# Розділ 8. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

## 1. Основні поняття

### 1.1. Поняття функції кількох змінних

Змінну величину $z$ називають *функцією двох змінних* $x$, $y$, якщо кожній парі їх значень $(x;y)$ із даної області площини поставлено у відповідність єдине значення $z$. Позначення: $z = f(x, y)$. Змінні $x$, $y$ називають *аргументами* або *незалежними змінними*.

Аналогічно означуються функції трьох та більшого числа змінних.

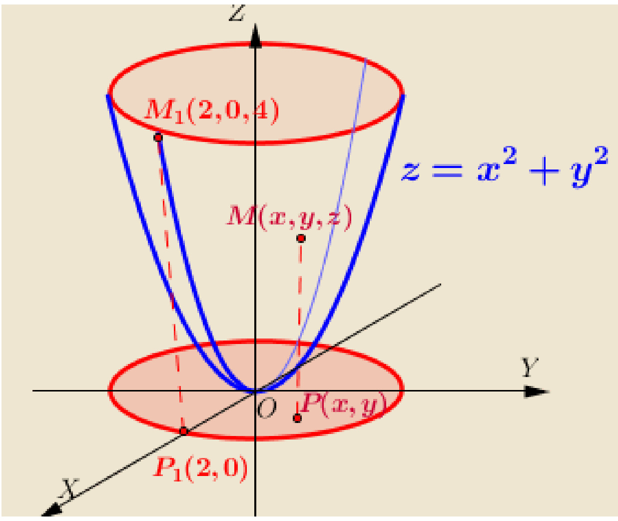
### 1.2. Область визначення функції

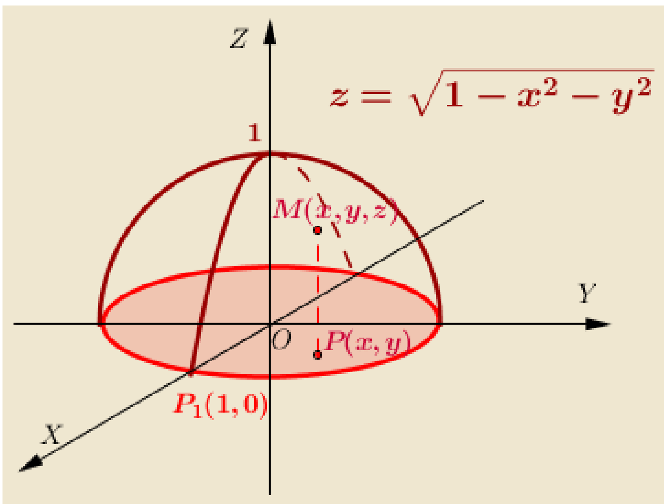
Під *областю визначення* функції $z = f(x, y)$ розуміють сукупність точок $(x;y)$ площини $xOy$, в яких задана функція визначена, тобто набуває певних дійсних значень.

Знайти область визначення функції

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Функція має дійсні значення, якщо $4 - x^2 - y^2 > 0$ або $x^2 + y^2 < 4$. Останню нерівність задовольняють координати точок, що знаходяться всередині кола з центром у початку координат і радіусом 2.



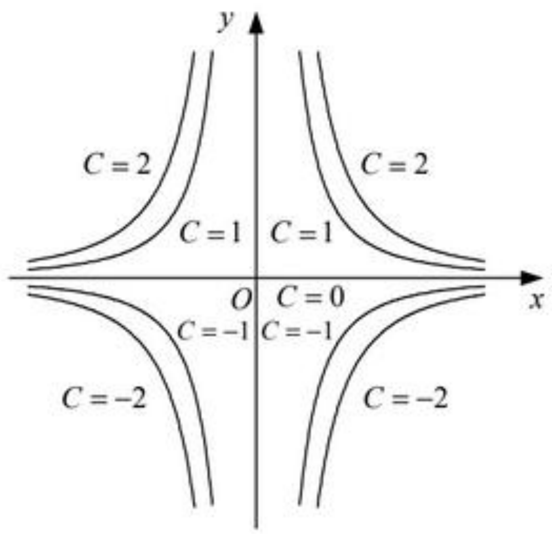
## 1.3. Лінії і поверхні рівня функції

*Лінією рівня* функції $z = f(x, y)$ називається така лінія на площині $xOy$, у точках якої функція набуває сталого значення $z = C$.

