \\ y' = x + yz, \\ z' = -z^2. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x' = x - 3x^2 z^2, \\ y' = 3x^2 y^2 z, \\ z' = z. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x' = x^2, \\ y' = 2x^3 - xy - z, \\ z' = xz - 2x^4. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x' = \frac{1}{y}, \\ y' = \frac{y^2}{x}. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x' = x - xy, \\ y' = -x + xy. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x' = -\frac{x}{y}, \\ y' = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x' = (1-x)^4, \\ y' = (x-1)^3, \\ z' = z^3 e^{-y}. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} x' = \frac{x}{x-y}, \\ y' = \frac{y}{x-y}. \end{cases}$$

Задача Д26. (Тема: Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку).

Знайти загальний інтеграл рівняння:

1. $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2.$
2. $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = zx.$
3. $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 - z^2 = 0.$
4. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - z^2.$
5. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x.$
6. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$
7. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \sqrt{a^2 - z^2}.$
8. $(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0.$
9. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = az.$
10. $(x-a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$
11. $(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$
12. $xz^4 \frac{\partial z}{\partial x} + z^4 y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2.$
13. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$
14. $(x - y + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = z.$
15. $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 2y^2 z.$

Знайти інтегральну поверхню рівняння, яка проходить через задану лінію:

$$16. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = x^2 - 1.$$

$$17. (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0, \quad z = x, \quad y = 1.$$

$$18. xz^4 \frac{\partial z}{\partial x} + yz^4 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2, \quad z = x^2, \quad y = \frac{1}{x}.$$

$$19. (x^2 y - x) \frac{\partial z}{\partial x} - xy^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad z = x, \quad y = 1.$$

$$20. (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz, \quad y = 1, \quad z = x.$$

$$21. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = x + y, \quad x = 0, \quad y = z.$$

$$22. (y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0, \quad x = 0, \quad z = y^2.$$

$$23. (z - y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial z}{\partial y} = y - x, \quad x = y = z.$$

$$24. xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + y^2 = 0, \quad x = 1, \quad y = z.$$

$$25. (xy - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2yz, \quad y = 1, \quad z = 2x.$$

$$26. x(4 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + (2x^2 y + 1) \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad x = 1, \quad y = -z.$$

$$27. 2x^3 \frac{\partial z}{\partial x} + y(2x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + z^2, \quad x = 1, \quad y = \operatorname{arctg} z.$$

$$28. (2x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + 2y) \left(\frac{\partial z}{\partial y} - 1 \right) = 0, \quad x = 0, \quad z = 2y.$$

$$29. y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2, \quad x = y, \quad x - yz = 1.$$

$$30. (z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \quad x = y = 0.$$

Задача Д27. (Тема: означення стійкості розв'язку диференціального рівняння за Ляпуновим.)

Користуючись означенням стійкості за Ляпуновим, дослідити стійкість розв'язку рівняння або системи рівнянь:

1. $\frac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) = 1.$
2. $\frac{dx}{dt} = 2t(x + 1), \quad x(0) = 0.$
3. $\frac{dx}{dt} = -x + t^2, \quad x(1) = 1.$
4. $\frac{dx}{dt} = 2 + t, \quad x(0) = 1.$
5. $\begin{cases} x' = x - 13y \\ y' = \frac{1}{4}x - 2y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0.$
6. $\begin{cases} x' = -x - 3y \\ y' = x - y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0.$
7. $\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = 5x + y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0.$
8. $\begin{cases} x' = -3y \\ y' = 2x \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0.$
9. $\begin{cases} x' = x^3 - xy^2 \\ y' = -y^3 - x^2y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0.$
10. $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = -3x + y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0.$
11. $y'' = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
12. $y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
13. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
14. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
15. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
16. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
17. $y' = \left(-1 + \frac{1}{t+1}\right)y, \quad y(0) = 1.$

18. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи, якщо загальний розв'язок має вигляд:

$$x_1(t) = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \quad x_2(t) = -C_1 \sin 2t + C_2 e^{-t}.$$

19. Система $x' = Ax, \quad x \in R^3$, має частковий розв'язок, у якого відома тільки перша координата: $x_1 = e^{-t} + \cos t$. Чи є нульовий розв'язок стійким?

20. Система $x' = Ax$, $x \in R^4$, має частковий розв'язок, у якого відомі тільки перші дві координати:
 $x_1 = \sin t + 2 \cos t$, $x_2 = \cos 2t$.

Чи є нульовий розв'язок стійким?

Користуючись означенням стійкості за Ляпуновим, дослідити стійкість нульового розв'язку рівняння або системи рівнянь:

21. $x' = -x^2$.

26. $x' = \frac{x^2}{t^2 + 1}$.

22. $x' = \sin x - x$.

27. $x' = y$, $y' = -x^3$.

23. $x' = -x \sin^2 x$.

28. $x' = y$, $y' = 3x^2 - 2x$.

24. $x' = -x \cos^2 t$.

29. $x' = y - x + (y - x)^2$, $y' = 0$.

25. $x' = x \sin^3 t$.

30. $x' = y$, $y' = x^4$.

Задача Д28. (Тема: Критерій Рауса-Гурвіца.)

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння:

1. $y''' - 3y' + 2y = 0$.

2. $y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0$.

3. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.

4. $y^{(4)} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0$.

5. $y^{(4)} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0$.

6. $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0$.

7. $y^{(4)} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0$.

8. $y^{(4)} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0$.

9. $y^{(4)} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0$.

10. $y^{(5)} + 3y^{(4)} - 5y''' - 15y'' + 4y' + 12y = 0$.

11. $y^{(5)} + 7y^{(4)} + 33y''' + 88y'' + 122y' + 60y = 0$.

12. $2y^{(4)} + 13y''' + 28y'' + 23y' + 6y = 0$.

13. $3y^{(4)} + 13y''' + 19y'' + 11y' + 2y = 0$.

14. $y^{(4)} + 4y''' + 16y'' + 24y' + 20y = 0$.

15. $y^{(5)} + 13y^{(4)} + 43y''' + 51y'' + 40y' + 12y = 0$.

16. $y^{(4)} + y''' + y' + y = 0$.

17. $y''' - 3y' + 2y = 0$.

18. $y^{(4)} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0.$
19. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0.$
20. $y^{(4)} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0.$
21. $y^{(4)} + 7y''' + 17y'' + 6y = 0.$
22. $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0.$
23. $y^{(4)} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0.$
24. $y^{(4)} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0.$
25. $y^{(4)} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0.$
26. $2y^{(4)} + 13y''' + 28y'' + 23y' + 6y = 0.$
27. $3y^{(4)} + 13y''' + 19y'' + 11y' + 2y = 0.$
28. $2y^{(4)} + 6y''' + 9y'' + 6y' + 2y = 0.$
29. $y^{(4)} + 4y''' + 16y'' + 24y' + 20y = 0.$
30. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 2y''' + y'' + 3y' + 2y = 0.$

Задача Д29. (Тема: Стійкість за першим наближенням).

