ЛЕКЦІЯ 7.

КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

ПЛАН

1. Елементи комбінаторики
2. Комбінаторні задачі
3. Комбінації. Перестановки. Розміщення.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Комбінаторика зародилася ще в XVII столітті, але самостійною науковою дисципліною сформувалася лише у XX сторіччі і на сьогодні є потужним інструментом для розв'язання різноманітних завдань.

Комбінаторний аналіз – це розділ дискретної математики, який вивчає методи підрахунку різних конфігурацій, що утворюються із заданих елементів.

Комбінаторика є міждисциплінарною наукою, яка тісно пов'язана з теорією ймовірностей, статистикою, теорією графів та іншими математичними дисциплінами. Вона надає потужні інструменти для моделювання складних систем та вирішення завдань оптимізації, що виникають у різних галузях науки та техніки.

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Магічний квадрат. Розташувати числа від 1 до 9 у вигляді квадрата так, щоб сума чисел будьякого із стовпців, рядків або діагоналей була однаковою. Доведемо можливість побудови 880 типів магічних квадратів 4-го порядку.

4 9 2

3 5 7

8 1 6

Давньогрецькі філософи запропонували концепцію "**квадрата числа**", візуалізуючи квадрати натуральних чисел у вигляді кам'яних укладок.

		0 0 0
	0 0	0 0 0
0	0 0	0 0 0

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Розрахуємо кількість поєднань планет за завданням Бена Езри

Завдання: Розрахувати кількість поєднань семи планет по 2, 3, 4 …

Для вирішення цього завдання ми використовуємо комбінаторику.

Кількість поєднань із n елементів по k: $C(n, k) = n! / (k! (n-k)!)$

$n = 7$ (кількість планет)

2: $C(7, 2) = 7! / (2! * 5!) = 21$

3: $C(7, 3) = 7! / (3! * 4!) = 35$

4: $C(7, 4) = 7! / (4! * 3!) = 35$

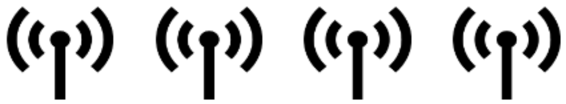
5: $C(7, 5) = 7! / (5! * 2!) = 21$

6: $C(7, 6) = 7! / (6! * 1!) = 7$

7: $C(7, 7) = 7! / (7! * 0!) = 1$

ПРИКЛАД

Система зв'язку складається з чотирьох антен.



Скільки існує ймовірностей того, що рівно дві антени можуть бути дефектними?

Наївний спосіб: Перерахувати всі можливості - 0110, 0101, 1010, 0011, 1001, 1100

Маємо систему із 4 антен.

Кожна антена може бути або справною, або дефектною.

Нам потрібно знайти кількість можливих комбінацій, коли саме 2 антени є дефектними.

Оскільки порядок антен не має значення (не важливо, яка саме антен перша, друга …), ми маємо справу з **комбінаціями** . Нам потрібно вибрати 2 дефектні антени з 4.

Кількість комбінацій з n елементів по k :

C(n, k) = n! / (k! * (n-k)!)

де: n - загальна кількість елементів (n = 4 антени); k - кількість елементів, які ми вибираємо (k = 2 в даному випадку, дефектні антени)

C(4, 2) = 4! / (2! * 2!) = 24 / 4 = 6

Результат: Існує **6 різних способів** вибрати 2 дефектні антени з 4. Тобто, є 6 різних комбінацій, коли рівно дві антени можуть бути дефектними.

ПРИКЛАД

Приклад.
Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
якщо:
1) цифри в числі не повторюються;
2) цифри можуть повторюватись;
3) цифри повинні бути парними?

1) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. *Якщо першу цифру вибрано, то другу можна вибрати сімома способами, третю – шістьма способами, четверту – п'ятьма способами.* Отже, всього способів вибору цифр для чотиризначного числа $7\times7\times6\times5 = 1470$.
2) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Кожну з останніх цифр можна вибирати вісьмома способами. Отже, кількість чотиризначних чисел, в яких допускається повторювання цифр, дорівнює: $7\times8\times8\times8 = 3584$.
3) Першою цифрою числа може бути одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Останньою – одна з цифр 0, 2, 4, 6. Тому кількість парних чисел = $7\times8\times8\times4 = 1792$.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторний аналіз (комбінаторика) – розділ дискретної математики, що вивчає способи вирішення задач перерахунку і перелічення елементів у деякій скінченій множині $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Комбінаторика присвячена рішенню задач вибору та розташування елементів деякої множини відповідно до заданих правил. Кожне таке правило визначає спосіб побудови деякої конструкції з елементів цієї множини, яка має назву *комбінаторної конфігурації*.