*Поверхнею рівня* функції трьох аргументів $u = f(x, y, z)$ називається така поверхня, у точках якої функція набуває сталого значення $u = C$.

Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 y$.

Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2 y = C$ або $y = \dfrac{C}{x^2}$. Покладаючи $C = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, отримаємо сім'ю ліній рівня зображених на рисунку.



## 3. Частинні похідні функції кількох змінних

За означенням *частинна похідна* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ *по змінній* $x$ –

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

*Частинна похідна по змінній* $y$ –

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ використовують також інші позначення – відповідно $z'_x$, $f'_x(x, y)$ та $z'_y$, $f'_y(x, y)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Аналогічно означуються і знаходяться частинні похідні функцій трьох та більшого числа змінних.

Знайти частинні похідні функцій:

$$z = 3x^2 y + x^2 - y^2 + 5.$$

Вважаючи $y$ сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y \cdot \left(x^2\right)'_x + \left(x^2\right)'_x - \left(y^2\right)'_x + (5)'_x = 3y \cdot 2x + 2x - 0 + 0 = 6xy + 2x.$$

Вважаючи $x$ сталою, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot (y)'_y + \left(x^2\right)'_y - \left(y^2\right)'_y + (5)'_y = 3x^2 \cdot 1 + 0 - 2y + 0 =$$

$$= 3x^2 - 2y.$$

## 4. Повний диференціал функції

### 4.1. Повний приріст та повний диференціал функції

*Повним приростом* функції $z = f(x, y)$ називається різниця

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

*Повним диференціалом* функції $z = f(x, y)$ називається та частина повного приросту $\Delta z$, що є лінійною відносно приростів аргументів $\Delta x$ і $\Delta y$

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Аналогічно, повний диференціал функції $u = f(x, y, z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz .$$

Приклад. Знайти повний диференціал функції

$$z = x^3 + y^3 - 3xy .$$

Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)_x' = 3x^2 - 3y ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)_y' = 3y^2 - 3x .$$

Отримаємо $dz = 3\left(x^2 - y\right)dx + 3\left(y^2 - x\right)dy$ – повний диференціал заданої функції.

## 6. Частинні похідні вищих порядків

*Частинними похідними другого порядку* функції $z = f(x, y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Для похідних другого порядку використовують позначення

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f''_{yx}(x,\ y)\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,\ y)\ .$$

Аналогічно означуються і позначаються частинні похідні порядку вище другого.

Якщо частинні похідні, що обчислюються, неперервні, то результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\ .$$

Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

$$z=x^3y^4+2x^2-y^3+1\ .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_x{}'=\left(x^3y^4+2x^2-y^3+1\right)_x'=3x^2y^4+4x\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z_y{}'=\left(x^3y^4+2x^2-y^3+1\right)_y'=4x^3y^3-3y^2\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(3x^2y^4+4x\right)_x'=6xy^4+4\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(4x^3y^3-3y^2\right)_y'=12x^3y^2-6y\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(3x^2y^4+4x\right)_y'=12x^2y^3\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(4x^3y^3-3y^2\right)_x'=12x^2y^3\ .$$

## 7. Диференціювання неявних функцій

### 7.1. Випадок однієї незалежної змінної

Якщо рівняння $f(x, y)=0$, де $f(x, y)$ – диференційовна функція змінних $x$ і $y$, визначає $y$ як функцію від $x$ (див. підрозділ 4 розділу 5), то похідна цієї неявно заданої функції (за умови $f_y'(x, y) \neq 0$) знаходиться за формулою

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}. \qquad (5)$$

Похідні вищих порядків знаходяться послідовним диференціюванням цієї рівності.

Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо

$$\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(x^2+y^2\right)+1=0.$$

Позначимо ліву частину даного рівняння через $f(x, y)$ і знайдемо частинні похідні $f_x'(x, y)$ і $f_y'(x, y)$:

$$f(x, y)=\left(x^2+y^2\right)^3-3\left(x^2+y^2\right)+1;$$

$$f_x'(x, y)=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2x-3\cdot 2x=6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right],$$

$$f_y'(x, y)=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2y-3\cdot 2y=6y\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right].$$

Підставляючи знайдені частинні похідні у формулу (5) отримаємо:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}=-\frac{6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2-1\right]}{6y\left[\left(x^2+y^2\right)-1\right]}=-\frac{x}{y}.$$

## 7. Диференціювання неявних функцій

### 7.2. Випадок кількох незалежних змінних

Функцію двох змінних $z=z(x,y)$ називають *неявною* функцією, що визначається рівнянням $F(x, y, z)=0$, якщо вона неперервна і перетворює це рівняння у тотожність $F(x, y, z(x,y))\equiv 0$.