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок $(0,0)$ системи:

1. $x' = x + 2y - \sin y^2, \quad y' = -x - 3y + x(e^{x^2/2} - 1).$
2. $x' = -x + 3y + x^2 \sin y, \quad y' = -x - 4y + 1 - \cos y^2.$
3. $x' = -2x + 8\sin^2 y, \quad y' = x - 3y + 4x^3.$
4. $x' = 3x - 22\sin y + x^2 - y^3, \quad y' = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1.$
5. $x' = -10x + 4e^y - 4\cos y^2, \quad y' = 2e^x - 2 - y + x^4.$
6. $x' = 7x + 2\sin y - y^4, \quad y' = e^x - 3y - 1 + 2,5x^2.$
7. $x' = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y - x^3y, \quad y' = -y - 2x + x^4 - y^7.$
8. $x' = \frac{5}{2}xe^x - 3y + \sin x^2, \quad y' = 2x + ye^{-y^2/2} - y^4 \cos x.$
9. $x' = \frac{3}{4}\sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3, \quad y' = \frac{2}{3}x - 3y \cos y - 11y^5.$
10. $x' = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4, \quad y' = \frac{1}{5}x - \sin y + y^{16}.$
11. $x' = 5x + y \cos y - \frac{x^3}{3}, \quad y' = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^y.$
12. $x' = 4y - x^3, \quad y' = -3x - y^3.$
13. $x' = -2y - x^5, \quad y' = 2x - y^5.$
14. $x' = -x + y + y^2, \quad y' = -2y - x^2.$

$$15. x' = -\frac{3}{2}x + \sin y \cos y, \quad y' = -2x - y + \sin x^3.$$

$$16. x' = \ln(4y + e^{-3x}) + x^3, \quad y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} + y^2.$$

$$17. x' = e^{x+2y} - \cos 3x + xy, \quad y' = \sqrt{4+8x} - 2e^y - y^2.$$

Дослідити стійкість особливих точок системи:

$$18. x' = -3 + 2x + y, \quad y' = \operatorname{arctg}(xy).$$

$$19. x' = x^2 - y, \quad y' = \ln(3x^2 - 1) - \ln 2.$$

$$20. x' = 4 - x(3y + 2) - 9y^2, \quad y' = \ln \frac{1+x}{1-2x}.$$

$$21. x' = x^3 y + y^2, \quad y' = \ln(x^3 + y) - 3y.$$

$$22. x' = \operatorname{sh}(x - y), \quad y' = e^{2xy+x+y} - 1.$$

$$23. x' = x - y^2, \quad y' = x^2 + y^2 - 2.$$

$$24. x' = 5x - 8y + 3, \quad y' = \ln \frac{x}{y}.$$

$$25. x' = e^{2x+2y} + x, \quad y' = \arccos(x - x^3) - \frac{\pi}{2}.$$

$$26. x' = e^{xy} + y^2 - 3, \quad y' = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$27. x' = \ln(x + y), \quad y' = x^3 + y^3 - 1.$$

$$28. x' = e^{\frac{xy^3}{2}} + y^2 - 3, \quad y' = 4\operatorname{arctg} \frac{x}{y^5}.$$

$$29. x' = e^{x^2-2y} - e^{2x}, \quad y' = -x - 2y - y^2.$$

$$30. x' = 2x - y - x^2, \quad y' = \sqrt{1+4y} - \sqrt{1+2x+2y^2}.$$

Задача Д30. (Тема: Функції Ляпунова-1).

Дослідити стійкість точки $(0,0)$ для автономних систем:

$$1. x' = -2y - x^3, \quad y' = x - y^3.$$

$$2. x' = y - 2x^3, \quad y' = -2x - y^3.$$

$$3. x' = -x - y^2, \quad y' = xy - x^2 y.$$

$$4. x' = -xy^2, \quad y' = -y - 2x^2 y.$$

$$5. x' = -xy^2, \quad y' = -4xy^2 - 2y^3.$$

$$6. x' = x - y^2, \quad y' = xy + y^3.$$

$$7. x' = 2y + x^3, \quad y' = -x + y^3.$$

8. $x' = -y + 2x^3, \quad y' = 2x + y^3.$
9. $x' = -4x^2y - 2x^3, \quad y' = -x^2y.$
10. $x' = -x^3 + xy^2, \quad y' = -2x^2y - y^3.$
11. $x' = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2, \quad y' = -y^3.$
12. $x' = -x^3 + 2y^3, \quad y' = -2xy^2.$
13. $x' = x^3 - y^3, \quad y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3.$
14. $x' = 2y^3 - x^5, \quad y' = -x - y^3 + y^5.$
15. $x' = xy - x^3 + y^3, \quad y' = x^2 - y^3.$
16. $x' = -3y - 2x^3, \quad y' = 2x - 3y^3.$
17. $x' = -xy^4, \quad y' = x^4y.$
18. $x' = x + 2xy^2, \quad y' = -2y + 4x^2y^3.$
19. $x' = -y - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4}, \quad y' = x - \frac{y}{2} - \frac{y^3}{4}.$
20. $x' = y + x^3, \quad y' = -x + y^3.$
21. $x' = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5, \quad y' = -2x - x^3y - \frac{1}{2}y^3.$
22. $x' = xy^4 - 2x^3 - y, \quad y' = 2x^2y^3 - y^7 + 2x.$
23. $x' = x^5 + y^3, \quad y' = x^3 - y^5.$
24. $x' = xy - x^3 + y, \quad y' = x^4 - x^2y - x^3.$
25. $x' = -x - y - x^3 - y^2, \quad y' = x - y + xy.$
26. $x' = -y + x^5, \quad y' = x + y^5.$
27. $x' = -2x + 4xy^2, \quad y' = y + 2x^2y.$
28. $x' = y - x, \quad y' = -x - 2y^3.$
29. $x' = -xy, \quad y' = -x^3.$
30. $x' = -y - xy^2, \quad y' = 2x - y - y^3.$

Задача Д31. (Тема: Функції Ляпунова-2).

Дослідити стійкість точки $(0,0)$ для автономних систем:

1. $x' = 2y - x^3, \quad y' = 2x - y^3.$
2. $x' = 3y^2 - x^5, \quad y' = -3x^3 - y^5.$
3. $x' = -x^3, \quad y' = -y^3.$
4. $x' = y - x^3, \quad y' = -x - y^3.$
5. $x' = y + x^3, \quad y' = -x + y^3.$
6. $x' = -x + y^6, \quad y' = y^3 + x^6.$

$$7. x' = -x^3 y^2 - x^2 y^3, \quad y' = x^3 y^2 - x^2 y^3.$$

$$8. x' = y(1 - x^2), \quad y' = -(x + y)(1 - x^2).$$

$$9. x' = x^3 + xy, \quad y' = -x^2 y - y.$$

$$10. x' = -x + y^3, \quad y' = -x - y.$$

$$11. x' = -y - x^3, \quad y' = x - y^3.$$

$$12. x' = 2y^3 - x^5, \quad y' = -x - y^3.$$

$$13. x' = y^3 + x^5, \quad y' = x^3 + y^5.$$

$$14. x' = -4y - x^3, \quad y' = 3x - y^3.$$

$$15. x' = xy^4, \quad y' = -x^2 y.$$

$$16. x' = -xy^4, \quad y' = yx^4.$$

$$17. x' = 3x + y^2, \quad y' = -2y + y^3.$$

$$18. x' = x^3 - y, \quad y' = x + y^3.$$

$$19. x' = y^2 - x^2, \quad y' = 2xy.$$

$$20. x' = x^3 + yx^2, \quad y' = -y + x^2.$$

$$21. x' = x^3 + xy, \quad y' = -x + y^2 + xy - x^3.$$

$$22. x' = -x + 3y^2, \quad y' = -xy - y^3.$$

$$23. x' = -x - xy^2, \quad y' = -y + 3x^2 y.$$

$$24. x' = -x^3, \quad y' = -x^2 \left(x + \frac{1}{2}y\right).$$

$$25. x' = -2xy, \quad y' = x^2 - y^3.$$

$$26. x' = -x - 2y^2, \quad y' = xy - y^3.$$

$$27. x' = x^2 - y^2, \quad y' = -2xy.$$

$$28. x' = y, \quad y' = -x - y^3.$$

$$29. x' = y, \quad y' = -x - (1 - x^2)y.$$

$$30. x' = x^2, \quad y' = 2y^2 - xy.$$

Задача Д32. (Тема: Теорія Флоке. Стійкість лінійних рівнянь з періодичними коефіцієнтами).

