

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 1

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Державного університету
«Житомирська політехніка»
12 вересня 2024 р., протокол № 05

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «Будівельна механіка»

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр»
спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
освітньо-професійна програма «Промислове та цивільне будівництво»
факультет гірничої справи, природокористування та будівництва
кафедра гірничих технологій та будівництва ім. проф. Бакка М.Т.

Рекомендовано на засіданні кафедри
гірничих технологій та будівництва
ім. проф. Бакка М.Т.
27 серпня 2024 р., протокол № 08

Розробники:

асистент кафедри гірничих технологій та будівництва
ім. проф. Бакка М.Т. ПІСКУН Ігор
к.т.н., доц. кафедри гірничих технологій та будівництва
ім. проф. Бакка М.Т. БАЙДА Денис
к.т.н., доц. кафедри гірничих технологій та будівництва
ім. проф. Бакка М.Т. ПРИПОТЕНЬ Юлія

Житомир
2024

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 2

УДК 624.01

Методичні рекомендації для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «Будівельна механіка» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітньо-професійна програма «Промислове та цивільне будівництво».

Укладачі – асистент ПІСКУН Ігор, к.т.н., к.т.н., доц. БАЙДА Денис, к.т.н., доц. ПРИПОТЕНЬ Юлія – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка», 2024. – 63 с.

Рецензенти:

д.геол.н., проф. кафедри гірничих технологій та будівництва ім. проф. Бакка М.Т. ПІДВИСОЦЬКИЙ Віктор
к.т.н., доц. кафедри маркшейдерії КОТЕНКО Володимир

Відповідальний за випуск: завідувач кафедрою гірничих технологій та будівництва ім. проф. Бакка М.Т. – к.т.н. БАШИНСЬКИЙ Сергій

Методичні рекомендації розроблені для здобувачів вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітнього ступеня «бакалавр» денної та заочної форм навчання і містять детальні вказівки для проведення практичних занять з навчальної дисципліни «Будівельна механіка».

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 3

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ЗМІСТ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ	5
Тема 1. Розрахунок однопрольотних статично визначених балок.....	5
Теоретичні відомості.....	5
Приклад розв’язання задач	6
Питання для самоперевірки.....	18
Тема 2. Кінематичний аналіз конструктивних систем	20
Теоретичні відомості.....	20
Приклад розв’язання задач	23
Питання для самоперевірки.....	24
Тема 3. Розрахунок багатопрольотних статично визначених балок.....	26
Теоретичні відомості.....	26
Приклад розв’язання задач	27
Питання для самоперевірки.....	36
Тема 4. Розрахунок плоских рам	38
Теоретичні відомості.....	38
Приклад розв’язування задач	38
Питання для самоперевірки.....	48
Тема 5. Розрахунок трьохшарнірної арки.....	50
Теоретичні відомості.....	50
Приклад розв’язування задач	51
Питання для самоперевірки.....	56
Тема 6. Розрахунок зусиль у фермі	57
Теоретичні відомості.....	57
Приклад розв’язання задач	57
Питання для самоперевірки.....	62
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	63
ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ.....	63

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 4

ВСТУП

Будівельна механіка є однією з основних дисциплін у підготовці фахівців у галузі будівництва та цивільної інженерії. Вона формує у студентів здатність до аналізу конструктивних елементів, розрахунку внутрішніх зусиль, а також до розробки стійких і економічно ефективних конструкцій. Це особливо важливо в умовах зростаючих вимог до безпеки та довговічності сучасних споруд.

Дані методичні рекомендації розроблені з метою допомогти студентам у практичному засвоєнні основ будівельної механіки, використовуючи приклади реальних конструкцій і стандартних розрахункових схем. Вивчення дисципліни спрямоване на розвиток інженерного мислення, вміння критично аналізувати конструктивні рішення та застосовувати сучасні методи розрахунків.

Практичні заняття охоплюють основні теми, такі як аналіз статично визначених і невизначених систем, розрахунок балок, рам, арок і ферм, а також вивчення кінематичних властивостей конструктивних систем. Особливий акцент зроблено на застосуванні методів статички, побудові епюр внутрішніх зусиль і оцінці поведінки конструкцій під дією навантажень.

У підготовці матеріалів враховано сучасні вимоги до підготовки фахівців спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія». Методичні рекомендації передбачають поступове ускладнення завдань, що дозволяє студентам послідовно розвивати свої навички розрахунків та аналізу конструкцій.

Результатом роботи студентів має стати ґрунтовне розуміння принципів функціонування будівельних конструкцій, а також здатність застосовувати ці знання на практиці для розробки ефективних інженерних рішень.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 5

ЗМІСТ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1. Розрахунок однопрольотних статично визначених балок

Мета роботи. Освоєння методів побудови епюр внутрішніх силових факторів (згинаючих моментів і поперечних сил) для однопрольотних балок, що включає кінематичний аналіз, визначення опорних реакцій та побудову графіків розподілу сил у балці.

Теоретичні відомості

Графіки, що показують зміну внутрішніх зусиль і моментів в перерізах по довжині балки від заданого нерухомого навантаження, називаються епюрами зусиль і моментів. Епюри дають картину розподілення внутрішніх силових факторів по довжині балки.

Послідовність побудови епюр внутрішніх силових факторів в статично визначених системах:

- проводиться кінематичний і структурний аналіз споруди;
- визначаються опорні реакції;
- розраховуються згинаючі моменти в необхідних для побудови епюри перерізах, будується епюра M ;
- визначаються поперечні сили в характерних перерізах, будується епюра Q ;
- проводиться статична перевірка правильності побудови епюр.

Для складання рівнянь статички відносно довільно обраної точки на площині використовують правило знаків:

- 1) якщо момент сили намагається повернути тіло за ходом годинникової стрілки, то цей момент вважається додатнім, якщо проти ходу годинникової стрілки – від’ємний;
- 2) поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути тіло за годинниковою стрілкою, від’ємною, якщо проти;
- 3) поздовжня сила додатна, якщо розтягує елемент, і від’ємна, якщо стискає його.

Під час побудови епюр слід пам’ятати, що епюри згинаючих моментів завжди будуються на розтягнутих волокнах. Під час розрахунку лінійно деформованих систем на дію рухомого навантаження застосовується метод ліній впливу.

Лінією впливу називається графік залежності деякого фактору (реакції опори, згинаючого моменту і т.д.) від положення на споруді одиничної сили постійного напрямку.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 6

Приклад розв'язання задач

Задача 1. Для однопрольотної балки, зображеної на рис. 1.1, побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів, якщо задано: довжини ділянок балки $a = 3$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 4$ м, реактивний момент $M = 7$ кНм, зосереджена сила $F = 8$ кН, розподілена сила $q = 3$ кН/м.

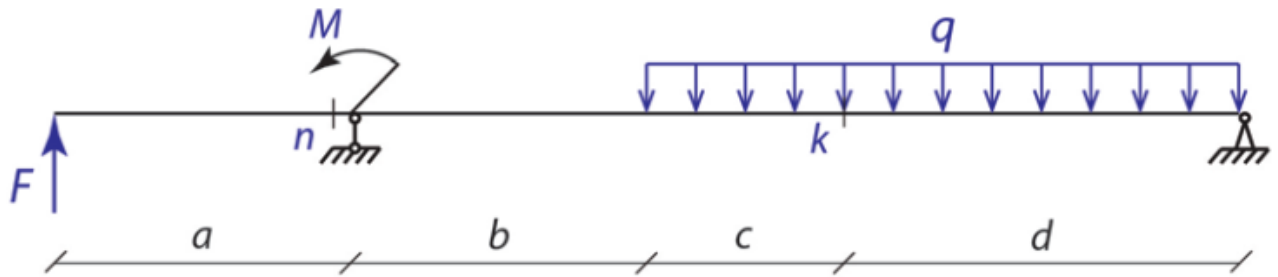


Рис. 1.1. Схема однопрольотної балки

1.1. Проведення кінематичного аналізу.

Визначаємо ступінь свободи за формулою:

$$W = 3D - 2E - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0$$

де $D = 1$ – кількість дисків в рамі;

$E = 0$ – кількість шарнірів;

$C_0 = 3$ – кількість опорних стержнів.

Отже, балка статично визначена.

1.2. Розрахунок реакції опор. Для цього будемо розрахункову схему, обираємо напрямки координатних осей (рис.1.2). Напрямки реакцій опор обираємо довільно.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 7

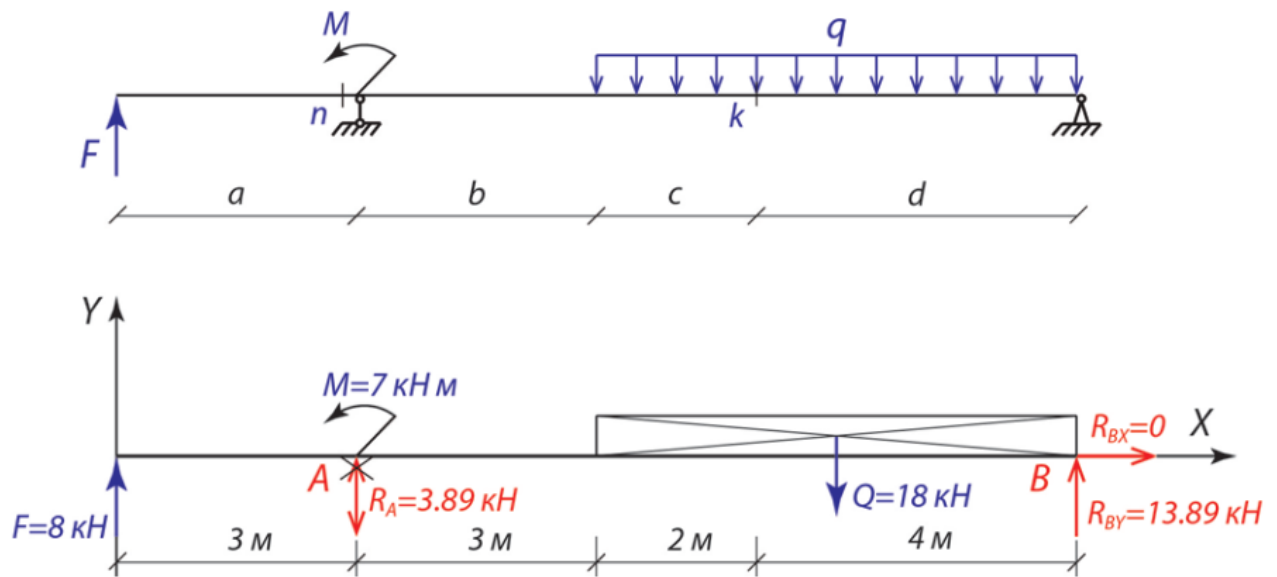


Рис. 1.2. Розрахункова схема однопрольотної балки

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої системи. Рівняння рівноваги складаються таким чином, щоб з кожного рівняння визначалася одна складова:

$$\sum F_X = 0; R_{Bx} = 0$$

$$\sum M_A = 0; F \cdot 3 - M + q \cdot 6 \cdot 6 - R_{By} \cdot 9 = 0$$

звідки

$$R_{By} = \frac{F \cdot 3 - M + q \cdot 6 \cdot 6}{9} = \frac{8 \cdot 3 - 7 + 3 \cdot 6 \cdot 6}{9} = 13,89, \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; F \cdot 12 + R_A \cdot 9 - M - q \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

звідки

$$R_A = \frac{-F \cdot 12 + M + q \cdot 6 \cdot 3}{9} = \frac{-8 \cdot 12 + 7 + 3 \cdot 6 \cdot 3}{9} = -3,89, \text{ кН}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 8

Для перевірки правильності визначення реакцій опор, знайдемо суму проєкцій сил на вісь Y:

$$\sum F_y = 0; F + R_A - q \cdot 6 + R_B = 8 - 3,89 - 3 \cdot 6 + 13,89 = 0; 0 = 0$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Оскільки в результаті розрахунку реакція опори А має від'ємне значення, то напрямок R_A треба змінити на протилежний.

1.3. Побудова епюри згинаючих моментів і поперечних сил.

Балку ділимо на характерні ділянки, початок новій ділянці дає:

- 1) кожна зміна закону розподілення навантаження;
- 2) кожна зміна закону розподілення площі поперечного перерізу;
- 3) злом.

В даному випадку балка має чотири ділянки. Методом перерізів визначаємо в межах кожної ділянки закони розподілення поперечних сил Q і згинаючих моментів M і будуємо епюри поперечних сил і згинаючих моментів (рис. 1.3).

Ділянка I

Довільно проводимо переріз I-I. Відкидаємо праву частину балки. При розрахунках доцільно залишати ту частину балки, відносно якої зручніше вести розрахунок. Записуємо рівняння для згинаючих моментів і поперечних сил, застосовуючи правило знаків.

З умов рівноваги лівої частини балки запишемо рівняння для M_1 і Q_1 :

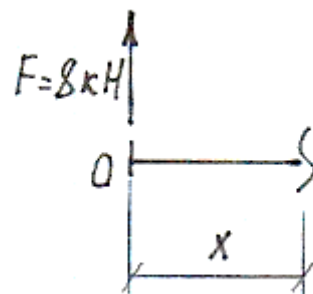
$$0 \leq x \leq 3$$

$$M_1 = F \cdot x$$

$$M(0) = 0$$

$$M(3) = 8 \cdot 3 = 24, \text{кНм}$$

$$Q_1 = F = 8, \text{кН}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 9

Ділянка II

Розглянемо рівновагу лівої частини балки відносно перерізу II-II, запишемо рівняння для M_2 і Q_2 :

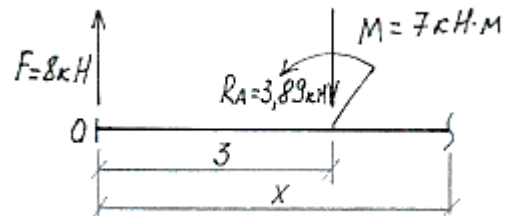
$$3 \leq x \leq 6$$

$$M_2 = Fx - M - R_A(x - 3)$$

$$M(3) = 8 \cdot 3 - 7 = 17, \text{кНм}$$

$$M(6) = 8 \cdot 6 - 7 - 3,89 \cdot 3 = 29, \text{кНм}$$

$$Q_2 = F - R_A = 8 - 3,89 = 4,11, \text{кН}$$



Ділянка III

Розглянемо рівновагу лівої частини балки відносно перерізу III-III, запишемо рівняння для M_3 і Q_3 :

$$6 \leq x \leq 8$$

$$M_3 = Fx - M - R_A(x - 3) - q \frac{(x - 6)^2}{2}$$

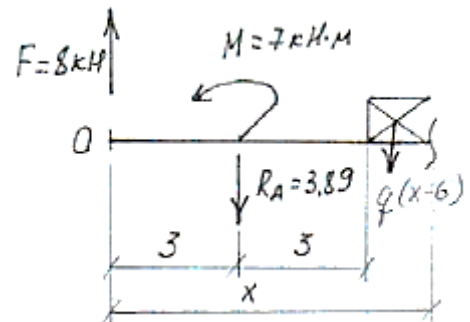
$$M(6) = 8 \cdot 6 - 7 - 3,89 \cdot 3 = 29,33, \text{кНм}$$

$$M(8) = 8 \cdot 8 - 7 - 3,89 \cdot 5 - 3 \frac{2^2}{2} = 31,55, \text{кНм}$$

$$Q_3 = F - R_A - q(x - 6)$$

$$Q(6) = 8 - 3,89 = 4,11, \text{кН}$$

$$Q(8) = 8 - 3,89 - 3 \cdot 2 = -1,89, \text{кН}$$



Епюра поперечних сил на ділянці III-III перетинає вісь. В цьому перерізі момент набуває екстремального значення. Необхідно визначити ординату епюри згинаючого моменту в цьому перерізі. Для цього рівняння поперечної сили на цій ділянці прирівнюємо до 0 і знаходимо координату x :

$$Q_3 = F - R_A - q(x - 6) = 0$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 10

$$x = \frac{F - R_A}{q} + 6 = \frac{8 - 3,89}{3} + 6 = 7,37, \text{ м}$$

Підставляємо значення x в рівняння M_3 і отримуємо максимальне значення згинаючого моменту:

$$M(x) = 8 \cdot 7,37 - 7 - 3,89 \cdot 4,37 - 3 \cdot \frac{1,37^2}{2} = 32,14, \text{ кНм}$$

Ділянка IV

Розглянемо рівновагу правої частини балки відносно перерізу IV-IV, запишемо рівняння для M_4 і Q_4 (для правої частини балки знаки змінюються на протилежні):

$$0 \leq x \leq 4$$

$$M_4 = -\frac{qx^2}{2} + R_{By} \cdot x$$

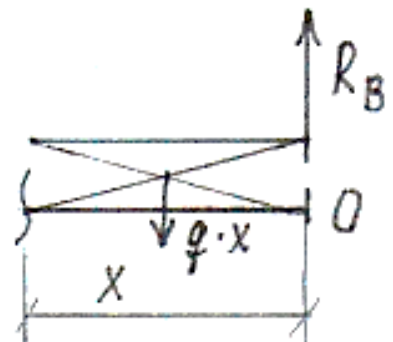
$$M(0) = 0$$

$$M(4) = -\frac{3 \cdot 4^2}{2} + 13,89 \cdot 4 = 31,56, \text{ кНм}$$

$$Q_4 = qx - R_{By}$$

$$Q(0) = -13,89, \text{ кН}$$

$$Q(4) = 3 \cdot 4 - 13,89 = -1,89, \text{ кН}$$



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 11

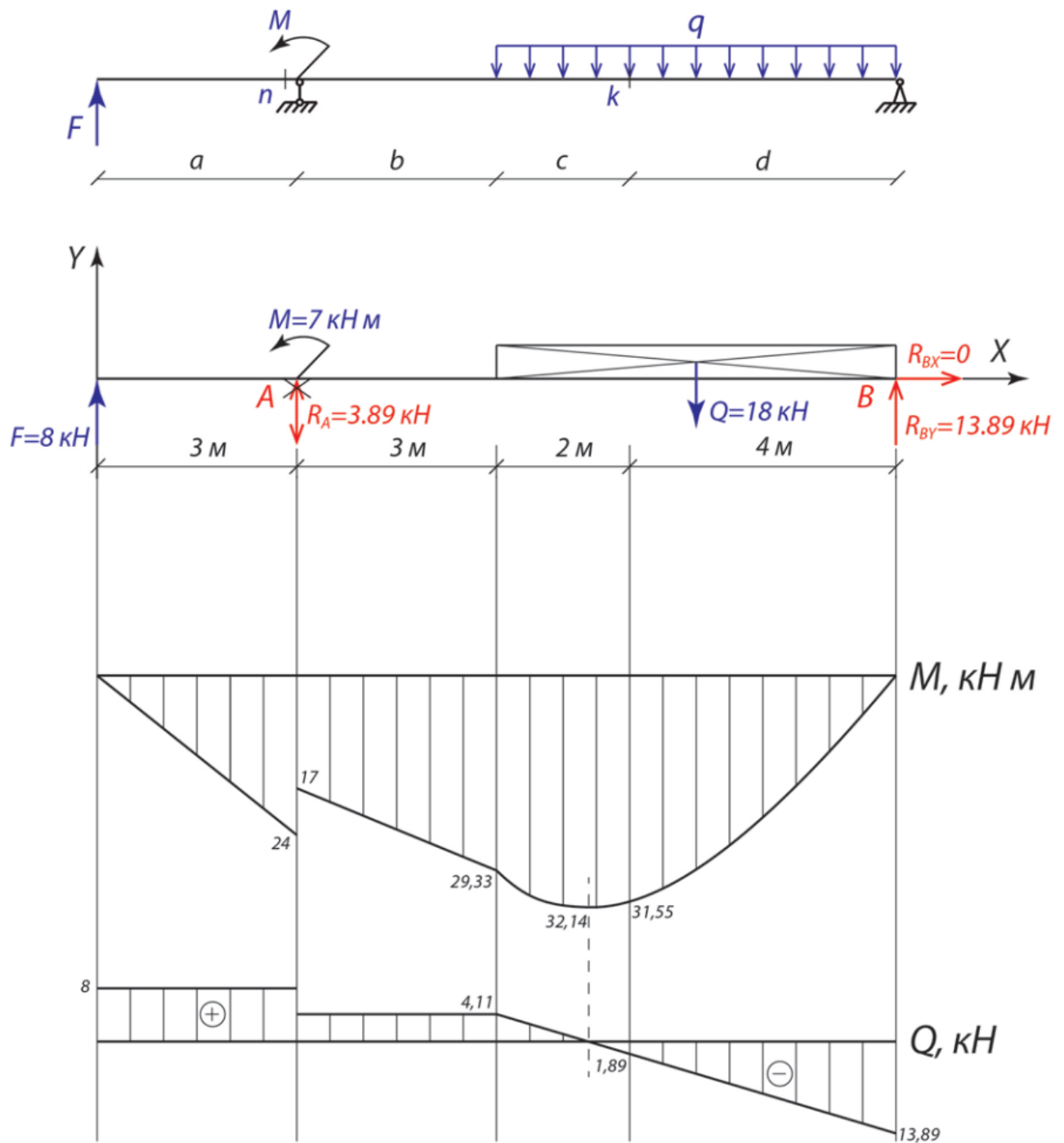


Рис. 1.3. Епюри згинаючого моменту і поперечної сили для однопрольотної балки

Проведемо аналіз окреслення епюр.

