1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

1.1 Загальні положення теорії похибок.

Будь-яке вимірювання супроводжується похибкою, яка чисельно дорівнює різниці між результатом вимірювання та дійсним значенням вимірюваної величини, тобто:

$$\varepsilon = x - X\ , \tag{1}$$

де, ε – похибка вимірювання;
x – результат вимірювання;
X – дійсне значення вимірюваної величини.

В загальному випадку під ***вимірюванням*** розуміється визначення чисельного значення фізичної величини за допомогою спеціальних технічних засобів.

Дійсні значення вимірюваних величин невідомі, проте за допомогою вимірів можна з тією чи іншою точністю наблизитися до них. В практичній діяльності виникають наступні задачі:

1) встановлення точності вимірювань, необхідної та достатньої для забезпечення практичного використання;
2) визначення методів та засобів для досягнення встановленої точності.
3) визначення критеріїв того, що вимірювання були проведені з достатньою точністю;
4) вибір методів та засобів обробки виміряних значень для отримання оптимальних результатів;
5) визначення якості та точності проведених вимірювань та результатів отриманих після обробки.

1.2 Класифікація вимірювань.

Значення більшості величин, які використовуються в маркшейдерській справі, отримуються або в результаті вимірювань, або за допомогою математичної обробки вимірів. Тому розрізняють *виміряні* та *обчислені* значення величин. Результати вимірювань є первинними (вихідними) значеннями, а результати обчислень – функції цих значень. Очевидно, що при наявності похибок в аргументах, отримані за ними функції також будуть містити похибки.

Розрізняють необхідні та надлишкові виміряні величини. *Необхідними* називають виміряні величини, достатні для однозначного визначення шуканих величин. При розв’язування кожної конкретної задачі число необхідних виміряних величин завжди цілком визначене.

Вимірювання, виконані понад необхідні, будуть надлишковими. *Надлишкові величини* виконують важливу роль в теорії похибок вимірювань, оскільки тільки наявність цих величин дозволяє:

1) контролювати якість вимірювань, відшуковуючи результати вимірювань з грубими помилками;
2) робити висновок щодо точності виконаних вимірювань;
3) отримувати більш точні значення шуканих величин.

За точністю виміряні значення поділяються на *рівноточні* та *нерівноточні*. Цей поділ ґрунтується на аналізі умов вимірювань, під якими розуміються: об’єкт вимірювань, зовнішнє середовище, засоби вимірювань, спостерігач та метод вимірювань. Якщо умови вимірювання величин були однаковими, то значення цих величин отримуються рівноточними. При невиконанні в процесі вимірювань хоча б однієї з умов вимірювання величин будуть нерівноточними. Практично ж до рівноточних відносять значення, отримані при умовах вимірювань, що відрізняються в деяких межах.

Особливою властивістю виміряних значень є їх взаємна незалежність, під якою розуміється відсутність в результатах різних вимірювань одних і тих самих похибок, що однаково спотворюють ці результати. Найбільш повна незалежність досягається при різних умовах вимірювань. Тому для забезпечення строгої незалежності вимірювання повинні виконуватися, за можливістю, різними спостерігачами та приладами, в різний час та із застосуванням різних методів.

В процесі виконання масових інженерних робіт такі фактори як спостерігач, прилад та метод часто залишаються незмінними. Отримані при цьому результати будуть *залежними*. Проте аналіз впливу цих факторів показує, що в межах необхідної точності цими залежностями можна знехтувати.

Обчислені значення будуть *незалежними*, якщо для їх визначення використовуються незалежні вихідні величини. Використання хоча б одного загального значення, що має похибку при отриманні різних обчислених величин, приводить до їх взаємозалежності. При цьому ступінь залежності буде визначатися як розміром похибки загального значення, так і функціональними зв’язками з обчислюваними значеннями.

Обробка незалежних вимірювань здійснюється більш простими методами, ніж обробка залежних. Тому вже в процесі вимірювань необхідно намагатися отримати незалежні результати.

Поняття про необхідні та надлишкові, рівноточні та нерівноточні, залежні та незалежні вимірювання визначають способи обробки та оцінки точності результатів вимірювань.

Іноді вимірювання поділяють на *прямі* та *опосередковані*. Прямі вимірювання отримують безпосередньо із дослідних даних, опосередковані обчислюються на основі відомих залежностей із результатів прямих вимірювань.

1.3. Види похибок вимірювань.

Результати будь-яких вимірювань містять похибки. Розрізняють три види похибок: грубі помилки; систематичні; випадкові похибки.

До *грубих помилок* відносяться похибки, значення яких значно перевищують очікувані при даних умовах вимірювань. Причини появи грубих помилок – низька кваліфікація або неуважність спостерігача, несправність засобів вимірювань, невірне їх встановлення та зовнішні впливи.