Знайти мультиплікатори, дослідити стійкість та існування періодичних розв'язків рівняння або системи:

$$1. x' = (2 \sin 3t)x.$$

$$2. x' = (\cos^2 t)x.$$

$$3. x' = (-1 + \sin 4t)x.$$

$$17. x' = \begin{pmatrix} -\sin 2t & \cos 2t - 1 \\ \cos 2t + 1 & \sin 2t \end{pmatrix} x.$$

$$18. x' = \begin{pmatrix} 2 & \sin^2 t \\ \cos^2 t & \sin t \end{pmatrix} x.$$

$$19. (2 + \cos t)x'' + \cos t \cdot x = 0.$$

$$4. \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sin^2 t \end{pmatrix} x.$$

$$5. \quad x' = \begin{pmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} x.$$

$$6. \quad x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sin t & -1 \end{pmatrix} x.$$

$$7. \quad x' = \begin{pmatrix} -3 + 2 \sin t & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

$$8. \quad x' = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) + 1 & 0 \\ \cos(2\pi t) & 1 \end{pmatrix} x.$$

$$9. \quad x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \sin 2t & -2 \end{pmatrix} x.$$

$$10. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$11. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & \cos t \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$12. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & \sin^2 t \\ \sin^2 t & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$13. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & \cos^2 t \\ \cos^2 t & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$14. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix} x.$$

$$15. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos t & -1 - \cos t \end{pmatrix} x.$$

$$16. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{\cos t + \sin t}{2 + \sin t - \cos t} \end{pmatrix} x.$$

$$20. \quad x' = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix} x.$$

$$21. \quad x' = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ -\cos t + \cos^2 t & -\sin t \end{pmatrix} x.$$

$$22. \quad x' = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix} x.$$

$$23. \quad x' = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} x.$$

$$24. \quad x'' + x' + (2 + \sin t)x = 0.$$

$$25. \quad x' = \begin{pmatrix} -\sin 2t & \cos 2t - 1 \\ \cos 2t + 1 & \sin 2t \end{pmatrix} x.$$

$$26. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin t \cos t & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$27. \quad x' = \begin{pmatrix} \cos 2t & 1 - \sin 2t \\ -1 - \sin 2t & -\cos 2t \end{pmatrix} x.$$

$$28. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos 2t & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$29. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & \cos^2 t \\ -\sin t \cos t & 0 \end{pmatrix} x.$$

$$30. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & -\sin t \\ -\sin t \cos t & 0 \end{pmatrix} x.$$

Задача Д33. (Тема: Стійкість квазілінійних систем, характеристичний показник Ляпунова, періодичні розв'язки).

Знайти характеристичні показники Ляпунова:

$$1. \quad \begin{aligned} x' &= x \cos at + y \sin bt, \\ y' &= x \sin bt + y \cos at. \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} x' &= y(\sin \ln t + \cos \ln t), \\ y' &= x(\sin \ln t + \cos \ln t). \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} x' &= x(\sin \ln t + \cos \ln t), \\ y' &= y(\sin \ln t + \cos \ln t). \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} x' &= (t \cos t + \sin t)x, \\ y' &= -(t \cos t + \sin t)y. \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} x' &= \frac{y}{t}, \\ y' &= \frac{x}{t} + \pi \sin(\pi \sqrt{t})y. \end{aligned}$$

6. Дослідити на стійкість розв'язок $x = \sin t$, $y = -2 \cos t$ системи:

$$x' = \ln(-x + 1 + \sin t) - \frac{y}{2},$$

$$y' = (1 - x^2) \cos t + 2x \cos^2 t + 2 \sin^3 t - \cos^3 t.$$

Дослідити нульовий розв'язок на стійкість:

$$7. \quad x' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -t^2 x_1 x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad \begin{aligned} x' &= -x \sin^2 t + \left(2 + \frac{2}{t}\right)y, \\ y' &= -x - y \cos^2 t. \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned} x' &= -x + y + (x^2 + y^2) \sin t, \\ y' &= -x - y + (x^2 + y^2) \cos t. \end{aligned}$$

$$10. \quad x' = y \sin t, \quad y' = 0.$$

$$11. \quad x'' + e^{-t} x' + x = e^t.$$

$$12. \quad x' = -t^2 x, \quad y' = -ty.$$

$$13. \quad x' = \begin{pmatrix} t^{-2} & -4 \\ -1 & t^{-2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$14. \quad x' = \begin{pmatrix} 2 & e^{-t} & -3 \\ -2 & e^{-t} & 1 \\ 4 + e^{-t} & -1 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

$$15. \quad x'' + \left(\frac{1 + (t-1)|x'|}{1 + t|x'|} \right) x' + \frac{1}{4} x = 0.$$

$$x' = 2x + y - x^2 - y^2,$$

$$16. \quad y' = x + 3y - x^3 \sin z,$$

$$z' = y + 2z + x^2 + y^2.$$

$$17. x' = \begin{pmatrix} \ln(1-x_3) \\ \ln(1-x_1) \\ \ln(1-x_2) \end{pmatrix}.$$

$$x' = x - \cos y - z + 1,$$

$$18. y' = y - \cos z - x + 1,$$

$$z' = z - \cos x - y + 1.$$

$$19. x''' + 2x'' + 3x' + 9shx = 0.$$

$$20. x''' + x + chx - 1 = 0.$$

$$21. x^{(4)} + 2x''' + 3x'' + 11x + x \sin x = 0.$$

22. Дослідити стійкість π -періодичного розв'язку системи

$$x' = x - y, \quad y' = 2x - y + 6 \sin^2 t.$$

Дослідити на стійкість лінійне рівняння (при різних значеннях параметра a)

$$23. x'' + ax = \sin^2 t.$$

$$24. x''' + x' = \cos at.$$

$$25. x'' + ax = \cos at.$$

26. Дослідити існування 2π -періодичного розв'язку рівняння:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \cos t \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} sh \sin t \\ ch \sin t \end{pmatrix}.$$

Дослідити питання існування обмежених на $[0, \infty)$ розв'язків:

$$27. x'' + \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) x = 0.$$

$$28. x'' + \left(1 + \frac{1}{1+t^4}\right) x = \cos t.$$

$$29. x'' + e^t x = 0.$$

$$30. x'' + cx' + \left(1 + \frac{1}{1+t^4}\right) x = \sin t, \quad c > 0.$$

Задача Д34. (Тема: Особливі точки двовимірних лінійних систем).