Епюра згинаючих моментів:

- між зосередженими силами епюра M обмежена прямою (ділянка С-А);
- на ділянках балки з рівномірно розподіленим навантаженням епюра M обмежена параболою другого ступеню (ділянка D-B);

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 12

- при розподіленому навантаженні епюра M спрямована опуклістю в той бік, в який спрямоване це навантаження (ділянка D-B);
- точці прикладання зосереджених сил, що перпендикулярні до осі балки, відповідають переломи в епюрі M ;
- під зосередженим моментом спостерігається скачок на величину моменту (т. А – скачок на величину $M = 7 \text{ кНм}$) (рис. 1.4);
- в перерізі, де епюра Q перетинає вісь балки, згинаючий момент приймає екстремальне значення ($M = 32,14 \text{ кНм}$) (рис. 1.4).

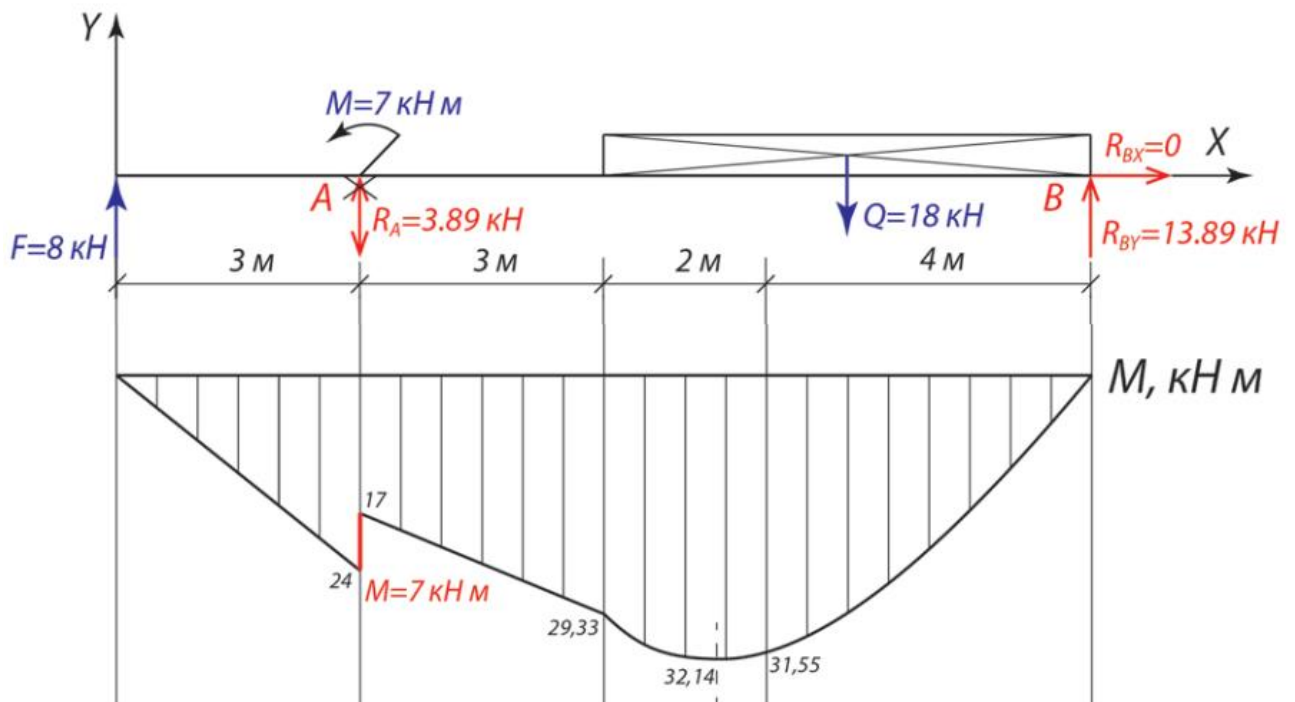


Рис. 1.4. Епюра згинаючих моментів

Епюра поперечних сил:

- між зосередженими силами епюра Q обмежена прямою горизонтальною лінією (ділянка C-A);
- на ділянках балки з рівномірно розподіленим навантаженням епюра Q обмежена похилою прямою;
- точкам прикладання зосереджених сил, що перпендикулярні до осі балки, відповідають скачки в епюрі Q ; коли сила спрямована вниз, то і скачок в епюрі Q при переміщенні зліва направо повинен бути вниз; коли сила спрямована вгору, то і скачок повинен бути вгору; величина скачка дорівнює величині сили (т. С – $F = 8 \text{ кН}$ (спрямована вгору) – скачок на епюрі (+8); т. А – $R_A = 3,89 \text{ кН}$ (спрямована вниз) – скачок в епюрі (-3,89) і т.д.) (рис. 1.5).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 13

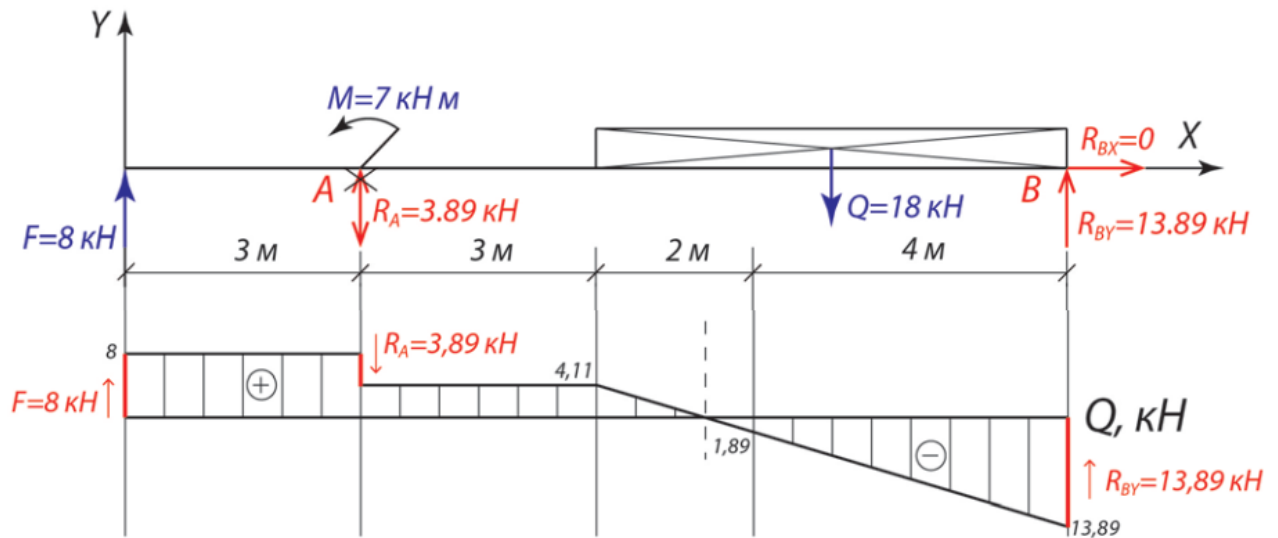


Рис. 1.5. Епюра поперечних сил

Задача 2. Побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізах n і k .

Для побудови ліній впливу згинаючого моменту і поперечних сил застосовуємо статичний метод (метод перерізів).

Побудуємо лінію впливу згинаючого моменту для перерізу k , що знаходиться на відстані $a = 5$ м від лівої опори і $b = 4$ м – від правої, довжина прольоту $l = 9$ м. Якщо вантаж $P = 1$ знаходиться лівіше перерізу k , тобто $0 \leq x \leq 5$, розглянемо рівновагу менш навантаженої (правої) частини балки, момент в перерізі k буде дорівнювати:

$$M_k = R_B \cdot b = \frac{x}{l} \cdot b$$

$$M_k(0) = 0$$

$$M_k(5) = \frac{5}{9} \cdot 4 = 2,22$$

Якщо вантаж $P = 1$ знаходиться правіше перерізу k , тобто $5 \leq x \leq 9$, розглянемо рівновагу лівої частини балки, момент в перерізі k буде дорівнювати:

$$M_k = R_A \cdot a = \frac{l - x}{l} \cdot a$$

$$M_k(5) = \frac{9 - 5}{9} \cdot 5 = 2,22$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 14

$$M_k(9) = \frac{9 - 9}{9} \cdot 4 = 0$$

За отриманими даними наносимо лінію впливу згинаючого моменту для перерізу k на графік (рис. 1.6). Побудуємо лінію впливу поперечних сил для перерізу k. Якщо вантаж $P = 1$ знаходиться лівіше перерізу k, тобто $0 \leq x \leq 5$, розглянемо праву частину балки, поперечна сила в перерізі k буде дорівнювати:

$$Q_k = -R_B = -\frac{x}{l}$$

$$Q_k(0) = 0$$

$$Q_k(5) = -\frac{5}{9} = -0,55$$

Якщо вантаж $P = 1$ знаходиться правіше перерізу k, тобто $5 \leq x \leq 9$, розглянемо ліву частину балки, момент в перерізі k буде дорівнювати:

$$Q_k = R_A = \frac{l - x}{l}$$

$$Q_k(5) = \frac{9 - 5}{9} = 0,45$$

$$Q_k(9) = \frac{9 - 9}{9} = 0$$

Наносимо лінію впливу поперечних сил для перерізу k на графік (рис. 1.6). Побудову лінії впливу згинаючого моменту і поперечних сил для перерізу n здійснюємо аналогічно:

Вантаж $P = 1$ знаходиться зліва, $M_n = -P_c = -1 \cdot 3 = -3$.

Вантаж $P = 1$ знаходиться справа, $M_n = 0$.

Вантаж $P = 1$ знаходиться зліва, $Q_n = -P = -1$.

Вантаж $P = 1$ знаходиться зправа, $Q_n = 0$.

Наносимо лінії впливу згинаючого моменту і поперечних сил для перерізу n на графік (рис. 1.6).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 15

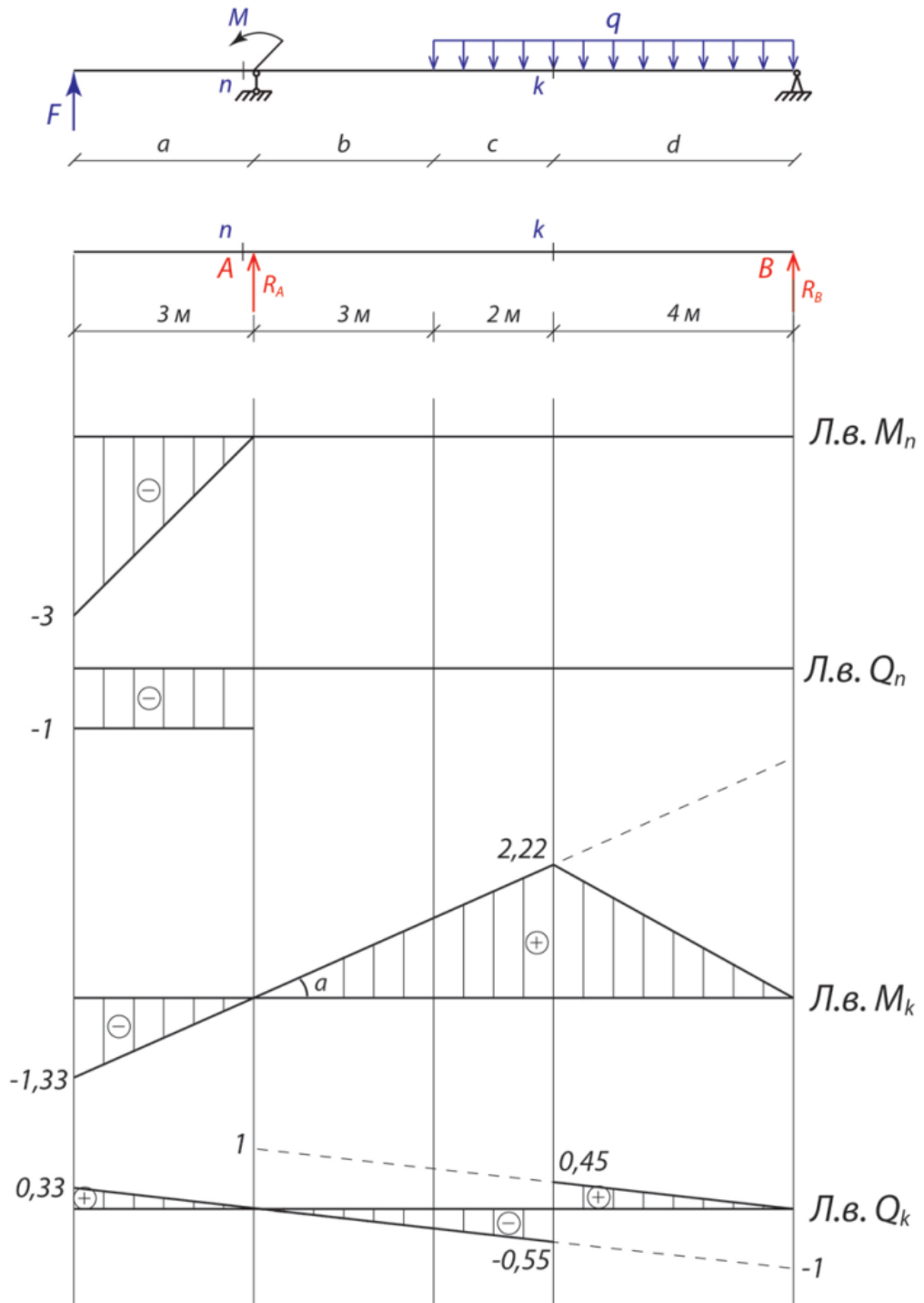


Рис. 1.6. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізів n і k

Задача 3. Визначити зусилля в перерізах n і k по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти їх з зусиллями на епюрах.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 16

Визначаємо внутрішні зусилля S (згинаючого моменту та поперечних сил) в перерізах n і k за формулою:

$$S = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha$$

де F – зосереджена сила («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору);

h – ордината лінії впливу під силою;

q – інтенсивність розподіленого навантаження («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору);

ω – площа лінії впливу під навантаженням;

M – зосереджений момент («+» – спрямований за годинниковою стрілкою, «-» – спрямований проти годинникової стрілки);

α – ухил лінії впливу в місці прикладання M .

Визначаємо згинаючий момент і поперечну силу в перерізі n :

$$M_n = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha = -8 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 24, \text{ кН}$$

$$Q_n = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha = -8 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 8, \text{ кН}$$

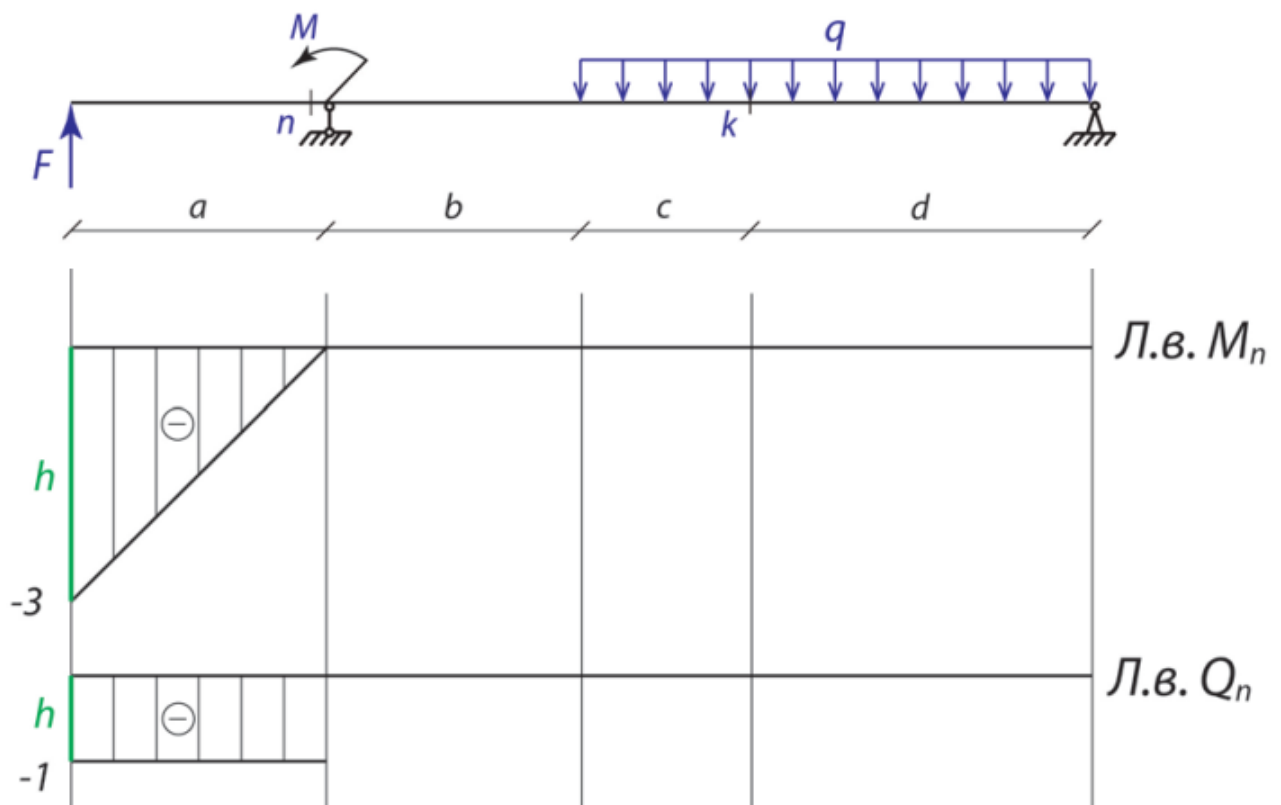


Рис. 1.7. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізу n

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 17

Визначаємо згинаючий момент і поперечну силу в перерізі k:

$$M_n = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = -8 \cdot (-1,33) + 3 \cdot 8 - 7 \cdot \frac{1,33}{3} = 31,55, \text{кН}$$

$$Q_n = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = -8 \cdot 0,33 + 3 \cdot 0 - 7 \cdot \left(-\frac{0,55}{5}\right) = -1,89, \text{кН}$$