Якщо рівняння $F(x, y, z)=0$, де $F(x, y, z)$ – диференційовна функція змінних $x, y$ і $z$, визначає $z$ як функцію незалежних змінних $x$ і $y$ і $F_z'(x, y, z)\neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \tag{6}$$

де $z=z(x,y)$.

***Приклад*** Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7=0$

$\ulcorner$ Позначимо $F(x, y, z)=x^3y-2y^2+3z^2-y\cos z+7$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x, y, z)=3x^2y$,

$F_y'(x, y, z)=x^3-4y-\cos z$,

$F_z'(x, y, z)=6z+y\sin z$.

За формулами $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2y}{6z+y\sin z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^3-4y-\cos z}{6z+y\sin z}. \lrcorner$$

1. Скалярне поле.

Нехай у просторі 0xyz є область D, в якій задана функція u = u(x, y, z). У такому випадку говорять, що в області D задане скалярне поле.

Якщо кожній точці M простору ставиться у відповідність скалярна величина u, то виникає скалярне поле u(M). Фізичними прикладами скалярних полів є поле густини зарядів на поверхні, потенціал силового поля.

## 2. Похідна за напрямом.

Розглянемо в області Д функцію u = u(x, y, z). Нехай лінія (L) виходить з точки M за напрямом вектора $\bar{l}$ (рис. 38). Тоді похідною від функції u за напрямом $\bar{l}$ називається швидкість зміни поля в даному напрямку, віднесена до одиниці довжини:

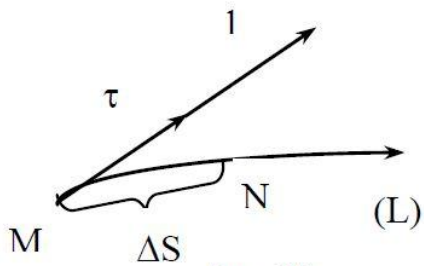


Рис. 38

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{u(N) - u(M)}{\Delta S}$$

Якщо функція u = u(x, y, z) диференційовна, то похідна за напрямом вектора $\bar{l}$ обчислюється формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Якщо функція $z$ диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

де $\alpha$ – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю $Ox$.

Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(3;1)$ у напрямі від цієї точки до точки $N(6;5)$.

⌐ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці $P$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3\cdot3^2 - 6\cdot3\cdot1 + 3\cdot1^2 = 12;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3\cdot3^2 + 6\cdot3\cdot1 = -9.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{e} = \overrightarrow{PN}$: $\vec{e} = \{6-3;\ 5-1\} = \{3;\ 4\}$.

Знайдемо координати орта $\vec{e}_0$ вектора $\vec{e}$ за формулою $\vec{e}_0 = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}$:

$$|\vec{e}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5, \quad \vec{e}_0 = \left\{\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right\}.$$

Звідси $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

За формулою (7) $\frac{\partial z}{\partial e} = 12\cdot\frac{3}{5} + (-9)\cdot\frac{4}{5} = 0$. ⌟

## 8.2. Градієнт функції

*Градієнтом* функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Похідна даної функції за напрямом $\vec{e}$ пов'язана з градієнтом функції формулою

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \mathrm{пр}_{\vec{e}}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z.$$

Градієнт функції у точці співпадає з напрямом нормалі до відповідної лінії рівня функції.

Напрям вектора градієнта функції у заданій точці є напрямом найбільшої швидкості зміни функції у цій точці.

Аналогічно визначається градієнт функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Градієнт функції трьох змінних у точці співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня, що проходить через цю точку.

Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1; 1)$.

⌐ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці $P$:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1$.

Отже, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$. ⌟

## 10. Екстремуми функції двох змінних

### 10.1. Локальний екстремум функції

Функція $f(x, y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) $f(a, b)$ у точці $P(a; b)$, якщо для всіх відмінних від $P$ точок $P'(x; y)$ у деякому околі точки $P$ виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*. Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

*Необхідна умова екстремуму.* Точки, в яких диференційовна функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Розв'язки системи (13) називають *стаціонарними точками*.