Класифікувати тип особливої точки $(0,0)$ та навести фазовий портрет системи $x' = Ax, x \in R^2$:

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$11. A = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	13. $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	14. $A = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -17 & -5 \end{pmatrix}$	15. $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$	16. $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	17. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$	18. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$	19. $A = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}$	20. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	21. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	22. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$	23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	24. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$	25. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	26. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$	27. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$	28. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$	29. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$	30. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Задача Д35. (Тема: Якісний аналіз двовимірних нелінійних систем-1)

Дослідити тип особливої точки $(0,0)$ та навести фазовий портрет системи:

1. $x' = x - 3y + 2xy, \quad y' = 4x - 6y - xy.$
2. $x' = 6x - 5y + x^2, \quad y' = 2x - y + y^2.$
3. $x' = x + 2y + x^2 + y^2, \quad y' = 2x - 2y - 3xy.$
4. $x' = x + 4y - xy^2, \quad y' = 2x - y + x^2y.$
5. $x' = 2x - 5y + x^3, \quad y' = 4x - 6y + y^4.$
6. $x' = 5x - 3y + y(x^2 + y^2), \quad y' = 5x + y(x^2 + y^2).$
7. $x' = x - 2y + 3xy, \quad y' = 2x - 3y - x^2 - y^2.$
8. $x' = 3x - 2y - x^2 - y^2, \quad y' = 2x - y - 3xy.$
9. $x' = x - y + x^4 - y^2, \quad y' = 2x - y + y^4 - x^2.$
10. $x' = 3x - y + x^3 + y^3, \quad y' = 13x - 3y + 3xy.$
11. $x' = x - y, \quad y' = x^2 - y.$
12. $x' = x, \quad y' = x^2 - y.$

Знайти особливі точки, класифікувати їх тип та навести фазовий

портрет системи:

13. $x' = y - 1$, $y' = x^2 - y$. 23. $x' = y + xy$, $y' = x + y$.
14. $x' = y^2 - 1$, $y' = x^3 - y$. 24. $x' = -2x + x^2 - xy$, $y' = -4y + y^2 + 2xy$.
15. $x' = xy - 2$, $y' = x - 2y$. 25. $x' = -3y - xy - 4$, $y' = y^2 - x^2$.
16. $x' = y$, $y' = x - x^2$. 26. $x' = x^2 - 10x + 16$, $y' = y + 1$.
17. $x' = x + y$, $y' = x + xy$. 27. $x' = x(3 - y)$, $y' = x + y + 1$.
18. $x' = y + y^2$, $y' = x + y$. 28. $x' = y - x$, $y' = x + y - 2xy$.
19. $x' = 2y$, $y' = 2x + y^2$. 29. $x' = 1 - x^2$, $y' = y$.
20. $x' = y$, $y' = -x + xy$. 30. $x' = xy$, $y' = x^2 + y^2 - 4$.
21. $x' = 4y$, $y' = -4x + y^3$.
22. $x' = x + y + y^2$, $y' = y$.

Задача Д36. (Тема: Якісний аналіз двовимірних нелінійних систем-2)

Знайти особливі точки, класифікувати їх тип та навести фазовий портрет системи:

1. $x' = \arcsin(x^2 - 2x - y)$, $y' = \ln(1 - x + \frac{x^2}{3})$.
2. $x' = e^{-sh(x+y)} - 1$, $y' = 2xy + x - y$.
3. $x' = \arctg(x^2 - x + y)$, $y' = \ln(1 + x^2 + 3x - y)$.
4. $x' = e^x - y - 1$, $y' = x + \ln(1 + y)$.
5. $x' = shy$, $y' = e^x - 1$.
6. $x' = \ln(1 + x + 4y)$, $y' = \arcsin(x + y - \frac{x^2}{4})$.
7. $x' = sh(x - y)$, $y' = e^{x+y+2xy} - 1$.
8. $x' = e^{-x+4y}$, $y' = \arctg(4x - y - \frac{5x^2}{4})$.
9. $x' = 2\pi + \arcsin(y^2 + 8 + \sin x) + x$, $y' = 2y + 4 - 3\sin x$.
10. $x' = \ln(x^3 - 1 - 6e^y) - y$, $y' = 4x - 4e^y - 4$.
11. $x' = \pi + \arctg(x^3 - 8 - tgy) - y$, $y' = 2x + 12tgy - 4$.
12. $x' = \sqrt{y^3 - 1 - 6x^2} - x$, $y' = \sqrt{2y - 3} - \sqrt{2x^2 - 1}$.
13. $x' = sh(2x + y - x^2)$, $y' = \ln(1 + 3x - x^2)$.
14. $x' = \arctg(x - y - 4)$, $y' = 2x - 2y - 4\sqrt[3]{x^2 - 1}$.
15. $x' = \ln(2 - x + y)$, $y' = x - y - e^{4(x^2-1)}$.

16. $x' = \sqrt[3]{7x + y} + y - 2, \quad y' = -\ln(1 + x).$
17. $x' = e^{1-2x-3y} + x, \quad y' = \operatorname{arctg}(x^2 - 1).$
18. $x' = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 6y - 4y^3} - 1, \quad y' = \ln(x^3 - 7y) + 2y.$
19. $x' = e^{\frac{y}{x}-1} - x, \quad y' = \operatorname{arctg}(x^3 - x).$
20. $x' = 1 - e^{x^2-y}, \quad y' = \operatorname{th}(2 + x - x^2).$
21. $x' = \sqrt{1 + 2x - 5y} - 1, \quad y' = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{5}x^2 - 2y\right).$
22. $x' = \operatorname{arctg}(x - y - 1), \quad y' = \sqrt[3]{3x^2 + 3y - 2} - 1.$
23. $x' = x^2 - y, \quad y' = \frac{3}{4}\ln(2x^2 - 1).$
24. $x' = x - y^2, \quad y' = \operatorname{arctg}(1 - y^2).$
25. $x' = 2 - 2\sqrt{1 + x + y}, \quad y' = e^{\frac{5}{4}x+2y+y^2} - 1.$
26. $x' = 1 - \sqrt{1 + 2y}, \quad y' = \sin(\sqrt{x} - y - 1).$
27. $x' = \arcsin 2\left(\frac{\sqrt{x}}{y} - 1\right), \quad y' = 1 - 4x + 3y.$
28. $x' = 2(\sqrt{x} - y - 1), \quad y' = \operatorname{sh}(x + y - 1).$
29. $x' = 2x + y^2 - 1, \quad y' = \sin x - y^2 + 1.$
30. $x' = \ln(x + y), \quad y' = x^3 + y^3 - 1.$

Задача Д37. (Тема: Консервативні та Гамільтонові системи на площині).

Класифікувати особливі точки та навести фазовий портрет консервативної системи Ньютона:

1. $\ddot{x} - 3x^2 = 0.$
2. $\ddot{x} + e^x - 1 = 0.$
3. $\ddot{x} - 2x^3 + 2x = 0.$
4. $\ddot{x} + x - x^2 = 0.$
5. $\ddot{x} = 4x^3 - 2x.$
6. $\ddot{x} = \sin x(\cos x - 1).$
7. $\ddot{x} = x^5 - 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x.$
8. $\ddot{x} = \sin x(2\cos x - 1).$
9. $\ddot{x} = x^4 - x^2.$
10. $x' = y, \quad y' = 3x^2 - 1.$

Дослідити тип особливих точок, перевірити систему на гамільтоновість, знайти гамільтоніан та зобразити його.