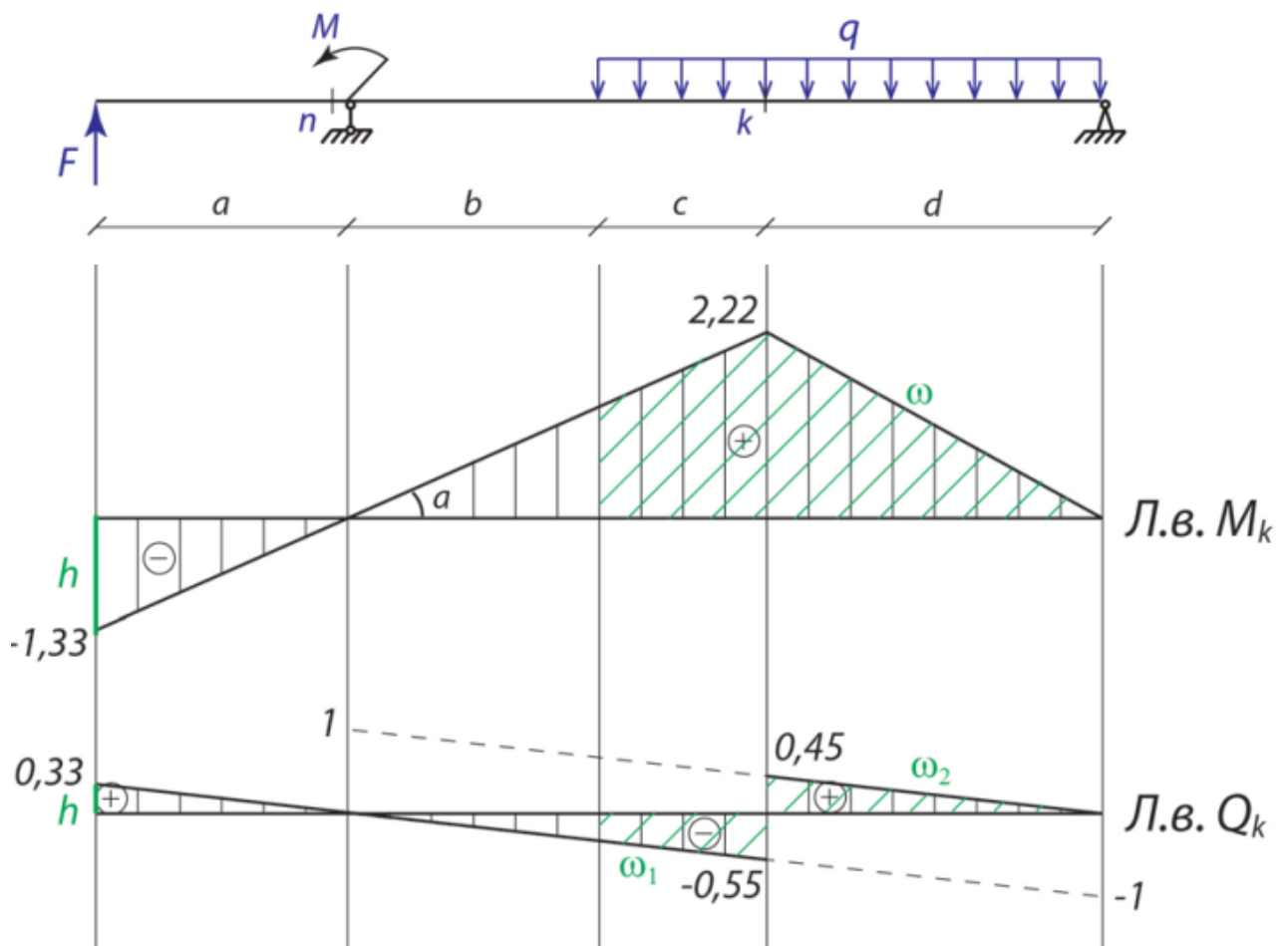


Рис. 1.8. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізу k

Значення зусиль, що отримані в результаті розрахунку, співпали з відповідними зусиллями на епюрах (рис. 1.9). Отже, розрахунок і побудова здійснені правильно.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 18

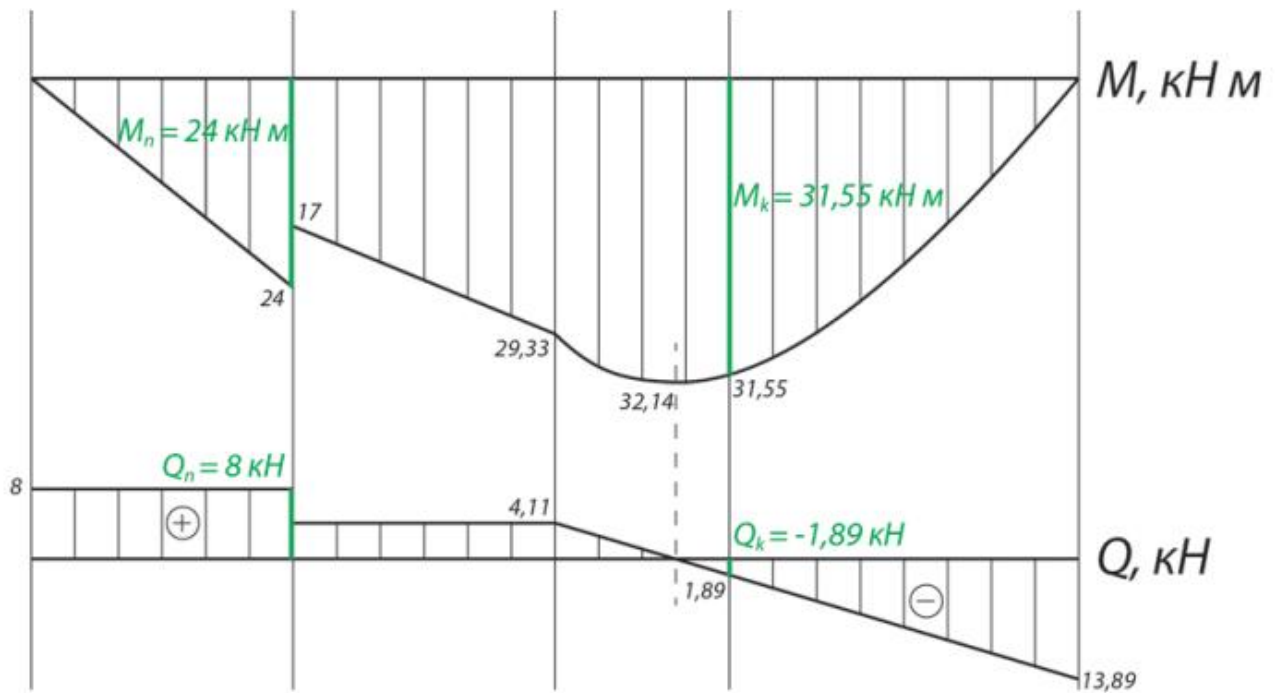


Рис.1.9. Перевірка розрахованих зусиль

Питання для самоперевірки

1. Що таке епюра внутрішніх зусиль і моментів? Яке її практичне значення?
2. Який порядок виконання кінематичного і структурного аналізу однопрольотної балки?
3. Як визначаються опорні реакції у статично визначених системах?
4. Що таке згинаючий момент і як його розраховують для заданого перерізу балки?
5. Як розраховуються поперечні сили в характерних перерізах балки?
6. Яке правило знаків використовується при складанні рівнянь статички для розрахунків?
7. Як побудувати епюру згинаючих моментів для балки?
8. Що означає екстремальне значення згинаючого моменту, і як його знаходять?
9. Як змінюється характер епюри згинаючих моментів у зонах з рівномірно розподіленим навантаженням?
10. Який вид має епюра поперечних сил у зонах із зосередженими силами?
11. Що визначає точка перетину епюри поперечних сил із віссю балки?
12. Як здійснюється перевірка правильності побудови епюр внутрішніх сил?
13. Що таке лінія впливу, і як вона використовується при розрахунках балок?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 19

14. Які особливості побудови епюри моментів для балки під дією зосередженого моменту?

15. Як визначити максимальний момент у балці, використовуючи метод перерізів?

16. Чим відрізняється побудова епюр для статично визначених та невизначених систем?

17. Як впливає вид навантаження на форму епюр (зосереджена сила, розподілене навантаження тощо)?

18. Що таке статична перевірка, і як її проводять у розрахунках балок?

19. Як враховувати вплив рухомого навантаження на епюри внутрішніх сил?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 20

Тема 2. Кінематичний аналіз конструктивних систем

Мета роботи. Навчитися оцінювати геометричну незмінюваність конструктивних систем, встановлювати статичну визначеність або невизначеність систем, а також класифікувати та аналізувати зв'язки між дисками та вузлами.

Теоретичні відомості

Кінематичний аналіз – це дослідження розрахункової схеми споруди (системи), що виконується до початку розрахунку з метою визначення кінематичної якості системи (геометричної незмінюваності, миттєвої змінюваності або геометричної змінюваності), а у випадку геометричної незмінюваності системи – для виявлення її статичної визначеності або невизначеності.

Геометрично незмінюваною називається система, яка допускає взаємні переміщення елементів, що її складають, лише за рахунок деформації цих елементів.

Геометрично змінюваною називається система, у якій кінцеві взаємні переміщення елементів можливі без їх деформації.

Миттєво-змінюваною називається система, що допускає малі відносні переміщення своїх точок без врахування деформацій стержнів, після чого така система стає незмінюваною.

Елемент плоскої системи, геометрична незмінюваність якого доведена або очевидна, називається диском. Кожний окремий диск D геометрично незмінюваний і характеризується трьома ступенями свободи на площині.

Окремий вузол $У$ можна розглядати як диск, що володіє двома ступенями свободи. Диски з'єднують за допомогою зв'язків. Основні типи зв'язків плоских систем:

- а) стержень з шарнірними кінцями C – елементарний зв'язок, що ліквідує один ступінь свободи (рис. 2.1, а);
- б) шарнірний E – зв'язок, еквівалентний двом елементарним зв'язкам (рис. 2.1, б);
- в) припайка Π – зв'язок, що є еквівалентна трьом елементарним зв'язкам (рис. 2.1, в).

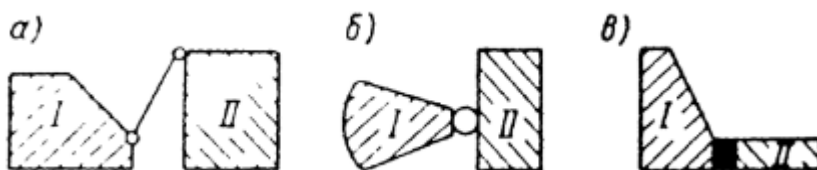


Рис.2.1. Основні типи зв'язків плоских систем

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 21

В залежності від числа і розташування дисків і зв'язків системи поділяються на незмінювані, змінювані і миттєво змінювані. Ступінь свободи плоскої системи, що складається з дисків, вузлів і зв'язків, можна визначити за формулами:

- для систем, що приєднані до землі:

$$W = (3D + 2Y) - (C + 2E + 3П) - C_0$$

- для вільних систем:

$$W = (3D + 2Y) - (C + 2E + 3П) - 3$$

де D, Y, C, E, П, C₀ – відповідно число дисків, вузлів, стержнів, шарнірів, припайок і опорних стержнів.

Якщо $W > 0$, то система геометрично змінювана. Якщо $W = 0$, то система має необхідну кількість зв'язків для того, щоб бути незмінюваною. Якщо $W < 0$, то система має зайві в'язі і також може бути незмінюваною.

Умова $W \leq 0$ не є достатньою умовою геометричної незмінюваності системи. Судити про незмінюваність системи можна тільки після кінематичного аналізу.

На рис. 2.2, а-в, е-з показані основні види утворення незмінюваних систем з двох і трьох дисків. Системи, що зображені на рис. 2.2, г, д, к, л, є миттєво змінюваними, оскільки розташування зв'язків дозволяє дискам мати безкінечно малі відносні переміщення. Тут або два диски мають єдиний миттєвий центр обертання (рис. 2.2, г, д), або три диски мають три миттєвих центра обертання, що лежать на одній прямій (рис. 2.2, к, л).

Елементи, що з'єднуються (диски, вузли), і з'єднуючі елементи (зв'язки) володіють властивостями двоїстості. Зв'язки можуть розглядатися як диски, або вузли, а диски, навпаки, як зв'язки.

Розглянемо приклад у вигляді вільної системи (рис. 1.2, ж), відповідно до якого:

а) як три диска, що з'єднані шарнірами:

$$W = 3D - 2E - 3 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$$

б) як три вузла, що з'єднані стержнями АВ, ВС і АС:

$$W = 2Y - C - 3 = 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0$$

в) як два диски І і ІІ, що з'єднані шарніром В і стержнем АС:

$$W = 3D - 2E - C - 3 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 - 3 = 0$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 22

г) як приєднання до диску ІІ («земля») вузла В двома стержнями АВ і ВС, з'єднаних шарніром:

$$W = 2Y - C_0 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

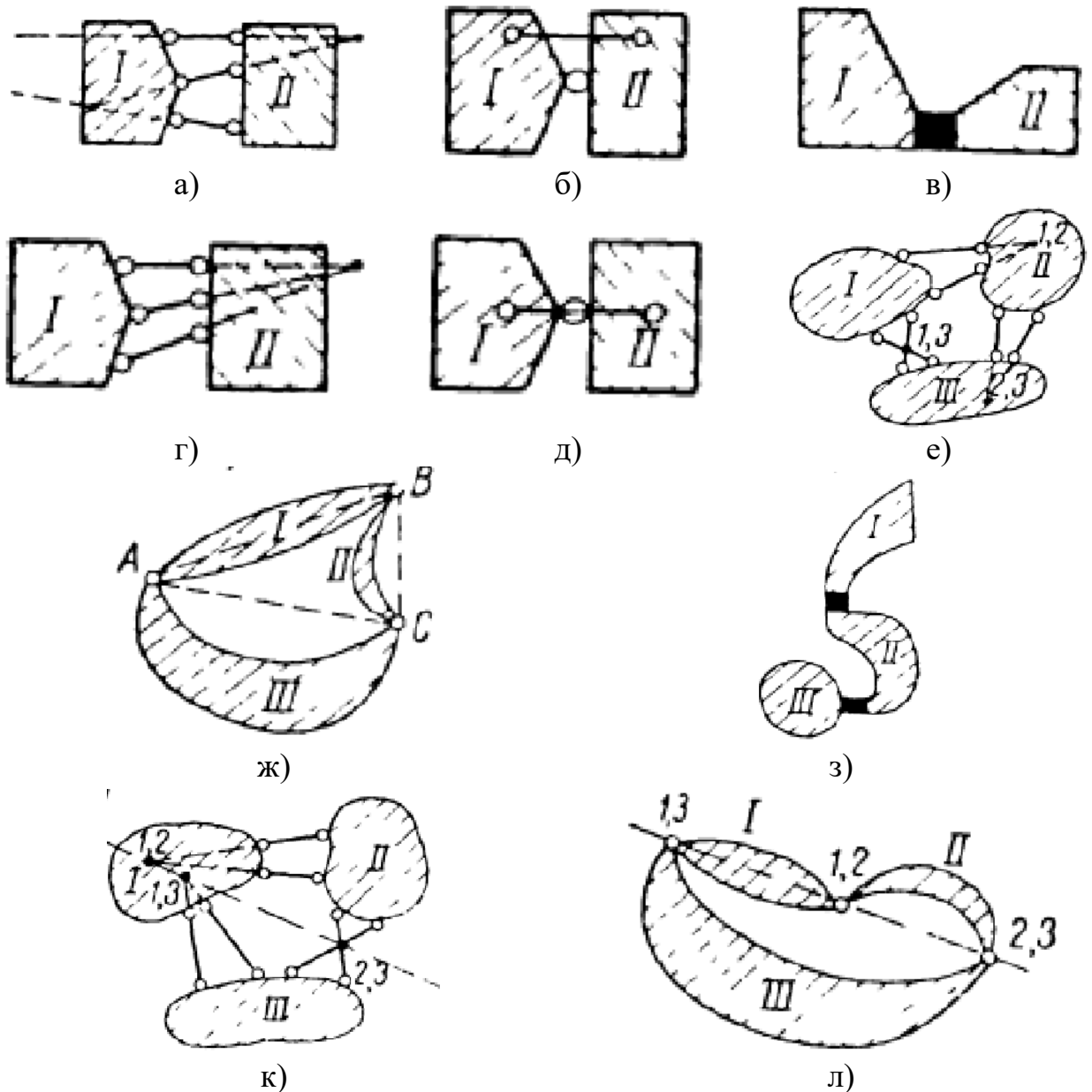


Рис. 1.2. Основні види утворення незмінюваних і миттєво змінюваних систем

Основні способи утворення геометрично незмінюваних систем, що ґрунтуються на найпростішій геометрично незмінюваній системі:

Спосіб 1. Приєднання нового вузла до геометрично незмінюваної системи двома стержнями, осі яких не лежать на одній прямій (рис. 2.3, а).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 24

Задача 2. Виконати кінематичний аналіз системи зображеної на рис. 2.5.

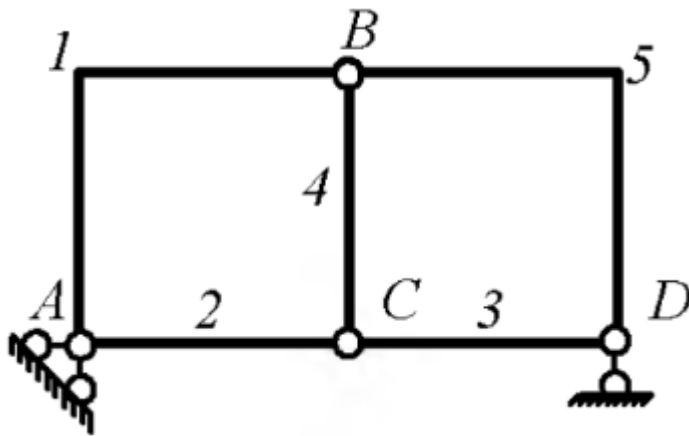


Рис. 2.5. Схема до задачі 2

Дана система складається з п'яти дисків ($D = 5$): АВ, ВС, АС, ВD, СD; шести шарнірів: шарніри А і D – прості, шарніри В і С – триланкові, тобто кожен з них замінює два прості шарніри; опорних стержнів – 3.

Визначаємо ступінь свободи системи за формулою:

$$W = 3D - 2E - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$$

Система може бути геометрично незмінюваною і статично визначеною. Для того, щоб переконатися в цьому, виконаємо аналіз її структури. Оскільки опорних стержнів 3, то вони тільки забезпечують закріплення диску до основи (землі). Залишається переконатися, що система представляє собою один диск, тобто є незмінною. Диски АВ, ВС, АС з'єднані між собою за допомогою 3-х шарнірів А, В, С, що не лежать на одній прямій і тому утворюють диск АВС (спосіб 4). До цього диску приєднаний диск ВD за допомогою шарніра В і стержня CD, який не проходить через центр шарніра В (спосіб 3). Таким чином, система утворена у відповідності з принципами утворення геометрично незмінюваних систем і є незмінюваною статично визначеною системою.