Грубі помилки виявляються за допомогою контрольних вимірювань. Найчастіше вимірювання дублюються і, якщо різниця між двічі отриманими значеннями не перевищує допуску, результати цих вимірювань вважаються вільними від грубих помилок та приймаються до подальшої обробки. В іншому випадку вимірювання повторюються. Виявити грубі помилки можна й іншим способом – з результатів вимірювань шукаються величини, теоретичне значення яких відоме. Наприклад, сума виміряних кутів трикутника має дорівнювати 180°, теоретична сума приростів абсцис і ординат замкнутого полігона має дорівнювати нулю і т. д. Отримані відхилення від теоретичних значень називаються нев'язками, значення яких також не повинні перевищувати певних допусків.

Визначення відповідних допусків для кожного конкретного виду вимірювань і нев'язок є однією із задач теорії похибок. Грубі помилки мають бути виявлені та виключені з результатів, призначених для практичного використання.

До *систематичних похибок* відносяться складові загальної похибки вимірювань, які є постійними або закономірно змінюються при повторних вимірюваннях однієї та тієї ж величини. Аналіз причин, що викликають систематичні похибки кожного виду вимірювань, дозволяє повністю або частково виключити їх з результатів вимірювань. На практиці застосовують наступні чотири способи виключення систематичних похибок.

1. Покази робочого вимірювального приладу порівнюють з показами зразкового. На основі цього порівняння визначають поправки робочого приладу, які в подальшому вносять в результати вимірювань. Процес визначення поправки називається **компаруванням**.
2. Встановлюють вид залежності систематичної похибки від одного чи декількох параметрів; визначають значення цих параметрів і в результати вимірювань вносять обчислені за формулою поправки.
3. Застосовують спеціальну методику вимірювань, яка виключає деякі систематичні похибки.
4. Систематичні похибки повністю виключають або їх вплив суттєво зменшують за допомогою спеціальних конструкцій, юстировок та повірок вимірювальних приладів.

В більшості випадків повністю виключити систематичні похибки неможливо, проте остаточними похибками часто можна нехтувати або вони мають випадковий характер.

Випадкова похибка є тією частиною загальної похибки, яка змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. Саме фактор випадковості не дозволяє передбачити результати окремих вимірювань. Причина зміни похибок полягає в зміні зовнішніх умов, коливаннях осей вимірювальних приладів, неточностях їх виготовлення. В підсумку випадкова похибка складається з множини непередбачуваних ні за знаком, ні за величиною елементарних похибок, сумарний вплив яких змінюється від вимірювання до вимірювання. Зміна елементарних похибок в процесі вимірювань відбиває мінливість умов вимірювань.

Вдосконалюючи принципи, техніку та методи вимірювань, можна суттєво зменшувати числові значення випадкових похибок, однак повністю виключити їх неможливо, тому випадкові похибки іноді називають *неминучими*.

Оскільки грубі та систематичні похибки можна виключити з результатів вимірювань, то теорія похибок в основному займається вивченням випадкових похибок.

Застосовуються дві форми подання похибок: у вигляді абсолютного та відносного значень. Похибка вимірювання, подана в одиницях вимірюваної величини, називається ***абсолютною похибкою***. Проте така форма не завжди є доцільною. Наприклад, якщо деяка довжина виміряна з абсолютною похибкою 5 см, то без зазначення величини довжини неможливо оцінити точність вимірювання.

Для того, щоб уникнути невизначеності, точність вимірювання ряду величин іноді оцінюють у вигляді відношення абсолютної похибки вимірювання до значення вимірюваної величини. Отримане відношення називається ***відносною похибкою*** вимірювання. Найчастіше відносна похибка подається у вигляді правильного дробу, в чисельнику якого стоїть одиниця, тобто у вигляді дробу: *1:M*, де *M* – знаменник дробу, що обчислюється за виразом:

$$M = x / \varepsilon, \tag{2}$$

де, x – значення вимірюваної величини;
ε – абсолютна похибка вимірювання.

Чим більший знаменник відносної похибки, тим точніше виконані вимірювання. Іноді відносна похибка подається у відсотках.

Чисельні значення похибок вимірювань повинні характеризуватися тільки двома істотними цифрами, відмінними від нуля. Наприклад, якщо за допомогою обчислень отримане значення похибки вимірювання горизонтального кута m_β, рівне 15,63", то в кінцевому випадку слід записати m_β = 16". Далі припустимо, що довжина l = 163,816 м виміряна з похибкою ε = 15 мм. Звідси за формулою (2) отримаємо M = 10921,07. правильним в цьому випадку записом відносної похибки вимірювання довжини буде 1:11000, тобто з двома значущими цифрами в знаменнику.