11. $x'' + 0,15x' + \sin x = 0.$
12. $x' = y(y^2 - 1), \quad y' = x(1 - x^2).$

13. $x' = x(1 - y), \quad y' = \frac{1}{2}y^2 - y.$
14. $x' = x^2 - 2xy, \quad y' = y^2 - 2xy.$
15. $x' = -\sin^2 x \sin^2 y, \quad y' = -\sin 2x \cos y.$
16. $x' = x(xe^y - \cos y), \quad y' = \sin y - 2xe^y.$
17. $x' = y^2, \quad y' = -\frac{2}{3}x.$
18. $x' = x \cos(xy), \quad y' = -y \cos(xy).$
19. $x' = -x \sin y + 2y, \quad y' = -\cos y.$
20. $x' = \sin x \cos y, \quad y' = 2x - \cos x \sin y.$
21. $x' = x - 3y^2, \quad y' = -y.$
22. $x' = x \cos y, \quad y' = -y \cos x.$
23. $x' = y, \quad y' = x^2 - 6.$
24. $x' = x^2 + 2xy, \quad y' = 4 - 2xy - y^2.$
25. $x' = y, \quad y' = x - x^2 + 6.$
26. $x' = (x^2 - 1)(3y^2 - 1), \quad y' = -2xy(y^2 - 1).$
27. $x' = \frac{1 - x^2 + y^2}{y^2}, \quad y' = -\frac{2x}{y}, \quad y \neq 0.$
28. $x' = e^y - 2x, \quad y' = 2y - 2x.$
29. $x' = -x^3 - 4y^3, \quad y' = 3x^2y + 2.$
30. $x' = x^2 \cos(xy) - x^2, \quad y' = 2xy - \sin xy - xy \cos(xy).$

Задача Д38. (Тема: Граничні цикли).

Дослідити питання існування граничних циклів. Встановити їх стійкість.

1. $x' = y + x\left(\frac{1}{2} - x^2 - y^2\right), \quad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2).$
2. $x' = -y + x \cos(\pi x), \quad y' = x - y^3.$
3. $x' = y - \mu(-x + x^3), \quad y' = -x, \quad \mu = 10; 0,01.$
4. $x' = -y + xy, \quad y' = x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$
5. $x' = x - y - \left(x^2 + \frac{3}{2}y^2\right)x, \quad y' = x + y - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)y.$
6. $x' = -y - \frac{x(x^2 + y^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y' = x - \frac{y(x^2 + y^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$
7. $x' = x - x^3 - xy^2, \quad y' = y - y^3 - yx^2.$

$$8. \quad x' = y + x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2), \quad y' = -x + y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2)$$

$$9. \quad x' = xy + x \cos(x^2 + y^2), \quad y' = -x^2 + y \cos(x^2 + y^2).$$

$$10. \quad x' = -y - \frac{x(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y' = x - \frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Знайти замкнені траєкторії диференціальних рівнянь:

$$11. \quad \ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^4 - 2)x = 0.$$

$$12. \quad \ddot{x} + (\ln(x^2 + 4\dot{x}^2))\dot{x} + x = 0.$$

$$13. \quad \ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0.$$

$$14. \quad \ddot{x} + (\dot{x}^2 + x^2 - 4)x = 0.$$

$$15. \quad \ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)x^3 = 0.$$

16. Довести, що система

$$x' = 12x + 10y + x^2y + y \sin y - x^3, \quad y' = x + 14y - xy^2 - y^3,$$

не має періодичних розв'язків в $x^2 + y^2 \leq 8$.

Дослідити питання існування граничних циклів:

$$17. \quad x' = x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - y, \quad y' = y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) + y.$$

$$18. \quad x' = 3x - y - xe^{x^2 + y^2}, \quad y' = x + 3y - ye^{x^2 + y^2}.$$

$$19. \quad \begin{aligned} x' &= x(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + y, \\ y' &= y(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) - x \end{aligned}$$

$$20. \quad x' = 4x + 4y - x(x^2 + y^2), \quad y' = -4x + 4y - y(x^2 + y^2).$$

$$21. \quad \begin{aligned} x' &= x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) - y(x^2 + y^2 - 2x - 8) \\ y' &= y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) + x(x^2 + y^2 - 2x - 8). \end{aligned}$$

$$22. \quad x' = y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2), \quad y' = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2).$$

$$23. \quad x' = y + x\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - 3), \quad y' = -x + y\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 - 3)$$

$$24. \quad x' = y, \quad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

$$25. \quad x' = y, \quad y' = x + y(x^2 + y^2).$$

$$26. \quad x' = -y - x(x^2 + y^2 - 9)^2, \quad y' = x - y(x^2 + y^2 - 9)^2.$$

Користуючись теоремами Л'єнара, Левінсона дослідити питання існування граничного циклу рівнянь:

$$27. x'' + (5x^4 - 6x^2)x' + x^3 = 0.$$

$$28. \ddot{x} + (\dot{x}^4 - 4)\dot{x} + x^5 = 0.$$

$$29. \ddot{x} + (\dot{x}^6 - 16)\dot{x} + 4x^3 = 0.$$

$$30. \ddot{x} + \dot{x} + \dot{x}^3 + 4x = 0.$$

Задача Д39. (Тема: Біфуркації особливих точок).

Знайти точки біфуркації, встановити їх тип та побудувати біфуркаційну діаграму:

$$1. x' = \varepsilon x - x^5$$

$$2. x' = \varepsilon x - x^3 - x^5.$$

$$3. x' = \varepsilon x - x^3 - x^7.$$

$$4. x' = x(x-1)(x-2\varepsilon).$$

$$5. x' = -x(4x^2 + \varepsilon^2 - 1).$$

$$6. x' = x^2 + 4\varepsilon^2 - 1.$$

$$7. x' = x + 2\varepsilon x^2 - x^3.$$

$$8. x' = \varepsilon x - 3x^2.$$

$$9. x' = x(\varepsilon - 2x + x^2).$$

$$10. x' = x(\varepsilon + x - x^2)(1 - \varepsilon + x^2).$$

$$11. x' = x^2 - \varepsilon^2 x.$$

$$12. x' = \varepsilon^2 - x^4.$$

$$13. x' = \varepsilon^2 x - x^3.$$

$$14. x' = x(x - \varepsilon^2)(\varepsilon - x).$$

$$15. x' = \varepsilon - x - e^{-x}.$$

$$16. x' = x(\varepsilon + e^x).$$

$$17. x' = x - \frac{\varepsilon x}{1 + x^2}.$$

Дослідити стійкість та тип біфуркації особливих точок. Навести біфуркаційну діаграму системи:

$$18. x' = x, \quad y' = \varepsilon - y^4.$$

$$19. x' = x^2 - x\varepsilon^2, \quad y' = -y.$$

$$20. x' = -x^4 + 5\varepsilon x^2 - 4\varepsilon^2, \quad y' = -y.$$

$$21. x' = x(\varepsilon - 2x) - xy, \quad y' = y(x - 1).$$

$$22. x' = x(\varepsilon - 2x) - xy, \quad y' = y(x - 1) + y^2.$$

$$23. x' = x(\varepsilon - 2x) - xy, \quad y' = y(x - 1) - y^2.$$

$$24. x' = 2(1 - \varepsilon)x + x^2 - xy, \quad y' = x + \frac{1}{2}x^2 - y.$$

$$25. x' = \varepsilon x - 2x(x^2 + y^2), \quad y' = (\varepsilon - 1)y - y(x^2 + y^2).$$

$$26. x' = y + \varepsilon x - xy + y^2, \quad y' = \varepsilon x + xy - x^2.$$

$$27. x' = \varepsilon x - xy - x^2 + y^2, \quad y' = \varepsilon y + xy.$$

$$28. x' = y, \quad y' = x(\varepsilon - x^2).$$

$$29. x' = x, \quad y' = y^2 - \varepsilon.$$

$$30. x' = y, \quad y' = -x - 2x^2 - \varepsilon x^3.$$

Задача Д40. (Тема: Біфуркація Андронова-Хопфа)