Питання для самоперевірки

1. Що таке кінематичний аналіз конструктивної системи?
2. Яка мета проведення кінематичного аналізу системи перед розрахунком?
3. Як визначити геометричну незмінюваність системи?
4. Що означає поняття «геометрично незмінювана система»?
5. Чим відрізняється геометрично змінювана система від миттєво-змінюваної?
6. Що таке ступінь свободи системи, і як він розраховується?
7. Як обчислити ступінь свободи для системи, приєднаної до основи?
8. Які зв'язки ліквідують один, два і три ступені свободи в системі?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 25

9. Які типи зв'язків існують у плоских системах?
10. Що таке «диск» у контексті кінематичного аналізу?
11. Яка формула використовується для визначення ступеня свободи вільної системи?
12. Як визначити, чи є система геометрично змінюваною, за значенням W ?
13. Чому умова $W \leq 0$ не є достатньою для геометричної незмінюваності системи?
14. Які основні способи утворення геометрично незмінюваних систем?
15. Як утворити незмінювану систему з двох або трьох дисків?
16. Що таке миттєвий центр обертання, і як його визначають у конструкції?
17. Як впливає розташування шарнірів і стержнів на змінюваність системи?
18. Що відбувається, якщо три миттєвих центри обертання лежать на одній прямій?
19. Яким чином геометрично незмінювана система може бути побудована з найпростішої базової системи?
20. Як перевірити геометричну незмінюваність системи після розрахунку ступеня свободи?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 26

Тема 3. Розрахунок багатопрольотних статично визначених балок

Мета роботи. Розвинути вміння будувати поповерхові схеми для багатопрольотних балок, розраховувати опорні реакції, а також визначати згинаючі моменти і поперечні сили для кожної балки.

Теоретичні відомості

Багатопрольотною статично визначеною балкою називається геометрично незмінювана статично визначена система, що складається з однопрольотних балок, з'єднаних між собою ідеальними шарнірами.

Необхідна кількість шарнірів повинна бути розташована таким чином, щоб система в усіх своїх частинах була геометрично незмінюваною і статично визначеною.

Існують три способи розташування шарнірів в прольотах балки:

- по одному шарніру в прольоті;
- по два шарніри через прольот;
- комбінована постановка шарнірів.

Розрахунок багатопрольотної статично визначеної балки проводиться із застосуванням поповерхової схеми. Для її побудови потрібно всю систему умовно поділити по шарнірним з'єднанням на окремі балки і визначити умови їх спирання. При цьому виявляється, що окремі балки мають або два опорних закріплення, або затиснені на одному кінці. Такі балки відносять до головних (або залежних) і на схемі зображуються на самому нижньому ярусі (балки ABC (рис. 3.1, а), АВ і CDE (рис. 3.1, б)).

Елементи поповерхової схеми, що спираються на головні балки або мають лише по одній опорі на основу (землю), називають другорядними (або незалежними) балками (балки CDE і EF (рис. 4.1, а), BC (рис. 3.1, б)). Такі балки на поповерховій схемі розташовуються вище балок, на які вони шарнірно спираються.

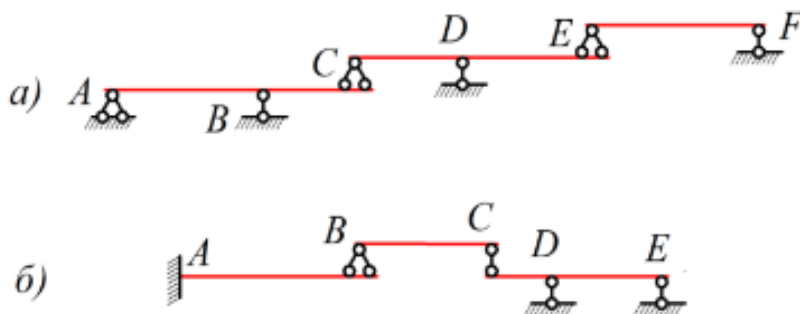


Рис. 3.1. Поповерхові схеми багатопрольотних балок

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 27

В поповерховій схемі взаємодія елементів здійснюється за принципом: зусилля можуть передаватися тільки з вищележачих балок на нижчележачі, але не передаються в зворотному напрямку. Опорні реакції другорядних балок – це сили, з якими нижній поверх діє на верхній. За третім законом Ньютона сила, з якою верхня балка діє на нижню дорівнює за величиною реакції верхньої балки і має протилежний напрямок.

Розрахунок багатопрольотної балки виконується в наступній послідовності:

1. Виконується кінематичний аналіз, встановлюється геометрична незмінюваність і статична визначеність.
2. Будується поповерхова схема, виділяються головні і другорядні балки.
3. Розраховується незалежна балка самого верхнього поверху: визначаються опорні реакції і будуються епюри згинаючих моментів M і поперечних сил Q .
4. Послідовно розраховуються балки нижніх поверхів на своє навантаження і на силу, що передається з верхнього поверху, будуються епюри.
5. В єдиному масштабі будуються епюри M і Q для всієї балки.
6. Здійснюється статична перевірка правильності побудови епюр.

Приклад розв'язання задач

Задача 1: Для багатопрольотної балки, зображеної на рис. 3.2, побудувати епюри згинаючих моментів і поперечних сил, якщо задано: довжини ділянок балки $l = 2$ м, реактивний момент $M = 4$ кНм, зосереджена сила $F = 2$ кН, розподілена сила $q = 2$ кН/м.

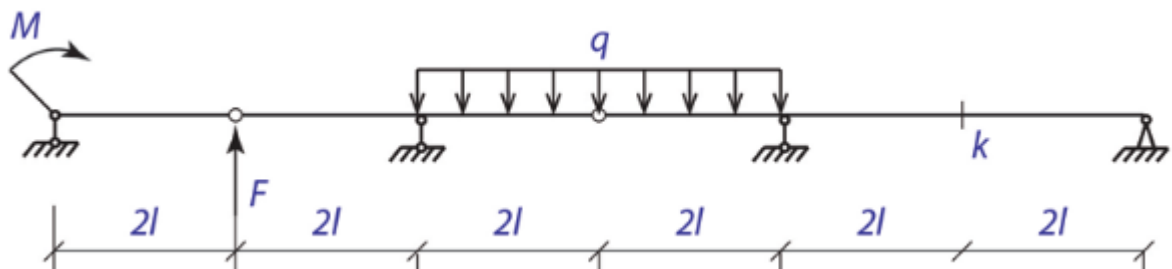


Рис. 4.2. Схема багатопрольотної балки

1.1. Проведення кінематичного аналізу

Визначаємо ступінь свободи за формулою:

$$W = 3D - 2E - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$$

де $D = 3$ – кількість дисків в рамі;

$E = 2$ – кількість шарнірів;

$C_0 = 5$ – кількість опорних стержнів.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 28

Геометрична незмінюваність багатопрольотної балки витікає з аналізу її поперхової схеми. Усі диски на цій схемі мають необхідну кількість правильно встановлених в'язей. Отже, багатопрольотна балка є статично визначеною системою.

1.2. Будуємо поперхову схему, виділяємо залежні балки (B-D і D-F) і незалежну (A-B) (рис. 3.3, б).

1.3. Проводимо розрахунок для кожної простої балки. Розрахунок починається з верхньої (незалежної) балки. Розрахунок проводиться аналогічно розрахунку однопрольотної балки (див. п. 3).

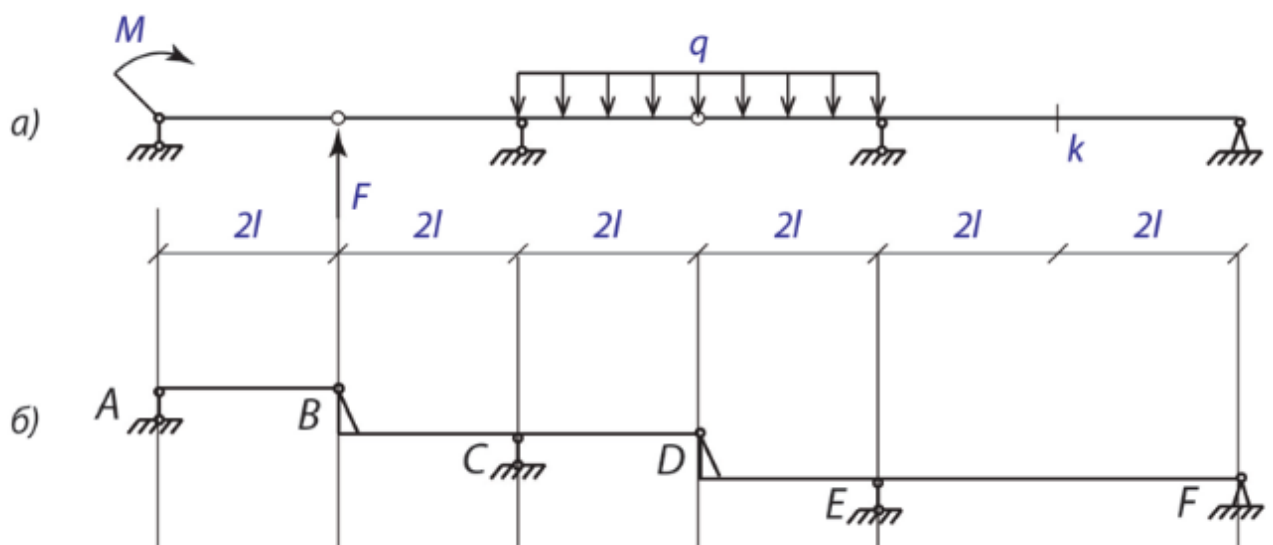


Рис. 3.3. Розрахункова схема багатопрольотної балки

Балка А-В. Балка А-В є незалежною.
Розраховуємо опорні реакції (рис.3.4)

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum M_A = 0; M - R_B \cdot 4 = 0; R_B = \frac{M}{4} = 1, \text{кНм}$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 4 + M = 0; R_A = -\frac{M}{4} = -1, \text{кНм}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0; R_A + R_B = 1 - 1 = 0; 0 = 0$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 29

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Оскільки в результаті розрахунку реакція опори А має від'ємне значення, то напрямок R_A треба змінити на протилежний.

Розраховуємо згинаючі моменти та поперечні сили в характерних перерізах і будуємо епюри (рис.3.4)

Переріз I-I: $0 \leq x \leq 4$

$$M_{A-B} = M - R_A x$$

$$M(0) = 4, \text{кНм}$$

$$M(4) = 4 - 1 \cdot 4 = 0$$

$$Q_{A-B} = -R_A = -1, \text{кН}$$

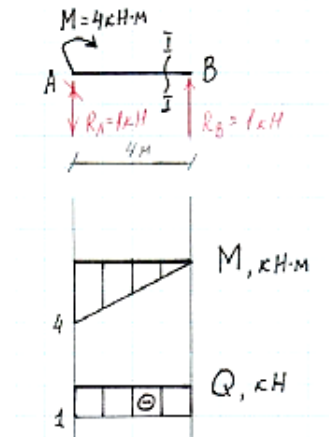


Рис.3.4. Опорні реакції

Балка B-D

Балка B-D є залежною. На неї діє місцеве навантаження (зосереджена сила $F = 2$ кН, розподілена сила $q = 2$ кН/м) і тиск R_B' , що передається з балки А-В. Цей тиск рівний за величиною реакції R_B (балка А-В) і протилежний за напрямком (рис. 3.5).

Розраховуємо опорні реакції:

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum M_C = 0; F \cdot 4 - R_B' \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_D \cdot 4 = 0; R_D = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 5, \text{кНм}$$

$$\sum M_D = 0; F \cdot 8 - R_B' \cdot 8 + R_C \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0; R_C = \frac{-2 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 2, \text{кНм}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0; F - R_B' + R_C + R_D - q \cdot 4 = 2 - 1 + 2 + 5 - 2 \cdot 4 = 0; 0 = 0$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Розраховуємо згинаючі моменти та поперечні сили в характерних перерізах і будуємо епюри (рис. 3.5).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 30

Переріз II-II: $0 \leq x \leq 4$

$$M_{B-D} = F \cdot x - R'_B x$$

$$M(0) = 0, \text{кНм}$$

$$M(4) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 4, \text{кНм}$$

$$Q_{B-D} = F - R'_B = 2 - 1 = 1, \text{кН}$$

Переріз III-III: $4 \leq x \leq 8$

$$M_{B-D} = F \cdot x - R'_B x + R_c(x - 4) - \frac{q(x - 4)^2}{2}$$

$$M(4) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 4, \text{кНм}$$

$$M(8) = 2 \cdot 8 - 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 4^2}{2} = 0, \text{кНм}$$

$$Q_{B-D} = F - R'_B + R_c - q(x - 4)$$

$$Q(4) = 2 - 1 + 2 = 3, \text{кН}$$

$$Q(8) = 2 - 1 + 2 - 2 \cdot 4 = -5, \text{кН}$$

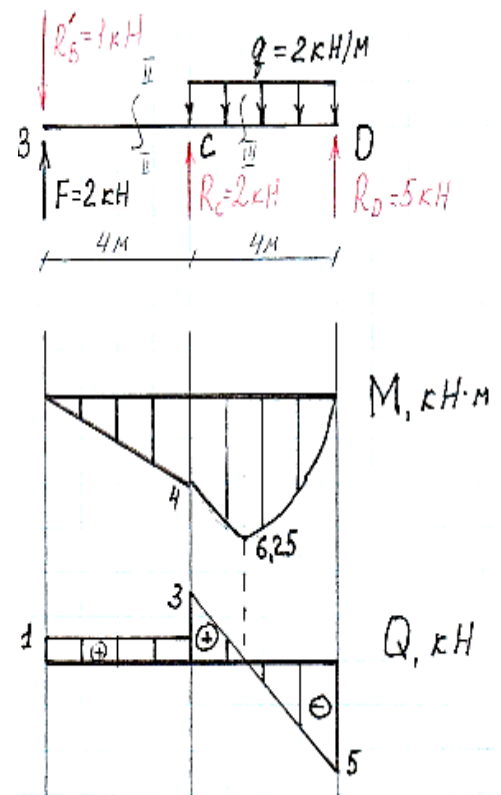


Рис.3.5. Епюри згинаючих моментів та поперечних сил для балки В-Д

Епюра поперечних сил на ділянці С-Д перетинає вісь. В цьому перерізі момент набуває екстремального значення. Необхідно визначити ординату епюри згинаючого моменту в цьому перерізі. Для цього рівняння поперечної сили на цій ділянці прирівнюємо до нуля і знаходимо координату x :

$$Q_{B-D} = F - R'_B + R_c - q(x - 4) = 0$$

$$x = \frac{F - R'_B + R_c}{q} + 4 = \frac{2 - 1 + 2}{2} + 4 = 5,5, \text{м}$$

Для точки екстремума ($x = 5,5$ м) знаходимо згинаючий момент:

$$M(5,5) = F \cdot x - R'_B x + R_c(x - 4) - \frac{q(x - 4)^2}{2} =$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 31

$$= 2 \cdot 5,5 - 1 \cdot 5,5 + 2 \cdot (5,5 - 4) - \frac{2 \cdot (5,5 - 4)^2}{2} = 6,25, \text{ кН}$$

Будуємо епюри згинаючих моментів і поперечних сил для балки В-D (рис. 3.5).

Балка D-F

Балка D-F є залежною. На неї діє місцеве навантаження (розподілена сила $q = 2 \text{ кН/м}$) і тиск R_D' , що передається з балки В-D. Цей тиск рівний за величиною реакції R_D (балка В-D) і протилежний за напрямком (рис. 3.6).

Розраховуємо опорні реакції:

$$\sum F_x = 0;$$

$$\sum M_E = 0; -R_D' \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - R_F \cdot 8 = 0; R_F = \frac{-5 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2}{8} = -4,5, \text{ кНм}$$

$$\sum M_F = 0; -R_D' \cdot 12 + R_E \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 10 = 0; R_E = \frac{5 \cdot 12 + 2 \cdot 4 \cdot 10}{8} = 17,5, \text{ кНм}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0; -R_D' + R_E + R_F - q \cdot 4 = -5 + 17,5 - 4,5 - 2 \cdot 4 = 0; 0 = 0$$

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Оскільки в результаті розрахунку реакція опори F має від'ємне значення, то напрямок R_F треба змінити на протилежний.

Розраховуємо згинаючі моменти та поперечні сили в характерних перерізах і будуємо епюри (рис.3.6).

Переріз IV-IV: $0 \leq x \leq 4$

$$M_{D-F} = -R_D' x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M(0) = 0, \text{ кНм}$$

$$M(4) = -5 \cdot 4 - \frac{2 \cdot 4^2}{2} = -36, \text{ кНм}$$

$$Q_{D-F} = -R_D' - qx$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 32

$$Q(0) = -5, \text{кН}$$

$$Q(4) = -5 - 2 \cdot 4 = -13, \text{кН}$$

Переріз V-V: $4 \leq x \leq 12$

$$M_{D-F} = -R'_D x + R_E(x - 4) - q \cdot 4(x - 2)$$

$$M(4) = -5 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = -36, \text{кНм}$$

$$M(12) = -5 \cdot 12 + 17,5 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 = 0, \text{кНм}$$

$$Q_{D-F} = -R'_D - q \cdot 4 + R_E = -5 - 2 \cdot 4 + 17,5 = 4,5, \text{кН}$$

Епюри згинаючих моментів і поперечних сил для балки D-F зображені на рис. 3.6.

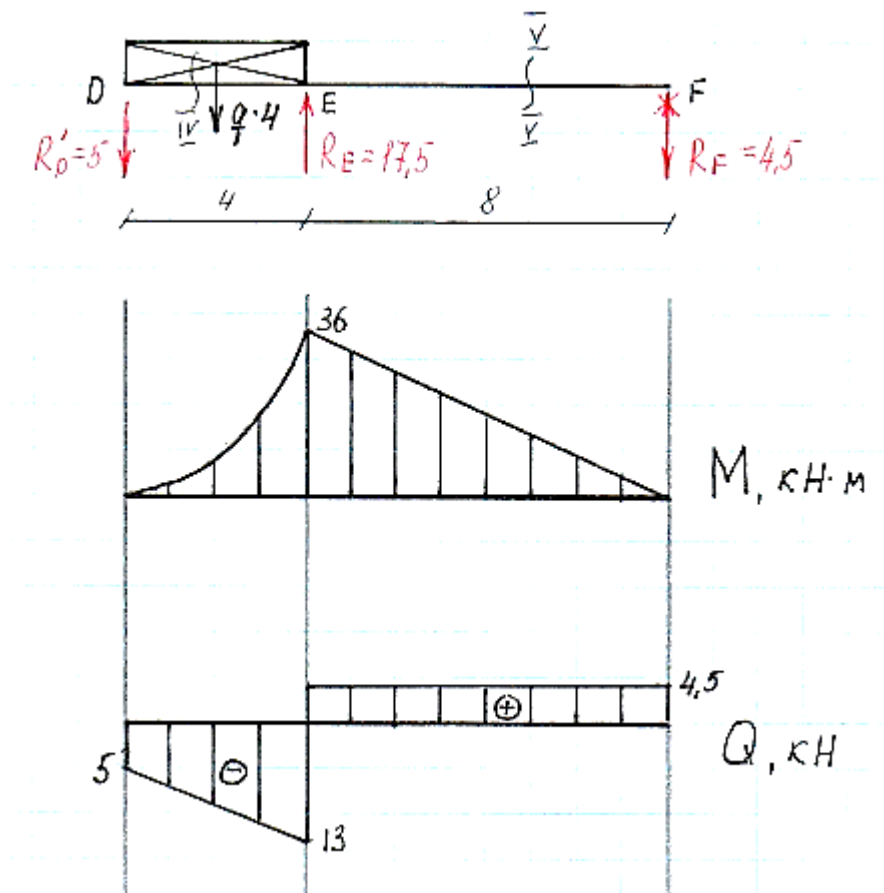


Рис. 3.6. Епюра згинаючого моменту і поперечних сил для балки D-F

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 33

1.4. Будуємо епюри згинаючих моментів і поперечних сил в заданій багатопрольотній балці від заданого навантаження, для чого суміщаємо на одній осі всі побудовані раніше епюри (рис. 3.7).