Найпростішими прикладами комбінаторних конструкцій є *перестановки, розміщення, сполучення та розбиття*.

Обчислення на дискретних математичних структурах - *комбінаторні обчислення* - вимагають комбінаторного аналізу для встановлення властивостей і оцінки застосовності алгоритмів.

ОСНОВНІ ОБ'ЄКТИ ВИВЧЕННЯ

1. **Перестановки.** Різні способи розташування всіх елементів множини у певній послідовності.

2. **Розміщення.** Способи вибору та розташування k елементів з n різних елементів у певному порядку. Наприклад, розміщення по 2 елементи із множини {1, 2, 3} - це (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2).

3. **Комбінації (сполучення).** Способи вибору k елементів з n різних елементів без урахування їх порядку. Наприклад, комбінації по 2 елементи із множини {1, 2, 3} - це {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}..

4. **Розбиття множин.** Способи розподілу множини на неперетинні підмножини. Наприклад, розбиття множини {1, 2, 3} на дві підмножини - це {{1}, {2, 3}}, {{2}, {1, 3}}, {{3}, {1, 2} }.

КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ

ПРАВИЛО СУМИ
(КОМБІНАТОРНИЙ ПРИНЦИП ДОДАВАННЯ)

Якщо об'єкт $\alpha \in A$ можна вибрати m способами, а об'єкт $\beta \in B$, відмінний від α, вибрати n способами, причому α і β не можна вибирати одночасно, то здійснити вибір «або α, або β» можна $m+n$ способами.

Приклад. Нехай у кіоску є 5 різних книжок з математики і 7 - з фізики. Якщо студент може купити тільки одну книжку, то в нього є 5 варіантів вибору першої книжки і 7 варіантів – другої. Тобто у студента є 12 варіантів.

ПРАВИЛО ДОБУТКУ
(КОМБІНАТОРНИЙ ПРИНЦИП МНОЖЕННЯ)

***Правило добутку.* Нехай необхідно виконати послідовно k дій, кожну з яких можна здійснити n_i (i=1,…,k) способами.**
Тоді всі k дій можна здійснити $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

Якщо об'єкт $\alpha \in A$ можна вибрати *m* способами, а після кожного такого вибору можна вибрати *n* способами об'єкт $\beta \in B$, відмінний від α, то вибір обох об'єктів α і β у зазначеному порядку можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Приклад. Нехай у салоні зв'язку є 50 різних моделей стільникових телефонів і по три види чохлів для кожної моделі. Скількома способами можна вибрати телефон і чохол до нього?
Очевидно: вибравши телефон (50 способів), можна 3 способами вибрати чохол, тобто всього 50*3=150 варіантів..

ПРИКЛАД

Задача.

У класі 12 хлопчиків і 10 дівчаток.

а) Скількома способами можна вибрати одного учня цього класу?

б) Скількома способам двох — хлопчика і дівчинку?

в) Скількома способами можна вибрати дівчинку?

а) Скількома способами можна вибрати одного учня цього класу?

Оскільки в класі 12 хлопчиків та 10 дівчаток, загальна кількість учнів: 12 + 10 = 22. Отже, вибрати одного ученика можна **22 способами** .

б) Скількома способами можна вибрати двох — хлопчика і дівчинку?

Хлопчика можна вибрати 12 способами. Дівчинку можна вибрати 10 способами.

За правилом добутку, вибрати хлопчика і дівчинку можна 12*10= **120 способами** .

в) Скількома способами можна вибрати дівчинку?

Оскільки в класі 10 дівчаток, то вибрати одну дівчинку можна **10 способами** .

ПРИКЛАД

Задача.

У класі 12 хлопчиків і 10 дівчаток.

Вже вибрано одного учня. Скількома способами можна вибрати після цього хлопчика і дівчинку?

Якщо першим було вибрано хлопчика, то для дівчинки залишається 10 варіантів, а для хлопчика - 11 (оскільки одного хлопчика вже вибрали).

За правилом добутку маємо 10*11 = 110 способів.

Якщо першим було вибрано дівчинку, то для хлопчика залишається 12 варіантів, а для дівчинки - 9.

За правилом добутку маємо 12 * 9 = 108 способів .