Знайти при якому значенні параметра ε_0 відбувається біфуркація Андронова-Хопфа. Намалювати фазовий портрет системи при значеннях параметра $\varepsilon = \varepsilon_0; 0$.

$$1. x' = x(x(1-x) - y), \quad y' = (x - \varepsilon)y.$$

$$2. x' = -x + 0,05y + x^2y, \quad y' = \varepsilon - 0,05y - x^2y.$$

$$3. x' = \varepsilon x + y - x^2y, \quad y' = -x + \varepsilon y.$$

$$4. x' = \varepsilon x + y - x^3, \quad y' = -x + \varepsilon y + 2y^3.$$

$$5. x' = \varepsilon x + y - x^2, \quad y' = -x + \varepsilon y + x^2.$$

$$6. x' = \varepsilon x + y - x^2 + xy^2, \quad y' = -x + \varepsilon y - y^2.$$

$$7. x' = y + \varepsilon x - \frac{1}{3}x^3, \quad y' = -x.$$

$$8. x' = y + \varepsilon x - y^2, \quad y' = -4x + \varepsilon y + y^2.$$

$$9. x' = r^2(\varepsilon - r^2)x + y, \quad y' = r^2(\varepsilon - r^2)y - x, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

$$10. x' = 2(1 - \varepsilon)x + x^2 - xy, \quad y' = x + \frac{1}{2}x^2 - y.$$

$$11. x' = y + \varepsilon x - xy^2, \quad y' = \varepsilon y - x - y^3.$$

$$12. \varphi' = 1, \quad r' = \varepsilon r(r + \varepsilon)^2.$$

$$13. \varphi' = -1, \quad r' = r(\varepsilon - r)(\varepsilon - 2r).$$

$$14. \varphi' = 1, \quad r' = r(\varepsilon^2 - r^2).$$

$$15. \varphi' = -1, \quad r' = r(\varepsilon - 0,2r^6 + r^4 - r^2).$$

$$16. \varphi' = 1, \quad r' = r((r-1)^2 - \varepsilon r).$$

$$17. \ddot{x} + \dot{x}^3 - 2\varepsilon\dot{x} + x = 0.$$

$$18. \ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

$$19. x' = y, \quad y' = -x + \varepsilon y + x^2 + xy + y^2.$$

$$20. x' = \varepsilon(1 - xy^2 + \varepsilon(y-1)), \quad y' = xy^2 - y.$$

$$21. x' = -\varepsilon x - y + \frac{x}{1+x^2+y^2}, \quad y' = x - \varepsilon y + \frac{y}{1+x^2+y^2}.$$

$$22. x' = y - x(x^2 + y^2 - \varepsilon), \quad y' = -x - y(x^2 + y^2 - \varepsilon).$$

$$23. x' = \varepsilon x - y - x^3, \quad y' = x + \varepsilon y - y^3.$$

$$24. \begin{aligned} x' &= \varepsilon x - y + (x^2 + y^2)^2(\alpha x - \beta y), \\ y' &= x + \varepsilon y + (x^2 + y^2)^2(\alpha x + \beta y). \end{aligned}$$

$$25. x' = \varepsilon x - y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad y' = x + \varepsilon y - y\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$26. \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (x - x^3) = 0.$$

$$27. x' = \varepsilon x - y + x^2 + xy, \quad y' = x + \varepsilon y + x^2 - y^2.$$

$$28. \begin{aligned} x' &= \varepsilon x - y + x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2), \\ y' &= x + \varepsilon y + x(x^2 + y^2) + y(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

$$29. x' = \varepsilon x + y + xy - xy^2, \quad y' = -x + \varepsilon y - x^2 + y^2.$$

$$30. x' = x + y, \quad y' = (\varepsilon - 2)x + (\varepsilon - 1)y - x^3 - x^2y.$$

Додаток 2. Таблиці.

Таблиця 1. (Рівномірно розподілені випадкові числа).

Наведені в таблиці числа є незалежні та однаково розподілені випадкові величини, які приймають значення $0,1,\dots,9$ з однією ймовірністю $0,1$.

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 45 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40

44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59

Таблиця 2 . (Нормально розподілені випадкові числа). Наведені в таблиці числа є незалежно нормально розподілені величини з параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$.

0,464	0,137	2,455	-0,323	-0,068	0,296	-0,288	1,298
0,060	-2,256	-0,531	-0,194	0,543	-1,558	0,187	-1,190
1,486	-0,354	-0,634	0,697	0,926	1,375	0,785	-0,963
1,022	-0,472	1,279	3,521	0,571	-1,851	0,194	1,192
1,394	-0,555	0,046	0,321	2,945	1,974	-0,258	0,412
0,906	-0,513	-0,525	0,595	0,881	-0,934	1,579	0,161
1,179	-1,055	0,007	0,769	0,971	0,712	1,090	-0,631
-1,501	-0,488	-0,162	-0,136	1,033	0,203	0,448	0,748
-0,690	0,756	-1,618	-0,345	-0,511	-2,051	-0,457	-0,218
1,372	0,225	0,378	0,761	0,181	-0,736	0,960	-1,530
-0,482	1,678	-0,057	-1,229	-0,486	0,856	-0,491	-1,983
-1,376	-0,150	1,356	-0,561	-0,256	-0,212	0,219	0,779
-1,010	0,598	-0,918	1,598	0,065	0,415	-0,169	0,313
-0,005	-0,899	0,012	-0,725	1,147	-0,121	1,096	0,181
1,393	-1,163	-0,911	1,231	-0,199	-0,246	1,239	-2,574
-1,787	-0,261	1,237	1,046	-0,508	-1,630	-0,146	-0,392
-0,105	-0,357	-1,384	0,360	-0,992	-0,116	-1,698	-2,832
-1,339	1,827	-0,959	0,424	0,969	-1,141	-1,041	0,362
1,041	0,535	0,731	1,377	0,983	-1,330	1,620	-1,040
0,279	-2,056	0,717	-0,873	-1,096	-1,396	1,047	0,089
-1,805	-2,008	-1,633	0,542	0,250	-0,166	0,032	0,079
-1,186	1,180	1,114	0,882	1,265	-0,202	0,151	-0,376
0,658	-1,141	1,151	-1,210	-0,927	0,425	0,290	-0,902
-0,439	0,358	-1,939	0,891	-0,227	0,602	0,873	-0,437
-1,399	-0,230	0,385	-0,649	-0,577	0,237	-0,289	0,513
0,199	0,208	-1,083	-0,219	-0,291	1,221	1,119	0,004
0,159	0,272	-0,313	0,084	-2,828	-0,439	-0,792	-1,275
2,273	0,606	0,606	-0,747	0,247	1,291	0,063	-1,793
0,041	-0,307	0,121	0,790	-0,584	0,541	0,484	-0,986
-1,132	-2,098	0,921	0,145	0,446	-1,661	1,045	-1,363
0,768	0,079	-1,473	0,034	-2,127	0,665	0,084	-0,880
0,375	-1,658	-0,851	0,234	-0,656	0,340	-0,086	-0,158
-0,513	-0,344	0,210	-0,736	1,041	0,008	0,427	-0,831
0,292	-0,521	1,266	-1,206	-0,899	0,110	-0,528	-0,813
1,026	2,990	-0,574	-0,491	-1,114	1,297	-1,433	-1,345