1.5. Виконуємо перевірку рівноваги всієї балки. Для цього складаємо рівняння проєкцій усіх сил на вісь Y:

$$\sum F_y = 0$$

$$-R_A + F + R_C - q \cdot 8 + R_E - R_F = -1 + 2 + 2 - 16 + 17,5 - 4,5 = 0$$

Умова виконується. Розрахунок і побудова епюр здійснені правильно.

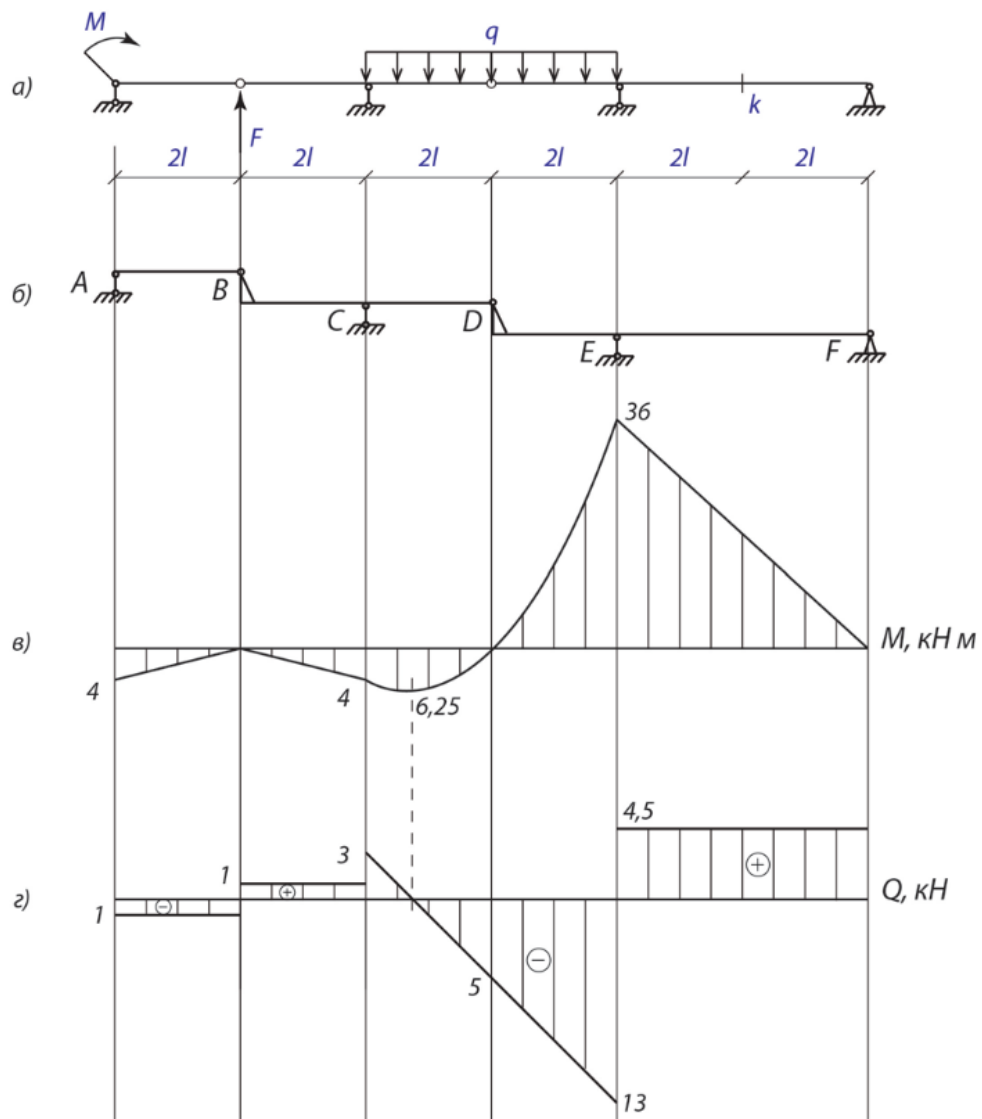


Рис. 3.7. Епюра згинаючого моменту і поперечних сил для багатопрольотної балки

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 34

Задача 2. Побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль для перерізу k , що знаходиться на відстані 4 м від опору, довжина прольоту 9 м.

Лінії впливу внутрішніх силових факторів для заданих перерізів будуються на тій балці, на якій знаходиться переріз, а потім добудовуються на всі допоміжні балки.

Будуємо лінію впливу згинаючого моменту в перерізі k . Видаляємо зв'язок, що сприймає згинаючий момент, і замінюємо її вплив додатнім згинаючим моментом M . Придаємо точкам прикладання M безкінечно мале кутове переміщення $\delta = 1$, будуємо графік можливих переміщень, які будуть являти собою лінію впливу згинаючого моменту M (рис. 3.8, в).

Будуємо лінію впливу поперечної сили в перерізі k . Видаляємо зв'язок, що сприймає поперечну силу, і замінюємо її вплив поперечною силою Q . Надаємо точці прикладання Q безкінечно мале переміщення $\delta = 1$, будуємо графік можливих переміщень, який буде являти собою лінію впливу поперечної сили Q (рис. 3.8, г).

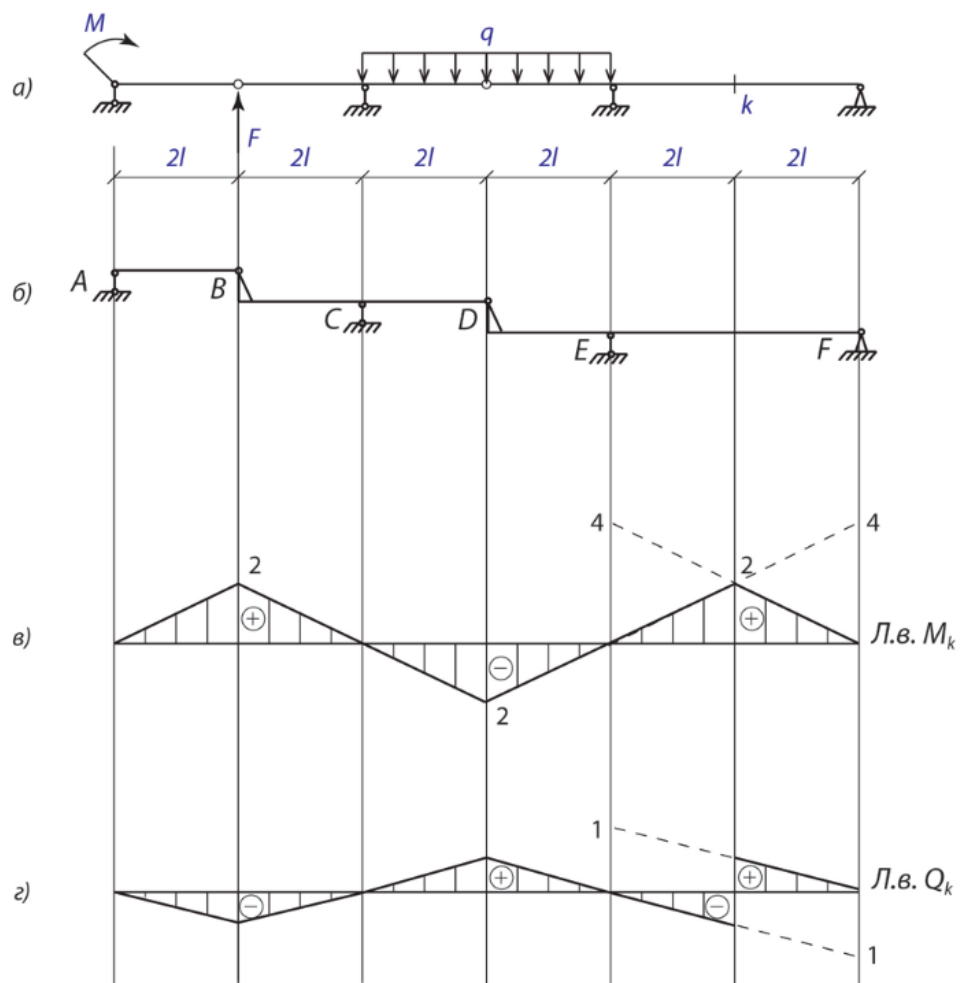


Рис. 3.8. Лінії впливу згинаючих моментів і поперечних сил для перерізу k

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 35

Задача 3. Визначити зусилля в перерізі k по лініях впливу від заданого навантаження і порівняти їх з зусиллями на епюрах.

Внутрішні зусилля S (згинаючого моменту та поперечних сил) в визначаємо за формулою:

$$S = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha$$

де F – зосереджена сила («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору);

h – ордината лінії впливу під силою;

q – інтенсивність розподіленого навантаження («+» - спрямована вниз, «-» - спрямована вгору);

ω – площа лінії впливу під навантаженням;

M – зосереджений момент («+» – спрямований за годинниковою стрілкою, «-» – спрямований проти годинникової стрілки);

α – ухил лінії впливу в місці прикладання M.

Визначаємо згинаючий момент і поперечну силу в перерізі k:

$$M_k = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha = -2 \cdot 2 + 2 \cdot (-8) + 4 \cdot \frac{2}{4} = -18, \text{кНм}$$

$$Q_k = F \cdot h + q \cdot \omega + M \cdot tg\alpha = -2 \cdot (-0,5) + 2 \cdot 2 + 4 \cdot \left(\frac{-0,5}{4}\right) = 4,5, \text{кН}$$

Значення зусиль, що отримані в результаті розрахунку, збіглися з відповідними зусиллями на епюрах (рис. 3.9). Отже, розрахунок і побудова здійснені правильно.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 36

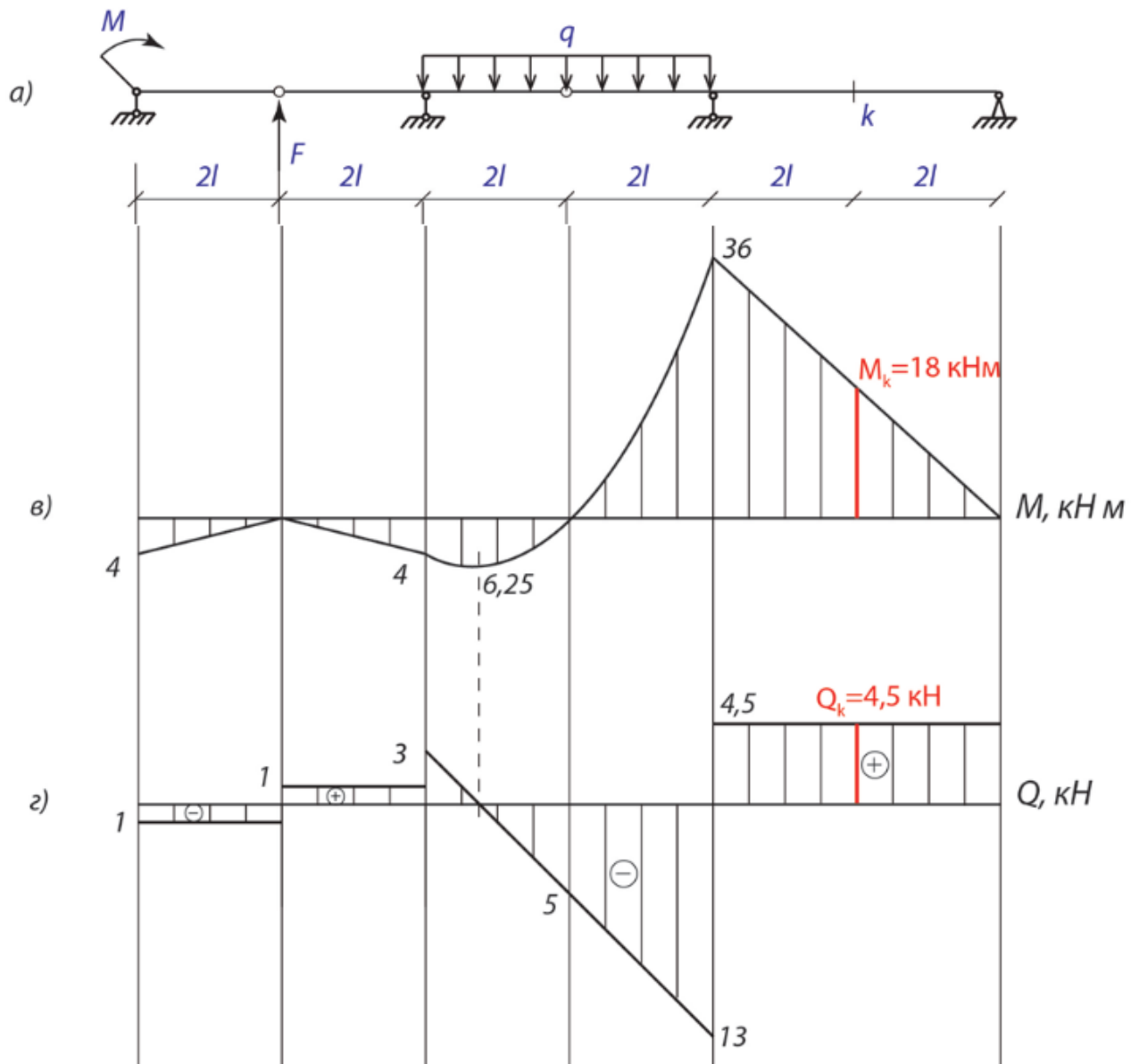


Рис.3.9. Епюра згинаючого моменту і поперечних сил для багатопрольотної балки

Питання для самоперевірки

1. Що таке багатопрольотна статично визначена балка?
2. Які властивості мають геометрично незмінювані статично визначені системи?
3. Які існують способи розташування шарнірів у багатопрольотних балках?
4. Що таке поповерхова схема багатопрольотної балки?
5. Як розділити багатопрольотну балку на головні та другорядні балки?
6. Що означає термін «залежна балка»?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 37

7. Який принцип взаємодії елементів багатопрольотної балки у поповерховій схемі?
8. Як розрахувати опорні реакції для багатопрольотної балки?
9. У чому полягає особливість епюр моментів і поперечних сил у багатопрольотних балках?
10. Як виконується кінематичний аналіз багатопрольотної балки?
11. Чому важливо будувати епюри в єдиному масштабі для всієї балки?
12. Який вплив мають опорні реакції верхніх поверхів на нижчележачі балки?
13. Як враховуються локальні навантаження при розрахунку залежних балок?
14. Як визначити екстремальне значення згинаючого моменту у багатопрольотній балці?
15. Чим відрізняється побудова епюр для багатопрольотних балок від однопрольотних?
16. Що таке статична перевірка багатопрольотної балки, і як її виконують?
17. Як змінюється характер епюри моментів у зоні шарнірного з'єднання?
18. Чому епюра поперечних сил змінюється стрибками у точках прикладання зосереджених сил?
19. Як побудувати лінію впливу для багатопрольотної балки?
20. У чому складність розрахунку багатопрольотної балки порівняно з однопрольотною?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 38

Тема 4. Розрахунок плоских рам

Мета роботи. Вивчити методи визначення внутрішніх зусиль (згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил) у рамах, використовуючи статичні методи вирізання вузлів та перерізів.

Теоретичні відомості

Рами – це системи, що складаються з прямолінійних або криволінійних стержнів, жорстко або шарнірно зв'язаних між собою. Вертикальні та похилі елементи рам називаються стійками, горизонтальні та близькі до них – ригелями. Рами бувають несполучені, тобто такі, що складаються з одного диска, нерухомо закріпленого на площині, і сполучені, що складаються з двох або декількох дисків, з'єднаних між собою шарнірами. В залежності від способів утворення і видів опорних закріплень рами можуть бути балочними (безрозпірними) або аروحними (розпірними) системами. Розрахунок плоских статично визначених рам виконується за допомогою рівнянь рівноваги статки і зводиться до визначення згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил в перерізах і побудові епюр внутрішніх зусиль.

Епюрою називається графік зміни величини, що вивчається, в різних перерізах від заданого нерухомого навантаження. Визначення внутрішніх зусиль в перерізах рами виконується статичним способом вирізання вузлів і простих перерізів. В аналітичному рішенні чисельні значення зусиль визначаються для кожного перерізу з умов рівноваги відсічених частин рами. Графічне рішення зручно використовувати при побудові епюр згинаючих моментів для найпростіших випадків навантаження.

Аналітичний розрахунок статично визначених рам зводиться до наступного:

1. Встановлюється геометрична незмінність і статична визначеність.
2. Розраховуються опорні реакції і здійснюється перевірка правильності їх визначення.
3. Визначаються внутрішні зусилля – згинаючий момент, поперечні і поздовжні сили в характерних перерізах рами.
4. Будуються епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил.

Приклад розв'язування задач

Задача. Для рами, зображеної на рис. 4.1, побудувати епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил, якщо задано зосереджена сила $F = 5$ кН, рівномірно розподілена сила $q_1 = 2$ кН/м, рівномірно розподілена сила $q_2 = 5$ кН/м, розміри $h = 3$ м, $l = 3$ м.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 39

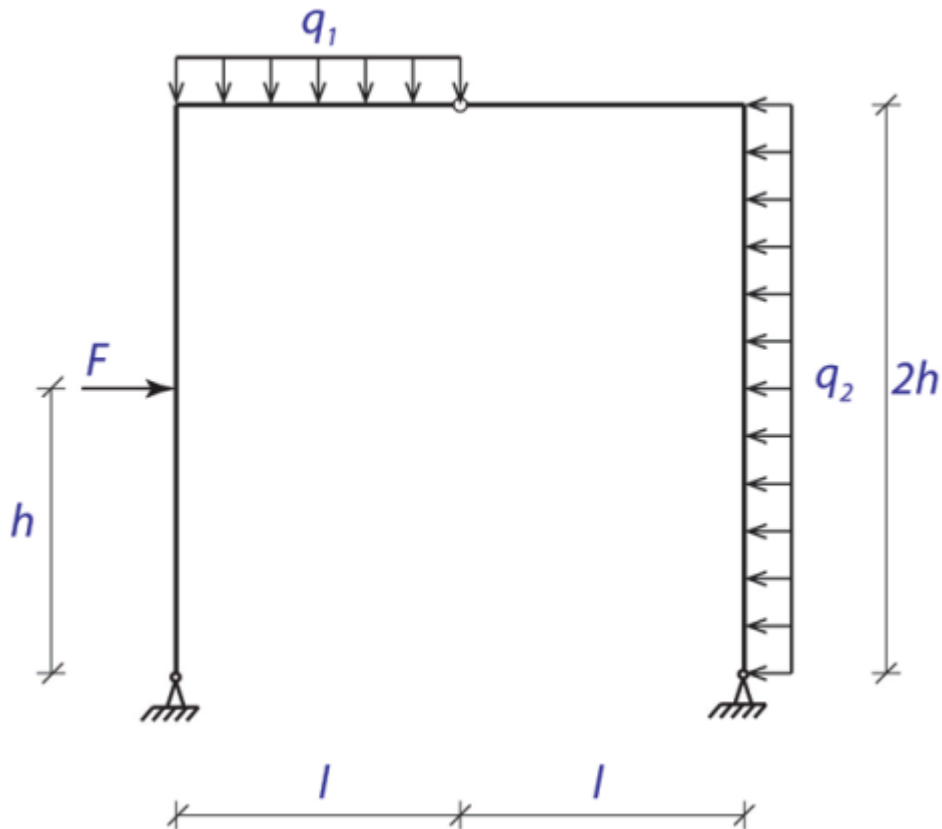


Рис. 4.1. Схема тришарнірної рами

Встановлення геометричної незмінюваності і статичної визначеності (кінематичний аналіз рами).