Загальна кількість способів: 110 + 108 = 218

КОМБІНАЦІЇ. ПЕРЕСТАНОВКИ. РОЗМІЩЕННЯ.

РОЗМІЩЕННЯ І ПЕРЕСТАНОВКИ БЕЗ ПОВТОРЕНЬ

Нехай *M = {a1, a2, ..., an}* - фіксована множина.

Визначення:

Упорядковані підмножини з *k* елементів *(b1, b2 , ..., bk)* множини М називаються *перестановками* *k* елементів. Можна сказати, що k-перестановка (b1, b2, ..., ..., bk) - це розміщення у визначеному порядку k елементів із множини М.

Визначення:

k-переставновок множини з n елементів називають *розміщеннями* з n по k елементів.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Якщо є множина з n різних елементів, то *загальна кількість всіх можливих перестановок* цих елементів обчислюється за формулою:

$$P_n = n!$$

де: P_n - число перестановок n елементів

Приклад:

Є три різні фрукти: яблуко, груша та банан.

Скількома способами можна розмістити їх в ряд?

n = 3 (три фрукти)

$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$

Варіанти розташування:

1. Яблуко, Груша, Банан
2. Яблуко, Банан, Груша
3. Груша, Яблуко, Банан
4. Груша, Банан, Яблуко
5. Банан, Яблуко, Груша
6. Банан, Груша, Яблуко

ПРИКЛАД

Для створення чотиризначного коду запропоновано використовувати цифри 0, 1, 2, 3 без повторення.

Визначити, скільки варіантів коду можна скласти.

Розв’язання
Потужність множини становить n=4. Оскільки мова йде про використання всіх елементів множини, то дана *комбінаторна конфігурація* є перестановками. За формулою кількість перестановок дорівнює:

$$P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$$

Відповідь: існують 24 варіанти створення коду.

РОЗМІЩЕННЯ

Нехай задана деяка скінчена множина A={a1,a2,…,an} – генеральна сукупність. Вибіркою генеральної сукупності називається конструкція, що складається з r-елементів.

Число елементів вибірки називається її об'ємом.

Вибірка об’єму r називається r-вибіркою.

Вибірка називається впорядкованою (невпорядкованою) якщо порядок елементів існує (не існує).

Розміщенням з n елементів по k називається впорядкована k-вибірка з n-елементів генеральної сукупності.

РОЗМІЩЕННЯ

Позначення.

A_n^k – кількість k-розміщень з n елементів множини M.

Під час обирання *розміщень* перший елемент може бути вибраний n способами, оскільки існує можливість не залежного вибору з n елементів, другий - (n - 1) різними способами, тому що незалежний вибір здійснюється з (n - 1) елементу, що залишилися, k-ий елемент – відповідним чином з n - k + 1 способами. При цьому діє правило добутку:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

Якщо n = k, тоді A_n^n - кількість усіх способів впорядкування цих елементів :

$$P_n = A_n^n = n!$$

РОЗМІЩЕННЯ З ПОВТОРЕННЯМ

Розміщенням з повторенням з n елементів по k (k-розміщення з повторенням з n) називається кортеж довжини k з n елементів.

Кількість k-розміщень з n елементів обчислюється за формою:

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Приклад. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2?

n = 3, k = 4 (чотири знаки).

Таким чином, кількість чисел дорівнює $3^4 = 81$.

РОЗМІЩЕННЯ

Число розміщень з n по k без повторень позначають

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

з повтореннями

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Наприклад,
Число розміщень без повторень = 6

з повтореннями =9

Приклад.

Нехай n = 3, k = 2, A = {a, b, c}.

<a, d>; <a, c> ;<b, a> ;<b, c> ; <c, a> <c, b>.

Розміщення з повторенням до вказаного списку додасть ще три розміщення
<a, a>; <b, b> ;<c, c>

ПЕРЕСТАНОВКИ З ПОВТОРЕННЯМИ

Якщо у множині з n елементів є k1 елементів одного виду, k2 …km елементів іншого виду, то число різних *перестановок* обчислюється за формулою:

P(n, k1, k2, ..., km) = n! / (k1! * k2! * ... * km!)

Приклад. Скільки різних слів можна скласти з літер слова Міссісіпі ?

n = 9 (загальна кількість літер)

k1 = 4 (літера "І")

k2 = 3 (літера "С")

k3 = 1 (літера "М")

k4 = 1 (літера «П")

P(9, 4, 3, 1, 1) = 9! / (4! * 3! * 1! * 1!) = 2520

КОМБІНАЦІЇ (СПОЛУЧЕННЯ)

Сполученням з n по k називається невпорядкована вибірка з n-елементів генеральної сукупності.