-1,334 1,278 -0,568 -0,109 -0,515 -0,566 2,923 0,500
 -0,287 -0,144 -0,254 0,574 -0,451 -1,181 -1,190 -0,318
 0,161 -0,886 -0,921 -0,509 1,410 -0,518 0,192 -0,432
 -1,346 0,193 -1,202 0,394 -1,045 0,843 0,942 1,045
 1,250 -0,199 -0,288 1,810 1,378 0,584 1,216 0,733

0,630 -0,537 0,782 0,060 0,499 -0,431 1,705 1,164
 0,375 -1,941 0,247 -0,491 0,665 -0,135 -0,145 -0,498
 -1,420 0,489 -1,711 -1,186 0,754 -0,732 -0,066 1,006
 -0,151 -0,243 -0,430 -0,762 0,298 1,049 1,810 2,885
 -0,309 0,531 0,416 -1,541 1,456 2,040 -0,124 0,196

0,424 -0,444 0,593 0,993 -0,106 0,116 0,484 -1,272
 0,593 0,658 -1,127 -1,407 -1,579 -1,616 1,458 1,262
 0,862 -0,885 -0,142 -0,504 0,532 1,381 0,022 -0,281
 0,235 -0,628 -0,023 -0,463 -0,899 -0,394 -0,538 1,707
 -0,853 0,402 0,777 0,833 0,410 -0,349 -1,094 0,580

0,241 -0,957 -1,885 0,371 -2,830 -0,238 -0,627 0,561
 0,022 0,525 -0,255 -0,702 0,953 -0,869 -1,108 -2,357
 -0,853 -1,865 -0,423 -0,432 -0,973 -1,016 -1,726 1,956
 -0,501 -0,273 0,857 -0,465 -1,691 0,417 0,524 -0,281
 0,439 -0,035 -0,260 0,120 -0,558 0,056 -0,573 0,932

0,471 -1,029 -2,015 -0,594 -0,579 0,551 0,359 0,326
 -0,310 0,479 -0,623 -1,047 -0,120 0,418 -0,094 1,114
 0,610 2,709 -0,699 -1,347 0,191 0,074 1,501 1,068
 -0,220 -0,057 0,481 0,996 0,071 0,524 0,031 0,772
 0,738 -0,300 -0,586 -1,023 -3,001 0,479 0,402 0,226

Таблиця 3. (Таблиця значень щільності стандартного нормального розподілу).

$$\varphi_u(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521

0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29658	0,29430	0,29200
0,8	0,28960	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457

Таблиця 4. (Таблиця значень функції нормального розподілу)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0	0	0,47	0,1808	0,94	0,3264	1,41	0,4207	1,88	0,4699	3	0,4987
0,01	0,004	0,48	0,1844	0,95	0,3289	1,42	0,4222	1,9	0,4713	3,2	0,4993
0,02	0,008	0,49	0,1879	0,96	0,3315	1,43	0,4236	1,92	0,4726	3,4	0,4997
0,03	0,012	0,5	0,1915	0,97	0,334	1,44	0,4251	1,94	0,4738	3,6	0,4998
0,04	0,016	0,51	0,195	0,98	0,3365	1,45	0,4265	1,96	0,475	3,8	0,4999
0,05	0,0199	0,52	0,1985	0,99	0,3389	1,46	0,4279	1,98	0,4761	4	0,5
0,06	0,0239	0,53	0,2019	1	0,3413	1,47	0,4292	2	0,4772	∞	0,5
0,07	0,0279	0,54	0,2054	1,01	0,3438	1,48	0,4306	2,02	0,4783		
0,08	0,0319	0,55	0,2088	1,02	0,3461	1,49	0,4319	2,04	0,4793		
0,09	0,0359	0,56	0,2123	1,03	0,3485	1,5	0,4332	2,06	0,4803		
0,1	0,0398	0,57	0,2157	1,04	0,3508	1,51	0,4345	2,08	0,4812		
0,11	0,0438	0,58	0,219	1,05	0,3531	1,52	0,4357	2,1	0,4821		
0,12	0,0478	0,59	0,2224	1,06	0,3554	1,53	0,437	2,12	0,483		
0,13	0,0517	0,6	0,2257	1,07	0,3577	1,54	0,4382	2,14	0,4838		
0,14	0,0557	0,61	0,2291	1,08	0,3599	1,55	0,4394	2,16	0,4846		

0,15	0,0596	0,62	0,2324	1,09	0,3621	1,56	0,4406	2,18	0,4854		
0,16	0,0636	0,63	0,2357	1,1	0,3643	1,57	0,4418	2,2	0,4861		
0,17	0,0675	0,64	0,2389	1,11	0,3665	1,58	0,4429	2,22	0,4868		
0,18	0,0714	0,65	0,2422	1,12	0,3686	1,59	0,4441	2,24	0,4875		
0,19	0,0753	0,66	0,2454	1,13	0,3708	1,6	0,4452	2,26	0,4881		
0,2	0,0793	0,67	0,2486	1,14	0,3729	1,61	0,4463	2,28	0,4887		
0,21	0,0832	0,68	0,2517	1,15	0,3749	1,62	0,4474	2,3	0,4893		
0,22	0,0871	0,69	0,2549	1,16	0,377	1,63	0,4484	2,32	0,4898		
0,23	0,091	0,7	0,258	1,17	0,379	1,64	0,4495	2,34	0,4904		
0,24	0,0948	0,71	0,2611	1,18	0,381	1,65	0,4505	2,36	0,4909		
0,25	0,0987	0,72	0,2642	1,19	0,383	1,66	0,4515	2,38	0,4913		
0,26	0,1026	0,73	0,2673	1,2	0,3849	1,67	0,4525	2,4	0,4918		
0,27	0,1064	0,74	0,2704	1,21	0,3869	1,68	0,4535	2,42	0,4922		
0,28	0,1103	0,75	0,2734	1,22	0,3888	1,69	0,4545	2,44	0,4927		
0,29	0,1141	0,76	0,2764	1,23	0,3907	1,7	0,4554	2,46	0,4931		
0,3	0,1179	0,77	0,2794	1,24	0,3925	1,71	0,4564	2,48	0,4934		
0,31	0,1217	0,78	0,2823	1,25	0,3944	1,72	0,4573	2,5	0,4938		
0,32	0,1255	0,79	0,2852	1,26	0,3962	1,73	0,4582	2,52	0,4941		
0,33	0,1293	0,8	0,2881	1,27	0,398	1,74	0,4591	2,54	0,4945		
0,34	0,1331	0,81	0,291	1,28	0,3997	1,75	0,4599	2,56	0,4948		
0,35	0,1368	0,82	0,2939	1,29	0,4015	1,76	0,4608	2,58	0,4951		
0,36	0,1406	0,83	0,2967	1,3	0,4032	1,77	0,4616	2,6	0,4953		
0,37	0,1443	0,84	0,2995	1,31	0,4049	1,78	0,4625	2,62	0,4956		
0,38	0,148	0,85	0,3023	1,32	0,4066	1,79	0,4633	2,64	0,4959		
0,39	0,1517	0,86	0,3051	1,33	0,4082	1,8	0,4641	2,66	0,4961		
0,4	0,1554	0,87	0,3078	1,34	0,4099	1,81	0,4649	2,68	0,4963		
0,41	0,1591	0,88	0,3106	1,35	0,4115	1,82	0,4656	2,7	0,4965		
0,42	0,1628	0,89	0,3133	1,36	0,4131	1,83	0,4664	2,72	0,4967		
0,43	0,1664	0,9	0,3159	1,37	0,4147	1,84	0,4671	2,74	0,4969		
0,44	0,17	0,91	0,3186	1,38	0,4162	1,85	0,4678	2,76	0,4971		
0,45	0,1736	0,92	0,3212	1,39	0,4177	1,86	0,4686	2,78	0,4973		
0,46	0,1772	0,93	0,3238	1,4	0,4192	1,87	0,4693	2,8	0,4974		

Таблица 5. (Таблица найбільше розповсюджених критичних значень U_δ стандартного нормального розподілу при $\gamma = 1 - 2\delta$, $\alpha = 1 - \gamma$).