Визначаємо ступінь свободи за формулою:

$$W = 3D - 2E - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$$

де $D = 2$ – кількість дисків в рамі;

$\Pi = 1$ – кількість шарнірів;

$C_0 = 4$ – кількість опорних стержнів.

Рама являє собою незмінювану фігуру, що складається з трьох дисків (АЕС, СКВ і «земля»), з'єднаних між собою шарніром С і двома шарнірнонерухомими опорами. Отже, рама є геометрично незмінюваною і статично визначеною.

2. Розрахунок опорних реакцій і перевірка правильності їх визначення. Перед початком рішення задачі перенесемо на розрахункову схему числові дані навантажень і позначимо характерні точки рами літерами А, В, С, D, Е, К (рис. 4.2).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 40

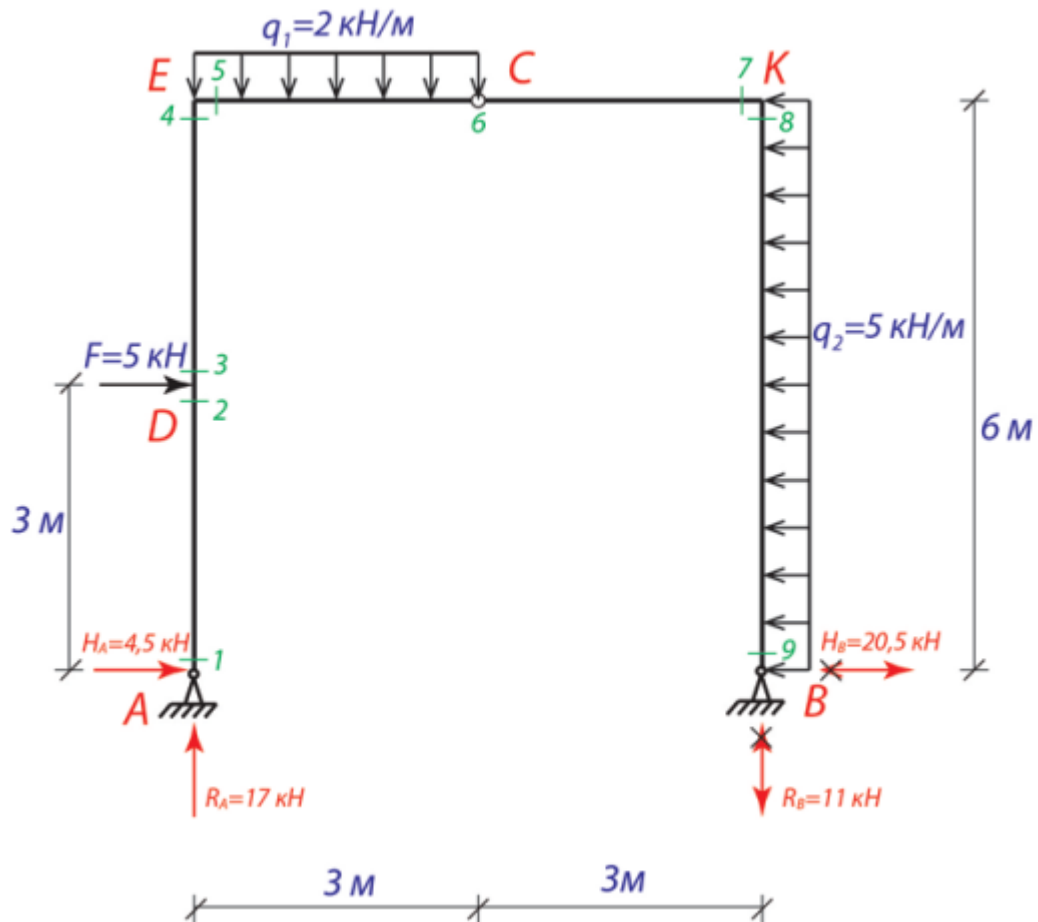


Рис. 4.2. Розрахункова схема рами

Опорні реакції будемо визначати з умов рівноваги плоскої системи сил.

В шарнірно-нерухомих опорах (т. А і т. В) виникають дві складові реакції – горизонтальна H і вертикальна R . Надамо цим реакціям на даному етапі довільний напрямок.

Для визначення вертикальних складових реакцій R_A і R_B запишемо рівняння суми моментів відносно опорних точок, які повинні дорівнювати нулю:

$$\sum M_A = 0; F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 - R_B \cdot 6 = 0$$

звідки

$$R_B = \frac{F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 - q_2 \cdot 6 \cdot 3}{6} = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 5 \cdot 6 \cdot 3}{6} = -11, \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 6 + F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 4,5 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 41

звідки

$$R_A = \frac{-F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 + q_2 \cdot 6 \cdot 3}{6} = \frac{-5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4,5 + 5 \cdot 6 \cdot 3}{6} = 17, \text{кН}$$

Знак «-» реакції R_B говорить про те, що довільно прийнятий напрямок виявився невірним, і R_B необхідно спрямувати в протилежний бік, одночасно змінивши знак на протилежний. Проміжна перевірка правильності визначення вертикальних реакцій проводиться складанням рівняння суми проекцій всіх сил на вертикальну вісь Y , яка повинна дорівнювати нулю:

$$\sum F_Y = 0; R_A - R_B - q_1 \cdot 3 = 0$$

$$17 - 11 - 2 \cdot 3 = 0; 0 = 0$$

Умова виконується. Вертикальні складові опорних реакцій знайдені вірно.

Для визначення горизонтальної складової H_A складемо рівняння моментів відносно шарніра C для лівої частини рами, для визначення H_B складемо рівняння суми проекцій всіх сил на горизонтальну вісь X :

$$\sum M_C^{\text{лів}} = 0; R_A \cdot 3 - H_A \cdot 6 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

звідки

$$H_A = \frac{R_A \cdot 3 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = \frac{17 \cdot 3 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = 4,5, \text{кН}$$

$$\sum F_X = 0; H_A + F - H_B - q_2 \cdot 6 = 0$$

звідки

$$H_B = H_A + F - q_2 \cdot 6 = 4,5 + 5 - 5 \cdot 3 = -20,5, \text{кН}$$

Змінюємо попередньо прийнятий напрямок H_B на протилежний. Загальна перевірка правильності визначення опорних реакцій:

$$\begin{aligned} \sum M_C^{\text{пр}} &= 0; -R_B \cdot 3 + H_B \cdot 6 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \\ -11 \cdot 3 + 20,5 \cdot 6 - 5 \cdot 6 \cdot 3 &= 0; 0 = 0 \end{aligned}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 42

Умова виконується. Реакції опор визначені вірно. Рама знаходиться в стані рівноваги.

3. Визначення величини поперечної сили. Побудова епюри поперечних сил.

Визначення внутрішніх зусиль в перерізах рами виконуємо способом простих перерізів. Визначаємо значення поперечних сил в характерних перерізах рами, розглядаючи рівновагу відсічених частин рами.

Стійка А-Е

$$\text{Переріз 1: } Q_1^{\text{лів}} = -H_A = -4,5, \text{ кН}$$

$$\text{Переріз 2: } Q_2^{\text{лів}} = -H_A = -4,5, \text{ кН}$$

$$\text{Переріз 3: } Q_3^{\text{лів}} = -H_A - F = -4,5 - 5 = -9,5, \text{ кН}$$

$$\text{Переріз 4: } Q_4^{\text{лів}} = -H_A - F = -4,5 - 5 = -9,5, \text{ кН}$$

Ригель Е-К

$$\text{Переріз 5: } Q_5^{\text{лів}} = R_A = 17, \text{ кН}$$

$$\text{Переріз 6: } Q_6^{\text{лів}} = R_A - q_1 \cdot 3 = 17 - 2 \cdot 3 = 11, \text{ кН}$$

$$\text{Переріз 7: } Q_7^{\text{лів}} = Q_6^{\text{лів}} = 11, \text{ кН}$$

Стійка В-К

$$\text{Переріз 9: } Q_9^{\text{пр}} = -H_B = -20,5, \text{ кН}$$

$$\text{Переріз 8: } Q_8^{\text{пр}} = -H_B + q_2 \cdot 6 = -20,5 + 5 \cdot 6 = 9,5, \text{ кН}$$

За отриманими даними будуємо епюру поперечних сил з використанням правила знаків (рис. 4.3).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 43

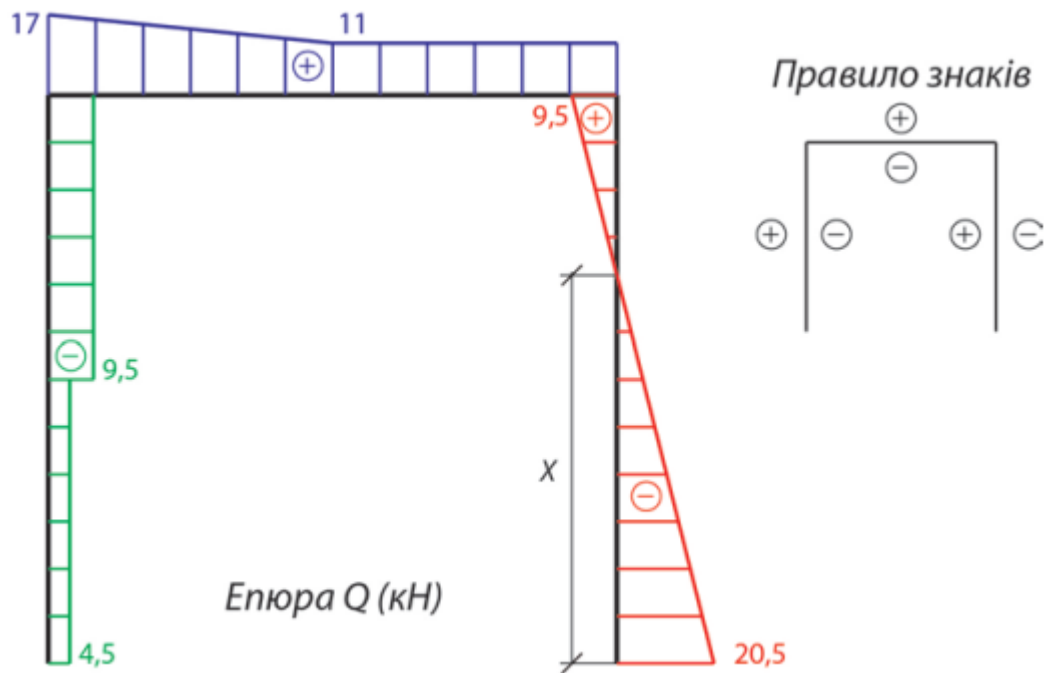


Рис. 4.3. Епюра поперечних сил рами

Слід звернути увагу, що значення поперечних сил на границях ділянки В-К мають протилежні знаки, тобто епюра Q на даній ділянці перетинає базову лінію, отже, на епюрі моментів в цьому перерізі буде екстремум. Необхідно визначити відстань X, для цього складаємо рівняння:

$$Q_x = -H_B + q_2 \cdot x = 0$$

звідки

$$x = \frac{H_B}{q_2} = \frac{20,5}{5} = 4,1, \text{ м}$$

4. Визначення величини згинаючих моментів. Побудова епюри згинаючих моментів.

Визначаємо значення згинаючих моментів в характерних перерізах рами.

Стійка А-Е:

Переріз 1: $M_1^{\text{лів}} = 0$

Переріз 2, 3: $M_2^{\text{лів}} = M_3^{\text{лів}} = -H_A \cdot 3 = -4,5 \cdot 3 = -13,5, \text{ кНм}$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 44

Переріз 4: $M_4^{\text{лів}} = -H_A \cdot 6 - F \cdot 3 = -4,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -42, \text{кНм}$

Ригель Е-К

Переріз 5: $M_5^{\text{лів}} = -H_A \cdot 6 - F \cdot 3 = -4,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -42, \text{кНм}$

Переріз 6: $M_6^{\text{лів}} = R_A \cdot 3 - H_A \cdot 6 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 =$
 $= 17 \cdot 3 - 4,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \text{кНм}$

Переріз 7: $M_7^{\text{лів}} = R_A \cdot 6 - H_A \cdot 6 - F \cdot 3 - q_1 \cdot 3 \cdot 4,5 =$
 $= 17 \cdot 6 - 4,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 4,5 = 33, \text{кНм}$

Стійка В-К

Переріз 9: $M_9^{\text{пр}} = 0$

Переріз 8: $M_8^{\text{пр}} = H_B \cdot 6 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 = 20,5 \cdot 6 - 5 \cdot 6 \cdot 3 = 33, \text{кНм}$

Переріз х: $M_x^{\text{пр}} = H_B \cdot 4,1 - q_2 \cdot 4,1 \cdot 2,1 = 20,5 \cdot 4,1 - 5 \cdot 4,1 \cdot 2,1 = 42, \text{кНм}$

За отриманими даними будемо епюру згинаючих моментів з використанням правила знаків (рис. 4.4).

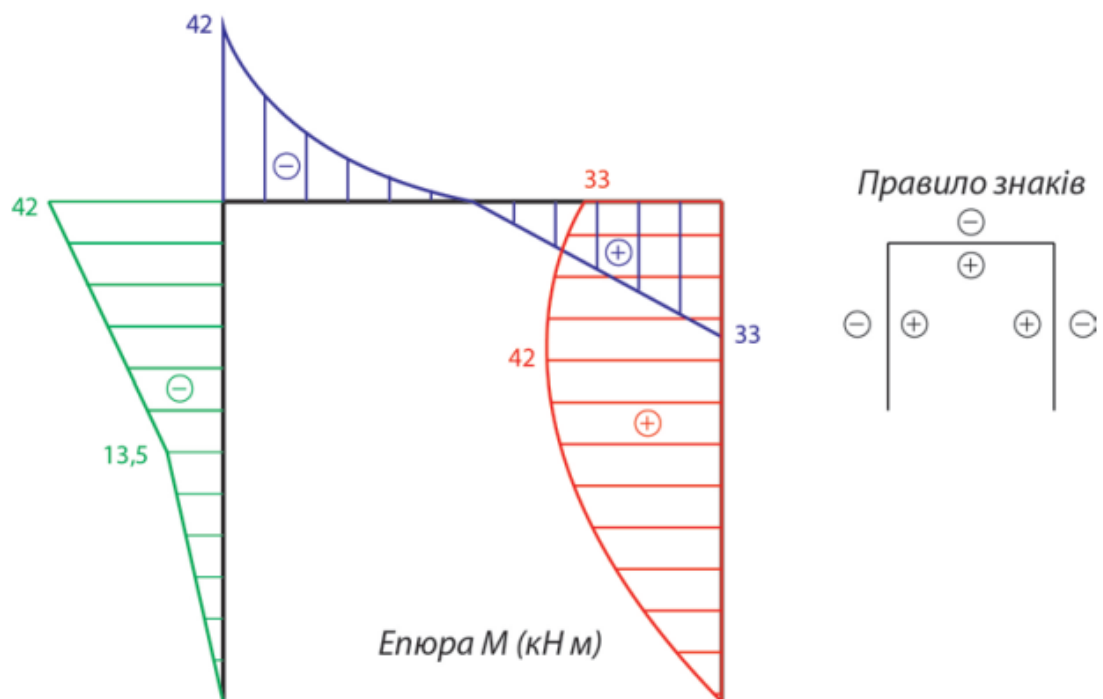
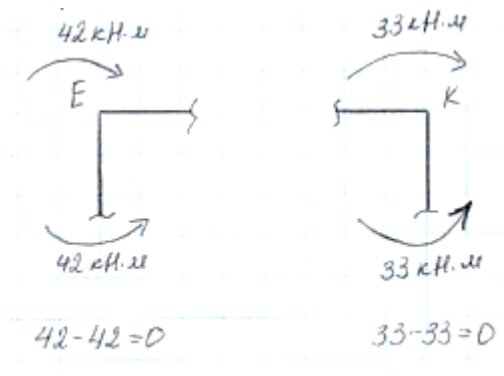


Рис. 4.4. Епюра згинаючих моментів рами

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 45

Перевірка рівноваги жорстких вузлів:



5. Визначення величини поздовжніх сил. Побудова епюри поздовжніх сил. Визначення поздовжніх сил в перерізах рами виконуємо способом вирізання вузлів.

Вирізаємо вузол A:

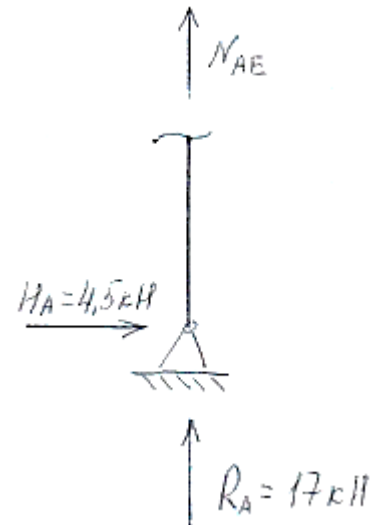
Сума поздовжніх сил в стійці А-Е дорівнює:

$$\sum F_y = 0; N_{AE} + R_A = 0$$

звідки

$$N_{AE} = -R_A = -17, \text{ кН}$$

Стержень стиснутий



Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 46

Вирізаємо вузол В:

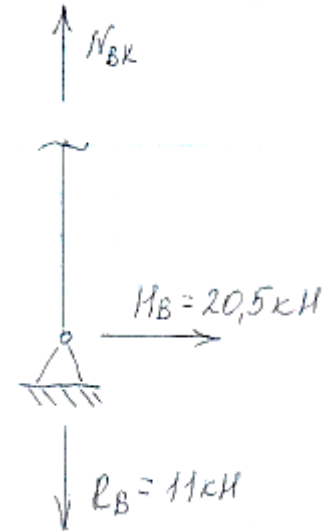
Сума поздовжніх сил в стійці В-К дорівнює:

$$\sum F_y = 0; N_{BK} - R_B = 0$$

звідки

$$N_{BK} = R_B = 11, \text{ кН}$$

Стержень розтягнутий



Ригель (розглядаємо ліву частину):

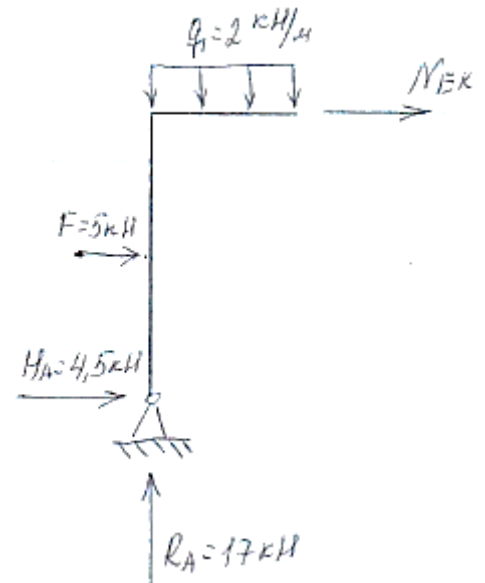
Сума поздовжніх сил в ригелі дорівнює:

$$\sum F_x = 0; N_{EK} + F + H_A = 0$$

звідки

$$N_{EK} = -F - H_A = -5 - 4,5 = -9,5, \text{ кН}$$

Ригель стиснутий



За отриманими даними будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 4.5).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 47

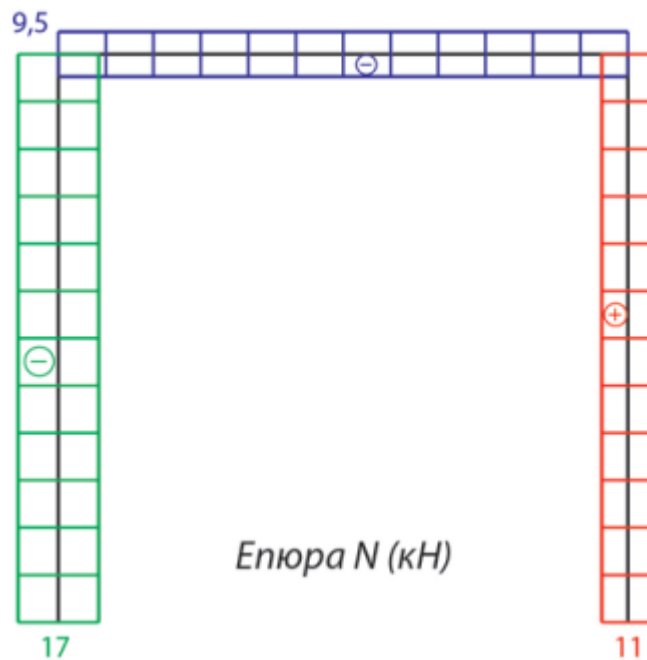


Рис. 4.5. Епюра поздовжніх сил рами

6. Статична перевірка правильності розрахунку. Статичну перевірку правильності розрахунку проводимо на прикладі вузла Е:

$$\sum F_x = 0; H_A + H_B + F - q_2 \cdot 6 = 4,5 + 20,5 + 5 - 5 \cdot 6 = 0$$

$$\sum F_y = 0; R_A - q_1 \cdot 3 - R_B = 17 - 2 \cdot 3 - 11 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0; & -H_A \cdot 6 - F \cdot 3 + q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 + q_2 \cdot 6 \cdot 3 + R_B \cdot 6 - H_B \cdot 6 = \\ & = -4,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 11 \cdot 6 - 20,5 \cdot 6 = 0 \end{aligned}$$

Умова виконується. Розрахунок виконаний вірно.