1.4 Властивості випадкових похибок.

Розподіл випадкових похибок вимірювань описується так званим нормальним законом або законом Гауса.

Функція густини нормального розподілу випадкових похибок має вигляд:

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}}, \tag{3}$$

де, ε – значення випадкової похибки,

σ – середнє квадратичне відхилення сукупності цих похибок.

Конкретні значення похибок визначаються так

$$\varepsilon_i = x_i - X, \tag{4}$$

де, x_i – виміряне значення,

X – дійсне значення вимірюваної величини.

Проаналізувавши функцію можна відмітити:

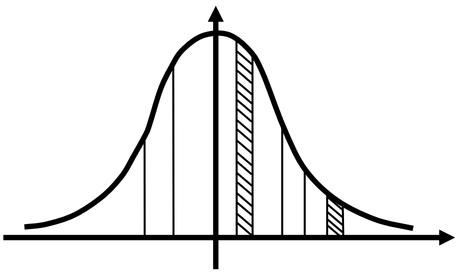
1. Функція досягає максимуму при $\varepsilon = 0$.
2. Функція парна, тобто $f(-\varepsilon)=f(\varepsilon)$, тобто крива симетрична відносно значення ε = 0.
3. Математичне сподівання випадкових похибок вимірювань:

$$M(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon\cdot e^{\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}}d\varepsilon=0, \tag{5}$$

4. Дисперсію випадкових похибок можна записати у вигляді:

$$D(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2\cdot e^{\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma^2}}d\varepsilon=\sigma^2, \tag{6}$$

Вигляд кривої густини нормального розподілу (рис 1), побудованої для функції (3).



При цьому точкам $\varepsilon_i = \pm\sigma$ на кривій відповідають точки перегину.

Для неперервних випадкових величин, до яких відносяться випадкові похибки, ймовірність появи будь-якого конкретного значення дорівнює нулю. Можна говорити про ймовірність попадання цього значення в деякий досить малий інтервал $\Delta\varepsilon$. На графіку ця ймовірність представлена розмірами заштрихованих площ.

Така елементарна ймовірність виражається формулою:

$$p(\varepsilon_i \in \Delta\varepsilon)\approx f(\varepsilon_i)\cdot\Delta\varepsilon, \tag{7}$$

Ймовірність попадання випадкової величини в значний інтервал [a; b] визначається площею фігури $aa'b'b$ і обчислюється наступним чином:

$$p(a\le\varepsilon\le b)=\int_a^b f(\varepsilon)d\varepsilon, \tag{8}$$

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (- ∞;+ ∞) дорівнює одиниці або

$$p(-\infty < \varepsilon < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon = 1. \quad (9)$$

Зауваження:

Закон нормального розподілу було виведено з наступного припущення – максимум густини ймовірності знаходиться біля середнього арифметичного з ряду вимірів. Звідси нормальному розподілу, строго кажучи, відповідає розподіл випадкових величин v_i, що отримуються з виразу:

$$v_i = x_i - \overline{X}, \quad (10)$$

де, $\bar{x}$ – середнє арифметичне значення виміряної величини.

Аналізуючи функцію нормального розподілу і форму кривої, можна сформулювати чотири основні властивості випадкових похибок вимірювань.

1. Зі зменшенням абсолютних значень похибок зростає частота їх появи. Це видно з порівняння двох заштрихованих елементарних площ.
2. Абсолютні значення ε, зростаючи, досягають деякого значення, за яким ймовірність їх появи практично дорівнює нулю. Ця властивість дозволяє встановлювати для кожного конкретного виду вимірювань граничні похибки, тобто вимірювання можна вважати грубими, якщо значення похибок більші за певні допуски.
3. Поява рівних за абсолютною величиною, але протилежних за знаком похибок рівноймовірна. Ця властивість випливає з парності функції.
4. Середнє арифметичне значення сукупності випадкових похибок ε прямує до нуля при необмеженому зростанні їх числа,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = 0 \quad (11)$$

Ця властивість випливає з властивості математичного сподівання випадкових похибок і може бути використана для знаходження випадкових похибок. Якщо умова (11) не виконується, то вплив систематичних похибок не виключається і виникає зміщення середнього значення відносно дійсного.

1.5 Поняття про центральну граничну теорему Ляпунова.

Для розуміння механізму впливу елементарних похибок на результати вимірювань велике значення має центральна гранична теорема Ляпунова. Суть цієї теореми полягає в наступному: *якщо випадкова величина представляє собою суму нескінченної кількості незалежних випадкових величин і жодний з доданків не перевищує інших, то ця сумарна випадкова величина розподілена нормально*. При цьому не має значення характер розподілу окремих доданків – в граничному випадку всі ці величини можуть не бути розподілені за нормальним законом.