У загальному випадку в точці екстремуму $P(a; b)$ функції $f(x, y)$ або виконуються умови (13), або принаймні одна з похідних $f'_x$, $f'_y$ не існує.

*Достатня умова екстремуму.* У стаціонарній точці $P(a; b)$ знаходимо

$$A = f''_x(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b), \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a; b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a; b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

$\boxed{\text{Дослідити на екстремум функцію } z = x^3 + y^3 - 3xy.}$

Знаходимо частинні похідні:

$z'_x = 3x^2 - 3y; \quad z'_y = 3y^2 - 3x; \quad z''_{xx} = 6x; \quad z''_{yy} = 6y; \quad z''_{xy} = -3$

Користуючись необхідними умовами екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3 - 1 = 0, \\ y = x^2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Маємо дві стаціонарні точки: $M_1(0;\ 0)$, $M_2(1;\ 1)$.

Для точки $M_1(0;\ 0)$

$$\Delta = f''_{xx}(0,0) f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = 0 - (-3)^2 = -9 < 0;$$

Отже, згідно з умовою 2) теореми 2, в точці $M_1(0;\ 0)$ екстремуму немає.

Для точки $M_2(1;\ 1)$

$$\Delta = f''_{xx}(1,1) f''_{yy}(1,1) - (f''_{xy}(1,1))^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0 \quad \text{і}$$

$$f''_{xx}(1,1) = 6 > 0.$$

Отже, згідно з умовою 3), в точці $M_2(1;\ 1)$ функція досягає мінімуму, причому $z_{min} = f(1;\ 1) = -1$.

## 10.3. Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

Приклад, Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.
Дана область D – прямокутник (рис. 39).

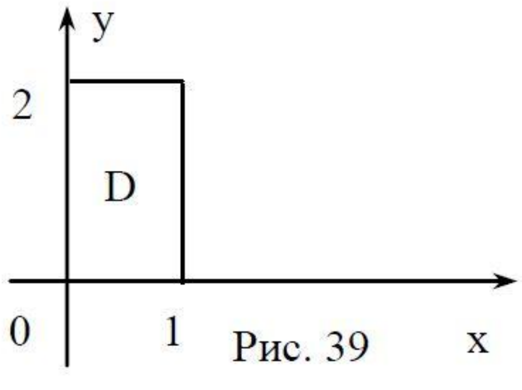



Рис. 39

1) Знайдемо стаціонарні точки. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 2y - 4 = 0, \\ z'_y = 2x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Маємо стаціонарну точку $M_0$ (-4; 6), $M_0 \notin D$.

2) Знайдемо найбільше і найменше значення функції на границі області D:

а) при $y=0$ маємо $z=x^2-4x$, $0 \le x \le 1$. Досліджуємо на екстремум функцію однієї змінної і обчислюємо її значення на кінцях відрізка [0,1]

$z'(x) = 2x - 4$, $z' = 0$ при $x = 2 \notin [0; 1]$,

$z(0) = 0$, $z(1) = -3$.

Отже, $\underline{z(0, 0) = 0}$, $\underline{z(1, 0) = -3}$;

б) при $x = 1$ маємо $z = 1^2 + 2y - 4 + 8y = 10y - 3$, $0 \le y \le 2$. Функція монотонно зростає і на кінцях відрізка [0; 2] набуває значення

$z(0) = -3$, $z(2) = 17$.

Врахуємо, що $\underline{z(1, 2) = 17}$.

в) при $y = 2$ маємо $z = x^2 + 4x - 4x + 16$, $0 \le x \le 1$. Знайдемо значення цієї функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізка [0; 1]:

$z' = 2x$, $z' = 0$ при $x = 0$, $z(0) = 16$, $z(1) = 17$.

Отримали $\underline{z(0, 2) = 16}$.

г) при $x = 0$ маємо $z = 8y$, $0 \le y \le 2$. Функція монотонно зростає і на кінцях відрізка [0; 2] набуває значення $z(0) = 0$, $z(2) = 16$.

3) Порівнюючи отримані значення функції, знаходимо, що

$z_{найб.} = z(1, 2) = 17$, $z_{найм.} = z(1, 0) = -3$.