7. Будуємо епюри згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил в заданій рамі від заданого навантаження в єдиному масштабі, для чого суміщаємо всі побудовані раніше епюри (рис. 4.6).

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 48

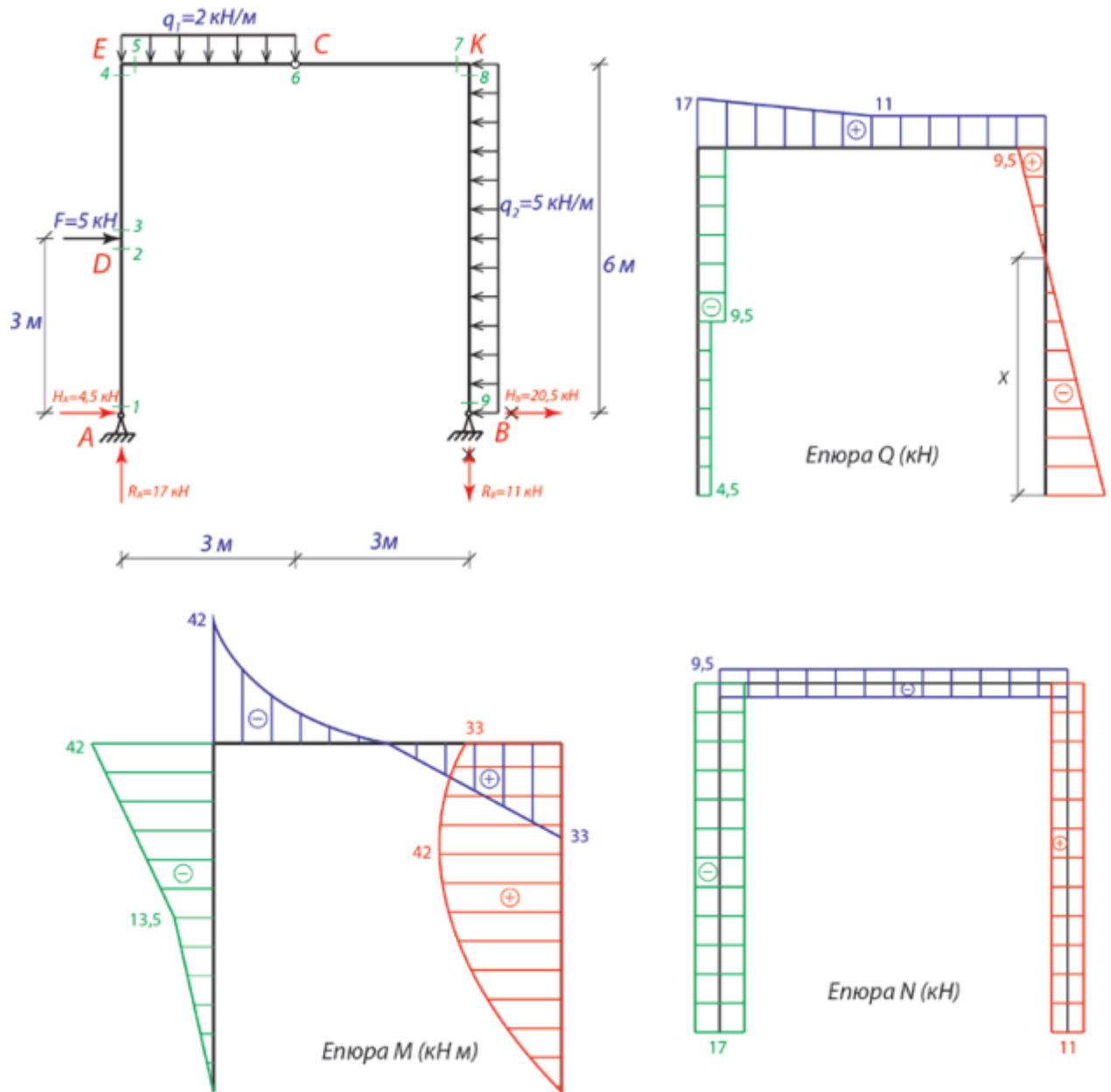


Рис. 4.6. Епюра згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил рами

Питання для самоперевірки

1. Що таке плоска рама, і які її основні елементи?
2. Чим відрізняються стійки та ригелі у конструкції плоскої рами?
3. Що таке балочні та арочні рами, і в чому їх основні відмінності?
4. Яка роль шарнірних і жорстких з'єднань у плоских рамах?
5. Як визначити геометричну незмінюваність і статичну визначеність рами?
6. Які основні внутрішні зусилля визначаються в плоских рамах?
7. Що таке епюра внутрішніх зусиль, і як вона будується для рами?
8. Як визначити опорні реакції в статично визначеній плоскій рамі?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 49

9. Яке правило знаків використовується для згинаючих моментів у рамах?
10. Як виконується розрахунок згинаючих моментів у вузлах рами?
11. Що таке статична перевірка, і як її виконують для плоскої рами?
12. Як змінюється характер епюр згинаючих моментів під впливом зосереджених і розподілених навантажень?
13. Що відбувається в точках зміни знаку епюри поперечних сил?
14. Як розрахувати поперечні сили в характерних перерізах рами?
15. У чому особливості побудови епюр поздовжніх сил у плоских рамах?
16. Як врахувати вплив горизонтальних навантажень на внутрішні зусилля в рамі?
17. Що таке метод вирізання вузлів, і як він застосовується до рами?
18. Як проводиться аналіз рівноваги жорстких вузлів у плоских рамах?
19. Як змінюється характер епюр моментів у зоні жорстких і шарнірних з'єднань?
20. Як побудувати спільну епюру згинаючих моментів, поперечних і поздовжніх сил для всієї рами?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 50

Тема 5. Розрахунок трьохшарнірної арки

Мета роботи. Освоїти методи розрахунку опорних реакцій і горизонтальних зусиль (розпору) для трьохшарнірних арок під дією різних типів навантажень, включаючи рівномірно розподілені та похилі сили.

Теоретичні відомості

Арочними називаються системи криволінійного або ламаного обертання, в опорах яких від вертикального навантаження виникають похилі реакції, спрямовані всередину прольоту. Горизонтальна складова такої похилої реакції називається розпором. Арка, показана на рис. 5.1, називається тришарнірною.

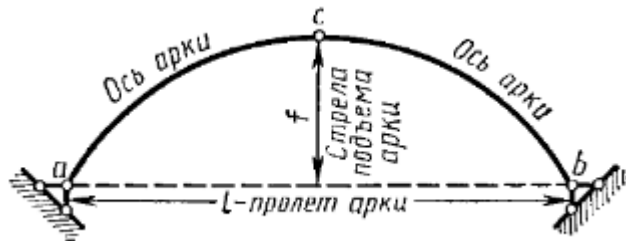


Рис. 5.1. Схема тришарнірної арки

Тришарнірна арка є системою геометрично незмінюваною і статично визначеною.

При дії зовнішнього навантаження на тришарнірну арку (рис. 5.2, а) в кожній її опорі виникають по дві реакції: вертикальні реакції – V_a і V_b , горизонтальні – H_a і H_b (рис. 5.2, б).

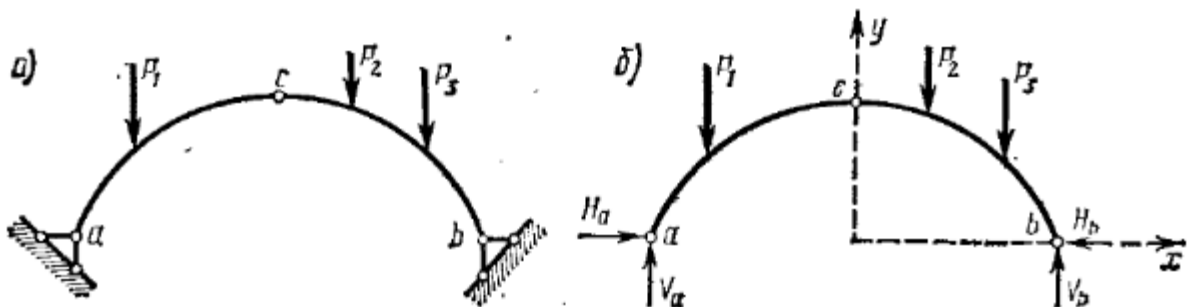


Рис. 5.2. Опорні реакції тришарнірної арки

Крім трьох рівнянь рівноваги, які дає статика для системи сил, розташованих в одній площині, для розрахунку тришарнірної арки потрібно скласти четверте рівняння, основане на тому, що рівнодіюча усіх сил, що

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 51

прикладені до лівої (правої) половині арки, повинна пройти через середній шарнір с. Четверте рівняння статички можна сформулювати наступним чином: алгебраїчна сума моментів сил, що діють на ліву або праву половину арки відносно точки с (середнього шарніра), дорівнює нулю, тобто:

$$\sum M_{\text{лів.сил}}^c = 0$$

або

$$\sum M_{\text{прав.сил}}^c = 0$$

Таким чином, при розрахунку тришарнірної арки можна скласти наступні чотири рівняння:

$$\sum X = 0$$

(всі сили, що діють на арку, проєцируються на вісь X);

$$\sum Y = 0$$

(всі сили, що діють на арку, проєцируються на вісь Y);

$$\sum M = 0$$

(складається сума моментів всіх сил, що діють на арку, відносно довільної точки; зручно в якості такої точки приймати точку а або b):

$$\sum M_{\text{лів.сил}}^c = 0$$

Або

$$\sum M_{\text{прав.сил}}^c = 0$$

Приклад розв'язування задач

Задача 1. Для тришарнірної арки, наведеної на рис. 5.3, визначити опорні реакції від вертикального навантаження.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 52

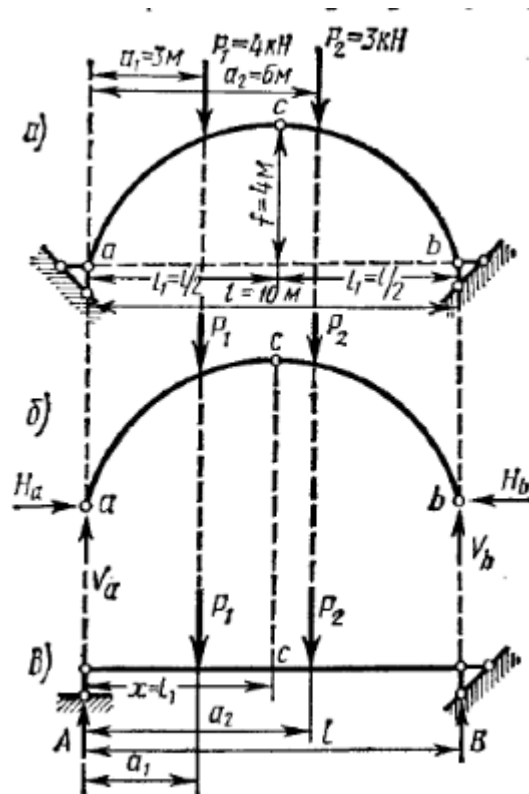


Рис. 5.3. Рисунок до задачі 1

Відкинемо опори і замінимо їх опорними реакціями V_a , H_a і V_b , H_b . Для визначення опорної реакції V_a складемо рівняння суми моментів усіх сил, що діють на арку, відносно точки b:

$$\sum M_b = 0; V_a l - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) = 0$$

$$V_a \cdot 10 - 4 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 0$$

$$V_a = \frac{40}{10} = 4, \text{ кН}$$

де M_b – момент зовнішнього активного навантаження відносно правого опорного шарніра.

Для визначення правої вертикальної реакції V_b складемо рівняння суми моментів усіх сил, що діють на арку, відносно точки a:

$$\sum M_a = 0; P_1 a_1 + P_2 a_2 - V_b l = 0$$

$$4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - V_b \cdot 10 = 0$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 53

$$V_b = \frac{30}{10} = 3, \text{кН}$$

де M_a – момент зовнішнього активного навантаження відносно лівого опорного шарніра.

Отримані для V_a і V_b формули показують, що при дії на арку вертикального навантаження вертикальні складові опорних реакцій відповідно дорівнюють опорним реакціям простої двохопорної балки з прольотом, рівним прольоту арки (рис. 5.3, в).

Складемо рівняння суми проекцій усіх сил на вісь Х:

$$\sum F_x = H_a - H_b = 0$$

$$H_a = H_b = H$$

Для визначення числової величини розпору H прирівнюємо до нуля суму моментів усіх сил, що діють на ліву частину балки відносно шарніру с:

$$\sum M_{\text{лів}}^c = 0; V_a \frac{l}{2} - P_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - Hf = 0$$

$$4 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - H \cdot 4 = 0$$

$$H = \frac{12}{4} = 3, \text{кН}$$

Відповідь: опорні реакції арки $V_a = 4$ кН, $V_b = 3$ кН, $H = 3$ кН.

Задача 2. Визначити розпір арки, зображеної на рис. 5.4, від рівномірно розподіленого навантаження, якщо $l = 10$ м, $q = 2$ кН/м, $f = 5$ м.

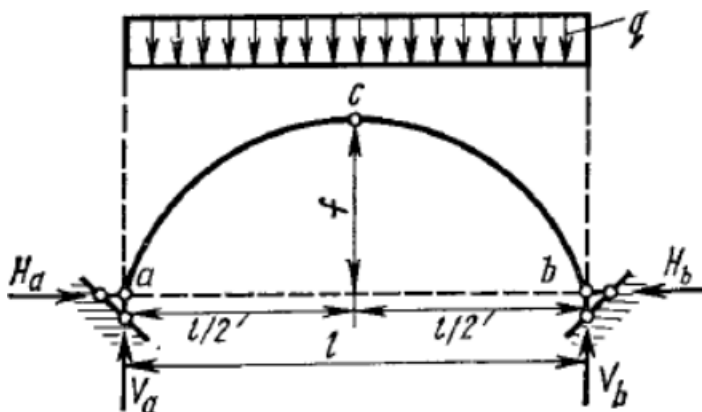


Рис. 5.4. Рисунок до задачі 2

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 54

Визначаємо вертикальні опорні реакції з рівнянь статки:

$$\sum M_b = 0; V_a l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$V_a = q \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{10}{2} = 10, \text{кН}$$

$$\sum M_a = 0; -V_b l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$V_b = q \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{10}{2} = 10, \text{кН}$$

Визначаємо розпір арки з рівняння суми моментів сил, що діють на ліву половину арки, відносно шарніру с:

$$\sum M_{\text{лів}}^c = 0; V_a \cdot \frac{l}{2} - H \cdot f - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0$$

$$H = \frac{V_a \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}}{f} = \frac{10 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5}{5} = 5, \text{кН}$$

Відповідь: розпір арки $H = 5 \text{ кН}$.

Задача 3. Визначити опорні реакції від похилої сили $P = 5 \text{ кН}$, що діє на арку (рис. 5.5), якщо $\cos \alpha = 0,6$, $\sin \alpha = 0,8$.

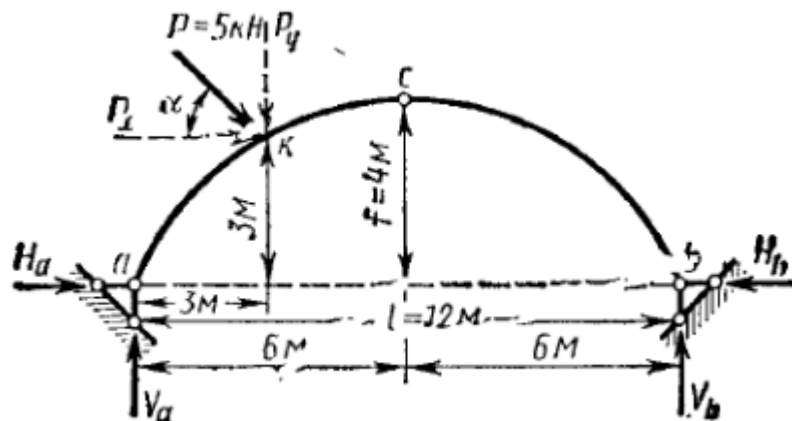


Рис. 5.5. Рисунок до задачі 3

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 55

1) Розкладаємо силу P на вертикальну і горизонтальну складові:

$$P_y = P \sin \alpha = 5 \cdot 0,8 = 4, \text{ кН}$$

$$P_x = P \cos \alpha = 5 \cdot 0,6 = 3, \text{ кН}$$

2) Визначаємо опорні реакції V_a і V_b :

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - P_y \cdot 9 + P_x \cdot 3 = 0$$

$$V_a = 12 - 4 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 0$$

$$V_a = \frac{27}{12} = 2,25, \text{ кН}$$

$$\sum M_a = P_y \cdot 3 - V_b \cdot 12 + P_x \cdot 3 = 0$$

$$4 \cdot 3 - V_b \cdot 12 + 3 \cdot 3 = 0$$

$$V_b = \frac{21}{12} = 1,78, \text{ кН}$$

3) Для визначення горизонтальної реакції H_a складемо рівняння для моменту усіх сил, що діють на ліву половину арки, відносно шарніра c :

$$\sum M_{\text{лів}}^c = V_a \cdot 6 - P_y \cdot 3 - H_a \cdot 4 - P_x(4 - 3) = 0$$

$$2,25 \cdot 6 - 4 \cdot 3 - H_a \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 0$$

$$H_a = -\frac{1,5}{4} = -0,375, \text{ кН}$$

Знак мінус вказує на те, що в даному випадку сила H_a спрямована вліво. Для визначення H_b складемо суму проекцій усіх сил на горизонтальну вісь X :

$$\sum X = H_a + P_x - H_b = 0$$

$$H_b = H_a + P_x = -0,375 + 3 = 2,625, \text{ кН}$$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 56

Відповідь: опорні реакції балки $V_a = 2,25$ кН, $V_b = 1,75$ кН, $H_a = 0,375$ кН, $H_b = 2,625$ кН.