γ	0,9999	0,999	0,9973	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8
α	0,0001	0,001	0,0027	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2
δ	0,00005	0,0005	0,0014	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
U_δ	3,89069	3,29056	3	2,5758	2,3263	1,96	1,6449	1,2816

Таблиця 6. (Розподіл Пуассона).

$$P_k(l) = \frac{l^k}{k!} e^{-l}.$$

k	l							
	0,01	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125	0,15	0,175
0	0,9900	0,9753	0,9512	0,9277	0,9048	0,8825	0,8607	0,8395
1	0,0099	0,0244	0,0476	0,0696	0,0905	0,1103	0,1291	0,1469
2		0,0003	0,0045	0,0026	0,0045	0,0069	0,0097	0,0129
3			0,0012	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0007

k	l							
	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55
0	0,8187	0,7788	0,7408	0,7047	0,6703	0,6376	0,6065	0,5769
1	0,1637	0,1947	0,2222	0,2466	0,2681	0,2869	0,3033	0,3173
2	0,0164	0,0243	0,0333	0,0432	0,0536	0,0646	0,0758	0,0873
3	0,0011	0,0020	0,0033	0,0050	0,0072	0,0097	0,0126	0,0160
4	0,0001	0,0001	0,0003	0,0004	0,0007	0,0011	0,0016	0,0022
5					0,0001	0,0001	0,0002	0,0002

k	l							
	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	1,0
0	0,5488	0,5220	0,4966	0,4724	0,4493	0,4274	0,4066	0,3679
1	0,3293	0,3393	0,3476	0,3543	0,3595	0,3633	0,3659	0,3679
2	0,0988	0,1103	0,1217	0,1329	0,1438	0,1544	0,1647	0,1839
3	0,0198	0,0239	0,0284	0,0332	0,0383	0,0437	0,0494	0,0613
4	0,0030	0,0039	0,0050	0,0062	0,0077	0,0093	0,0111	0,0153
5	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0012	0,0016	0,0020	0,0031
6		0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0005
7								0,0001

k	l							
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020
8			0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
9							0,0001	0,0001
11								0,0001

<i>k</i>	<i>l</i>							
	1,9	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,25
0	0,1496	0,1353	0,1108	0,0907	0,0743	0,0608	0,0498	0,0388
1	0,2842	0,2707	0,2438	0,2177	0,1931	0,1703	0,1494	0,1260
2	0,2700	0,2707	0,2681	0,2613	0,2510	0,2384	0,2240	0,2048
3	0,1710	0,1804	0,1966	0,2090	0,2176	0,2225	0,2240	0,2218
4	0,0812	0,0902	0,1082	0,1254	0,1414	0,1557	0,1680	0,1802
5	0,0309	0,0361	0,0476	0,0602	0,0735	0,0872	0,1008	0,1172
6	0,0098	0,0120	0,0174	0,0241	0,0319	0,0407	0,0504	0,0635
7	0,0027	0,0034	0,0055	0,0083	0,0118	0,0163	0,0216	0,0295
8	0,0006	0,0009	0,0015	0,0025	0,0038	0,0057	0,0081	0,0120
9	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0011	0,0018	0,0027	0,0043
10			0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0014
11					0,0001	0,0001	0,0002	0,0004
12							0,0001	0,0001
<i>k</i>	<i>l</i>							
	3,5	3,75	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
0	0,0302	0,0235	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0015
1	0,1057	0,0882	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0098
2	0,1850	0,1654	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0318
3	0,2158	0,2067	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0688
4	0,1888	0,1938	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,1118
5	0,1322	0,1453	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1454
6	0,0771	0,0908	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1575
7	0,0385	0,0487	0,0595	0,0824	0,1045	0,1234	0,1377	0,1462
8	0,0169	0,0228	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1188
9	0,0066	0,0095	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,0858
10	0,0023	0,0036	0,0053	0,0104	0,0000	0,0285	0,0413	0,0558
11	0,0007	0,0012	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0330
12	0,0002	0,0004	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0179
13	0,0001	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0089
14			0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0022	0,0041
15				0,0001	0,0002	0,0004	0,0009	0,0018
16					0,0001	0,0001	0,0003	0,0007
17							0,0001	0,0003
18								0,0001

Таблиця 7. (Квантилі розподілу $\chi^2_{1-\alpha}(n)$ в залежності від числа степенів вільності n та ймовірності α).

$n \backslash \alpha$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95
1	0,00	0,02	0,06	0,15	0,46	1,07	1,64	2,71	3,84
2	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99
3	0,35	0,58	1,01	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82
4	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49
5	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07
6	1,65	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59
7	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07
8	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51
9	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92
10	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31
11	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68
12	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,03
13	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,36
14	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,06	23,69
15	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,31	25,00
16	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,47	23,54	26,29
17	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,62	24,78	27,60
18	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,76	25,59	28,87
19	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,70	23,90	27,20	30,14
20	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,80	25,04	28,41	31,41
21	11,59	13,24	15,44	17,18	20,30	23,90	26,17	29,61	32,67
22	12,34	14,04	16,31	18,10	21,30	24,90	27,30	30,81	33,92
23	13,09	14,85	17,19	19,02	22,30	26,00	28,43	32,01	35,17
24	13,85	15,66	18,06	19,94	23,30	27,10	29,55	33,20	36,42
25	14,61	16,47	18,94	20,90	24,30	28,20	30,78	34,38	37,65
26	15,38	17,29	19,82	21,80	25,30	29,20	31,80	35,56	38,89
27	16,15	18,11	20,70	22,70	26,30	30,30	32,91	36,74	40,11
28	16,93	18,94	21,60	23,60	27,30	31,40	34,03	37,92	41,34
29	17,71	19,77	22,50	24,60	28,30	32,50	35,14	39,09	42,56
30	18,49	20,60	23,40	25,50	29,30	33,50	36,25	40,26	43,77

Таблиця 8. (Квантилі $t_{\frac{\alpha+1}{2}}(n)$ рівня $\frac{\alpha+1}{2}$ розподілу Стюдента)

n\ α	0,2	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,325	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,271	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,265	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,262	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,258	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,256	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,256	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,256	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,256	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,256	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,256	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,254	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
12	0,254	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
0	0,253	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Список використаної літератури.

1. Дубовік В.П., Юрик І.І., Вища математика: Навч. пос.– К.: АСК, 2006– 648с.
2. Мышкис А.Д., Лекции по высшей математике. – СПб.: «Лань», 2007. – 688с.
3. Матросов В.Л., Основы курса высшей математики. – М.: Владос, 2002.– 544с.
4. Черненко В.Д., Высшая математика в примерах и задачах. Т.1-3. – СПб.: Политехника, 2003 – 705с.
5. Запорожец Г.И., Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966 – 464с.
6. Кузнецов Л.А., Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983 – 167с.
7. Чудесенко В.Ф., Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1983 – 113с.
8. Рябушко А.П., Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Т.1-3. – Минск: Выш.школа, 1990 – 271с.
9. Жевержеев В.Ф. и др., Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1970 – 417с.