Приклад. У випадку коли n = 3, k = 2 маємо A = {a, b, c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}.

Якщо говорити про сполучення з повтореннями, то до вказаного списку додасться ще три наступні сполучення: {a, a}, {b, b}, {c, c}.

Число сполучень з n по k (*без повторень*) позначають:

$$C_n^k \text{ або } \binom{n}{k}$$

з *повтореннями:*

$$\overline{C}_n^k$$

ВИВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ДЛЯ СПОЛУЧЕНЬ БЕЗ ПОВТОРЕНЬ

Всяке розміщення з n по k можна отримати за допомогою процедури з двох дій:

1) вибір елементів, що входять в розміщення (тобто вибір поєднань з n по k);

2) перестановкою вибраних елементів.

За правилом добутку отримуємо: $A_n^k = C_n^k \cdot k!$,

або $$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ПРИКЛАД

Завдання:
Нехай є 10 експертів галузі.

Скількома способами можна вибрати комітет із 3 особин?

Розв'язання:

Оскільки порядок вибору членів комітету не має значення, використовуємо формулу для *комбінацій*:

C(n, k) = n! /(k!(n-k)!)

у нашому випадку n = 10 (загальна кількість осіб), k = 3 (кількість осіб у комітеті).

C(10, 3) = 10! /(3!(10-3)!)= 120 способів.

ПРИКЛАД

Здійснюється вибіркова перевірка якості виробів.
З партії, що складається з 15 виробів, навмання відібрали 3.

Скільки існує способів відібрати ті вироби, що будуть проходити перевірку?

Розв'язання
За умови задачі маємо n=15, m=3, при цьому спосіб розташування елементів у вибірковій сукупності не має значення. Отже, кількість способів відбору визначається як кількість сполучень:

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!} = 455$$

Відповідь: існує 455 способів сформувати вибіркову сукупність.

ВИВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ДЛЯ СПОЛУЧЕНЬ БЕЗ ПОВТОРЕНЬ

Різним комбінаціям (або невпорядкованим вибіркам) відповідають *різні перестановки з повтореннями*. Таким чином, *кількість k-поєднань із повтореннями з елементів n типів*

дорівнює кількості перестановок із повторе $\overline{C}_n^k$ и з k одиниць і n - 1 нулів:

$$\overline{C_n^k} = P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Додамо умову - у комбінації мають входити елементи кількох фіксованих типів (r) r ≤ n. Щоб виконати цю умову, візьмемо відразу ж по одному елементу з даних r типів. Таким чином, у k-сполученні будуть зайнятими r місць, інші k - r місць можна заповнити будь-якими елементами, тому сполучення будемо шукати наступним чином

$$\overline{C_n^{k-r}} = C_{n+k-r-1}^{k-r} = \frac{(k+n-r-1)!}{(k-r)!(n-1)!}$$

ПРИКЛАД

Знайти кількість розміщень з n однакових предметів у m різних урнах.

Це класична задача комбінаторики, яка має назву ***задача про розподіл куль по комірках*** .

Розв'язок:

Для розв'язання цього завдання скористаємося поняттям **комбінації з повторенням**.

Кількість способів розподілити n однакових предметів по m різних урнах дорівнює:

$C(n+m-1, m-1)$

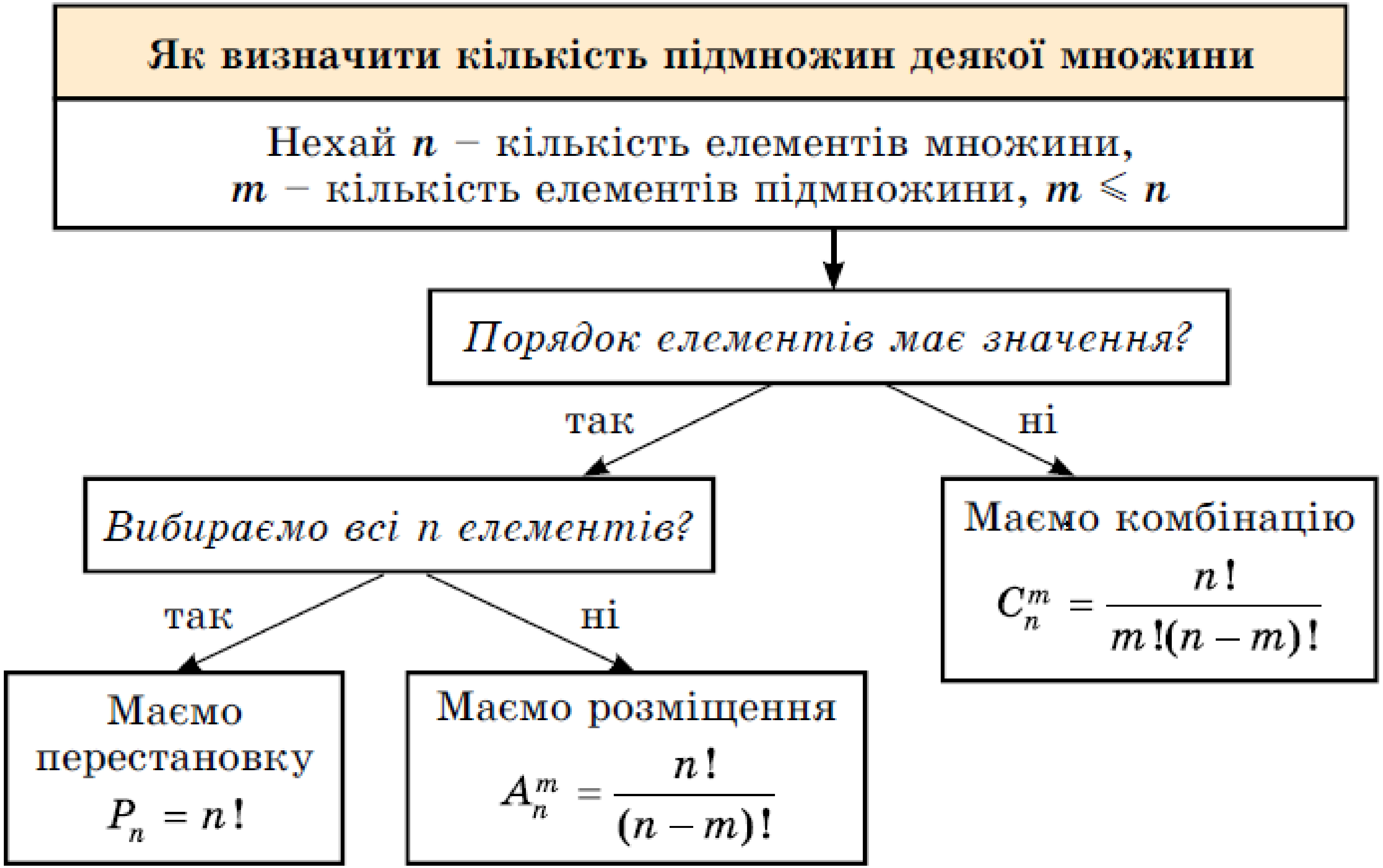
де: $C(n, k)$ - число комбінацій з n елементів по k, n – кількість предметів, m – кількість урн.

Приклад. Маємо 5 однакових куль і 3 різні урни. Скількома способами можна розподілити ці кулі по урнах?

Відповідь: $C(5+3-1, 3-1) = C(7, 2) = 21$ спосіб.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ФОРМУЛИ:

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	Сполучення без повторень	Скількома способами можна вибрати m з n різних предметів?
$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$	Сполучення з повтореннями	Кількість поєднань із повтореннями: по однакових предметів кожного з n різних типів
$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	Розміщення без повторень	Скількома способами можна вибрати і розмістити по m різних місцях m з n різних предметів?
$\overline{A}_n^m = n^m$	Розміщення з повтореннями	Скількома способами можна вибрати і розмістити по m різних місцях m з n предметів, з яких є однакові?
$P_n = n!$	Перестановки без повторень	Скількома способами можна розмістити n різних предметів на n різних місцях?
$\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$	Перестановки з повторенням	Скількома способами можна переставити n предметів, розташованих на n різних місцях, якщо серед n предметів є k різних типів (k < n), тобто. е. є однакові предмети.


Як визначити кількість підмножин деякої множини
Нехай n – кількість елементів множини,
m – кількість елементів підмножини, $m \leqslant n$
Порядок елементів має значення?
так
ні
Вибираємо всі n елементів?
Маємо комбінацію
$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
так
ні
Маємо перестановку
$P_n = n!$
Маємо розміщення
$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

THANK YOU