Питання для самоперевірки

1. Що таке трьохшарнірна арка, і які її основні елементи?
2. Чим відрізняються трьохшарнірна арка і балка з точки зору опорних реакцій?
3. Які сили виникають у трьохшарнірній арці при вертикальному навантаженні?
4. Що таке розпір у трьохшарнірній арці?
5. Як визначити геометричну незмінюваність і статичну визначеність трьохшарнірної арки?
6. Яке рівняння статички застосовується для визначення опорних реакцій у трьохшарнірній арці?
7. Як скласти четверте рівняння рівноваги для трьохшарнірної арки?
8. Як обчислюються горизонтальні та вертикальні опорні реакції в арці?
9. Яке значення мають моменти відносно середнього шарніра у трьохшарнірній арці?
10. Як розраховуються опорні реакції для арки під дією рівномірно розподіленого навантаження?
11. Як впливає висота підйому арки на величину розпору?
12. Що відбувається зі значенням розпору при зміні форми арки?
13. Як визначаються опорні реакції арки під дією похилої сили?
14. Які особливості розрахунку трьохшарнірної арки під дією зосереджених сил?
15. Як впливає розташування навантаження на розподіл внутрішніх зусиль у трьохшарнірній арці?
16. Як змінюється розпір, якщо навантаження прикладене тільки до однієї половини арки?
17. Чим відрізняється побудова епюр моментів у трьохшарнірній арці порівняно з балкою?
18. Які особливості розрахунку трьохшарнірної арки з нерівномірно розподіленим навантаженням?
19. Як побудувати лінії впливу для трьохшарнірної арки?
20. Які переваги трьохшарнірної арки порівняно з іншими типами конструкцій?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 57

Тема 6. Розрахунок зусиль у фермі

Мета роботи. Вивчення методів визначення зусиль у стержнях ферм, зокрема, способів вирізання вузлів і перерізів, а також оцінка статичної визначеності ферми.

Теоретичні відомості

Ферми, утворені з шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів за допомогою 2-х стержнів, що не лежать на одній прямій, називаються найпростішими. Такі ферми статично визначені і геометрично незмінювані.

Розрахунок ферм полягає у визначенні зусиль в її стержнях. Зазвичай попередньо знаходять реакції опор, розглядаючи ферму в цілому. Далі для визначення зусиль у її стержнях застосовують метод перерізів. Визначення зусиль в стержнях ферми статичним методом виконується за допомогою модифікації загального методу перерізів: способу вирізання вузлів, наскрізних перерізів, сумісних перерізів

Приклад розв'язання задач

Визначити зусилля в стержнях ферми (рис. 6.1) способом вирізання вузлів, якщо задано $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 5$ кН.

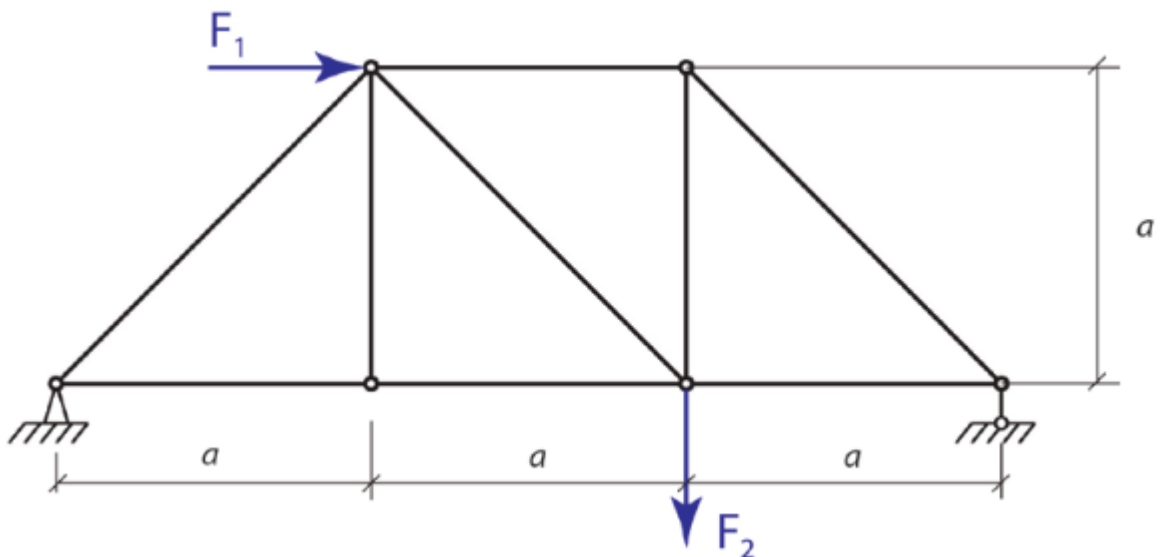


Рис. 6.1. Схема ферми

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 58

1. Позначаємо літерами всі вузли ферми і нумеруємо стержні (рис. 6.2).

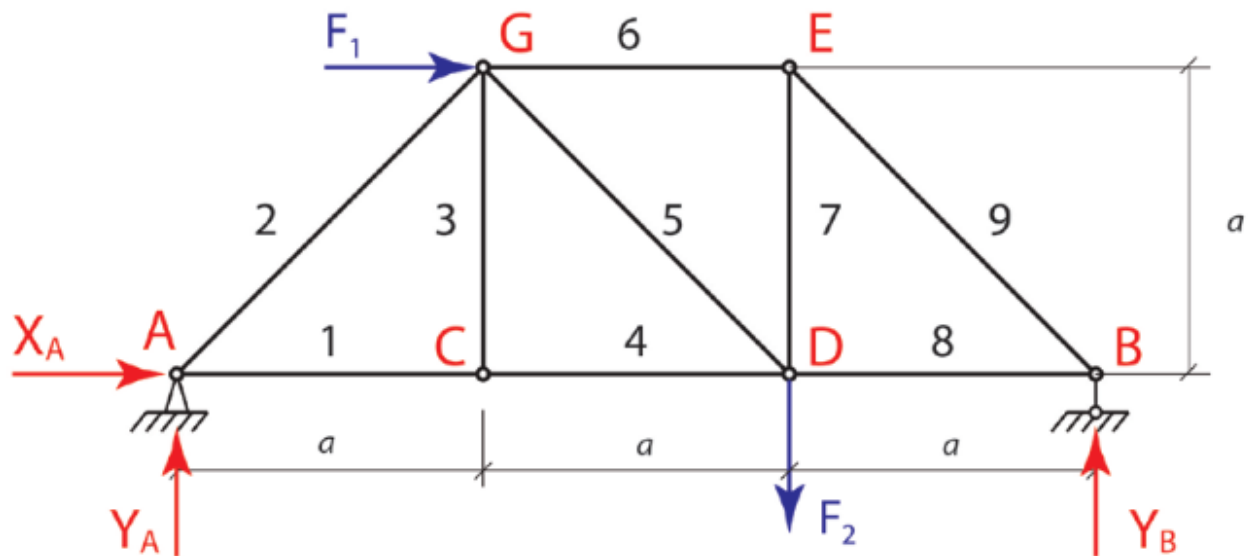


Рис. 6.2. Розрахункова схема ферми

2. Визначаємо опорні реакції. Для цього розглядається рівновага всієї ферми в цілому:

$$\sum F_x = 0; X_A + F_1 = 0$$

$$X_A = -F_1 = -2, \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0; F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a - Y_B \cdot 3a = 0$$

$$Y_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot a}{3 \cdot a} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2}{3} = 4, \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0; Y_A - F_2 + Y_B = 0$$

$$Y_A = F_2 - Y_B = 5 - 4 = 1, \text{ кН}$$

Для перевірки отриманих результатів складаємо рівняння моментів відносно такої точки, відносно якої всі розраховані сили реакцій створюють ненульові моменти:

Умова виконується, сили реакцій опор знайдені вірно.

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 59

3. Визначаємо зусилля в стержнях способом вирізання вузлів.

Метод вирізання вузлів полягає в тому, що розглядається рівновага кожного вузла. На кожний вузол діє плоска система збіжних сил, що складається з прикладених до даного вузла активних сил і реакцій стержнів, приєднаних до даного вузла (рис. 6.3).

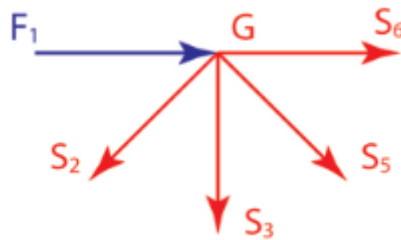


Рис. 6.3. Схема розподілення сил у вузлі G

Для такої системи сил можна скласти тільки два рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0$$

Тому рівновагу вузлів треба розглядати в певній послідовності, яка дозволяє на кожному кроці рішення задачі визначати дві чергові невідомі, тобто у кожному новому вузлі повинно бути не більше двох невідомих зусиль.

Вирізаємо вузол B і розглядаємо його рівновагу (рис. 6.4):

$$\sum F_y = 0; Y_B + S_9 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_9 = -\frac{Y_B}{\sin 45^\circ} = -\frac{4}{\sqrt{2}/2} = -4\sqrt{2}, \text{ кН}$$

$$\sum F_x = 0; -S_8 - S_9 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_8 = -S_9 \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4, \text{ кН}$$

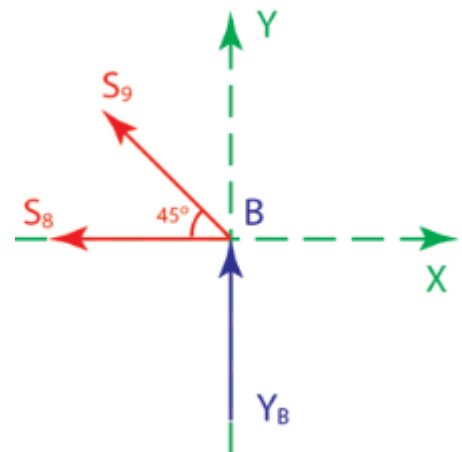


Рис. 6.4. Рівновага сил у вузлі B

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 60

Вирізаємо вузол Е і розглядаємо його рівновагу (рис. 6.5):

$$\sum F_x = 0; -S_6 + S_9 \cos 45^\circ = 0$$

$$S_6 = S_9 \cos 45^\circ = -4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4, \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0; -S_7 - S_9 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_7 = -S_9 \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4, \text{ кН}$$

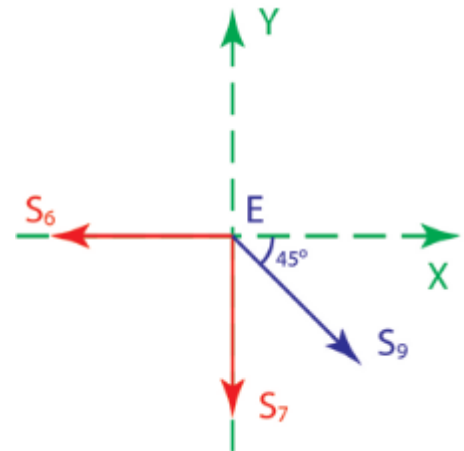


Рис. 6.5. Рівновага сил у вузлі Е

Вирізаємо вузол D і розглядаємо його рівновагу (рис. 6.6):

$$\sum F_y = 0; S_5 \sin 45^\circ + S_7 - F_2 = 0$$

$$S_5 = \frac{F_2 - S_7}{\sin 45^\circ} = (5 - 4)\sqrt{2} = \sqrt{2}, \text{ кН}$$

$$\sum F_x = 0; -S_4 - S_5 \cos 45^\circ + S_8 = 0$$

$$S_4 = -S_5 \cos 45^\circ + S_8 = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 3, \text{ кН}$$

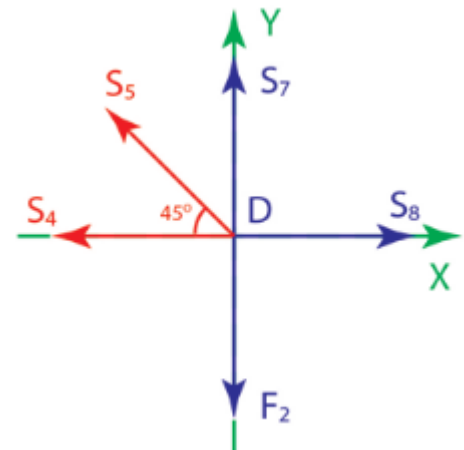


Рис. 6.6. Рівновага сил у вузлі D

Вирізаємо вузол С і розглядаємо його рівновагу (рис. 6.7):

$$\sum F_x = 0; -S_1 + S_4 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3, \text{ кН}$$

$$\sum F_y = 0; S_3 = 0$$

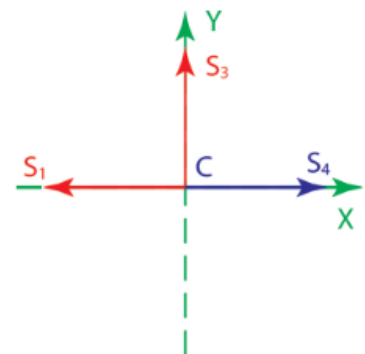


Рис. 7.7. Рівновага сил у вузлі С

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 61

Вирізаємо вузол А і розглядаємо його рівновагу (рис. 6.8):

$$\sum F_y = 0; S_2 \sin 45^\circ + Y_A = 0$$

В якості перевірки застосовуємо рівняння:

$$\sum F_x = 0$$

$$X_A + S_1 + S_2 \cos 45^\circ = -2 + 3 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$0 = 0$$

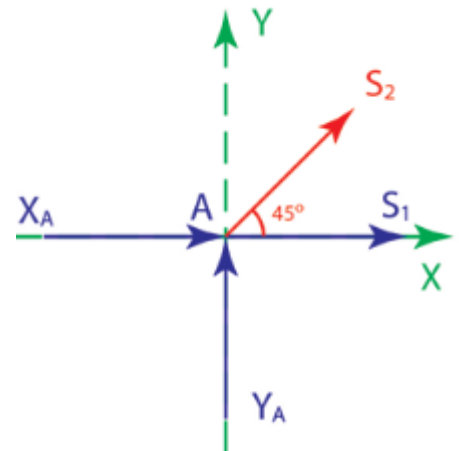


Рис. 6.8. Рівновага сил у вузлі А

Вирізаємо вузол G і перевіряємо правильність розрахунків (рис. 6.9):

$$\sum F_x = 0$$

$$F_1 + S_6 - S_2 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ =$$

$$= 2 - 4 + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$0 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-S_2 \sin 45^\circ - S_5 \sin 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$0 = 0$$

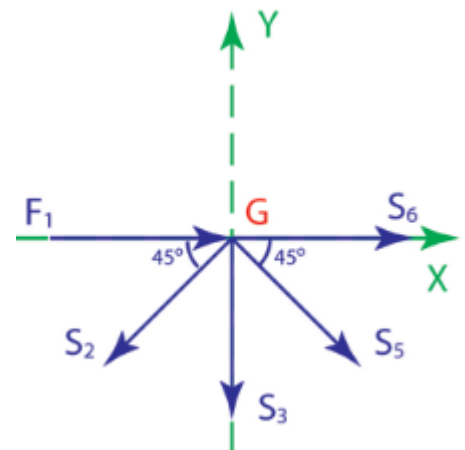


Рис. 6.9. Рівновага сил у вузлі G

Умова виконується, розрахунки виконані вірно.

Результати розрахунку заносимо до таблиці:

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зусилля, кН	3	$-\sqrt{2}$	0	3	$\sqrt{2}$	-4	4	4	$-4\sqrt{2}$

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 62

Питання для самоперевірки

1. Що таке ферма, і які її основні елементи?
2. Що означає термін «шарнірний трикутник» у контексті ферм?
3. Як визначити геометричну незмінюваність ферми?
4. Що таке найпростіша ферма, і як вона утворюється?
5. Які умови повинна виконувати ферма, щоб бути статично визначеною?
6. Як визначаються опорні реакції для ферми?
7. Які методи використовуються для розрахунку зусиль у стержнях ферми?
8. Що таке метод вирізання вузлів, і як його застосовують у фермах?
9. У чому полягає метод наскрізних перерізів?
10. Як визначити зусилля у стержнях, що не перетинаються в одному вузлі?
11. Як впливає форма ферми на її стійкість і жорсткість?
12. Як розраховуються зусилля у стержнях ферми під дією зосередженого навантаження?
13. Що відбувається із зусиллями у фермі, якщо змінюється розташування навантаження?
14. Як визначаються зусилля у стержнях ферми під дією рівномірно розподіленого навантаження?
15. Як змінюється тип зусилля у стержні (розтягнення або стиснення) залежно від напрямку навантаження?
16. Чому ферми з рівнобічними трикутниками є більш стабільними?
17. Який вплив на стійкість ферми має наявність додаткових стержнів?
18. Як побудувати епюру зусиль для ферми?
19. Що відрізняє просту ферму від складної ферми?
20. Які переваги ферм як конструкцій порівняно з балками або рамами?

Житомирська політехніка	МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЖИТОМИРСЬКА ПОЛІТЕХНІКА» Система управління якістю відповідає ДСТУ ISO 9001:2015			Ф-23.05- 05.02/2/192.00.1/Б/ОК22- 2024
	Випуск 1	Зміни 0	Екземпляр № 1	Арк 63 / 63

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Чихладзе Е.Д. Будівельна механіка: Підручник. – Харків: УкрДАЗТ, 2011. – 320 с., рис. 234, табл. 14. – ISBN 978-966-2033-49-6
2. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навчальний посібник / [В. А. Баженов, Г. М. Іванченко, О. В. Шишов, С. О. Пискунов]. – Київ: «Каравела», 2010. – 502 с. – ISBN 966-8019-60-1.
3. Моргун А. С., Сорока М. М. Будівельна механіка та будівельні конструкції: навчальний посібник – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 243 с. – ISBN 978-966-641-385-0.
4. Яременко О.Ф., Шибанін В.С., Орлова А.М., Сорока М.М., Калініна Т.О. Будівельна механіка у прикладах: Посібник. – Одеса, 2003 р. – 246 с.
2. Попович Б.С., Давидчак О.Р. Будівельна механіка статично визначених стержневих систем: Навчальний посібник. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2007. – 194 с. – ISBN 978-617-555-4.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Будівельна механіка: Конспект лекцій / уклад. О.Ф. Шмаль. – Любешів : Любешівський технічний коледж Луцького НТУ, 2020. – 57 с. – URL: <https://btpm.nmu.org.ua/ua/download/lecture-course/%D0%A8%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C.%D0%91%D0%9C.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
2. Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу Будівельна механіка: для студентів 3 курсу денної форми навчання галузі знань 19 – Архітектура та будівництво / В. П. Шпачук, М. А. Засядько, О. І. Рубаненко, О. О. Чупринін; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 177 с. URL: <https://btpm.nmu.org.ua/ua/download/lecture-course/%D0%A8%D0%BF%D0%B0%D1%87%D1%83%D0%BA.%D0%97%D0%B0%D1%81%D1%8F%D0%B4%D1%8C%D0%BA%D0%BE.%D0%91%D0%9C.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
3. Методичні рекомендації і завдання до організації самостійної роботи, підготовки до практичних занять і контрольних робіт із навчальної дисципліни «Будівельна механіка» (для бакалаврів 2–3 курсу денної і заочної форм навчання за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / уклад. О. О. Чупринін, М. А. Засядько, О. І. Рубаненко. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 41 с. – URL: <https://eprints.kname.edu.ua/56333/1/2019%20%D0%BF%D0%B5%D1%87.%20168%D0%9C.pdf>