При вимірюваннях число елементарних похибок велике, але скінченне. В цьому випадку, строго кажучи, слід вважати результати вимірювань розподіленими близько до нормального закону. З іншої сторони, в теорії випадкових величин доводиться теорема, згідно якої при скінченній кількості величин, розподілених нормально, сумарна величина завжди розподілена нормально. Тому можна стверджувати, що чим більша кількість елементарних похибок і чим більше серед них розподілених нормально, тим ближче до нормального буде розподіл результуючих випадкових похибок вимірювань.

Гіпотеза про близькість розподілу випадкових похибок до нормального також підтверджується багаточисельними дослідними даними.

1.6 Міри точності результатів вимірювань.

Як випливає з кривої густини нормального розподілу, випадкові похибки вимірювань можуть приймати в широкому діапазоні як додатні, так і від'ємні значення. Це створює ускладнення для загальної характеристики точності всієї сукупності проведених вимірювань, особливо при співставленні різних сукупностей, тому мірою точності доцільно мати одне число.

Розглянемо результати дослідження двох теодолітів (табл. 1). "Дійсне" значення вимірюваного кута визначене високоточним теодолітом.

табл. 1

Номер Теодоліта	**Значення випадкових похибок ε_i, "**									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,6	10,7	-4,3	-3,5	3,6	-1,2	-3,6	5,7	-0,4	-3,0
2	-0,5	7,5	2,0	5,3	-9,5	-4,5	3,7	-5,8	9,5	-3,1

Першим теодолітом отримана максимальна похибка 10,7", другим – два значення, рівні по абсолютній величині 9,5". Мірою точності доцільно мати одне число. В якості міри, що характеризує точність приладу, метода або сукупності вимірів, Гаус запропонував прийняти середню квадратичну похибку, що визначається за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n}} \;. \tag{12}$$

В теорії похибок використовують інше позначення суми ряду чисел:

$$[\varepsilon] = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n\,; \qquad [\varepsilon\varepsilon] = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2\,.$$

Тоді формула для визначення середньої квадратичної похибки матиме вигляд:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}\,, \tag{13}$$

де, n – кількість вимірювань.

Вся теорія математичної обробки результатів вимірювань побудована на використанні середньої квадратичної похибки, яка має ряд переваг:

1. При обчисленні не потрібно враховувати знаки окремих похибок.
2. Більші за своїм значенням похибки ε_i після піднесення до квадрата збільшують її числове значення.

3.Середня квадратична похибка у вигляді параметра σ входить до функції густини нормального розподілу.

4.За формулою (13) значення m отримується зі знаком ±, що відповідає природі випадкових похибок.

Принципова відмінність середньої квадратичної похибки m від середнього квадратичного відхилення σ полягає в тому, що σ – величина постійна і характеризує нескінченну сукупність даного виду вимірювань. Ця величина теоретична, в той час як похибка m є величиною емпіричною, що отримується при обмеженій кількості вимірювань n. Зі збільшенням числа вимірювань значення $m \to \sigma$. Тому середню квадратичну похибку m часто називають оцінкою (приблизним значенням) невідомого середнього квадратичного відхилення σ. Слід відмітити, що середні квадратичні похибки – величини випадкові, що залежать від конкретного набору значень ε і змінюються при доданні до існуючого ряду нових значень ε. Закон розподілу випадкових величин m відрізняється від закону розподілу ε.

Отримаємо середні квадратичні похибки вимірювань кута двома теодолітами:

$$m_1 = \sqrt{\frac{214{,}6}{10}} = 4{,}6'';\quad m_2 = \sqrt{\frac{346{,}3}{10}} = 5{,}9''.$$

Звідси можна зробити висновок, що вимірювання кутів першим теодолітом проводилось точніше, ніж другим.

Формула (13) використовується в тих випадках, коли відоме дійсне значення вимірюваної величини. Часто за дійсне значення приймається результат вимірювань більш точним приладом або методом. Зазвичай достатньо, щоб середня квадратична похибка більш точного вимірювання була в три або більше разів менша похибки досліджуваного приладу або метода.

Значення середньої квадратичної похибки отримується з деякою похибкою, яка може бути знайдена за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \tag{14}$$

Для нашого прикладу за формулою (14) отримаємо похибки значень середніх квадратичних похибок m_1 та m_2.

$$m_{m1} = \sqrt{\frac{4{,}6}{20}} = 1{,}0'';\quad m_{m2} = \sqrt{\frac{5{,}9}{10}} = 1{,}3''.$$

Іноді за міру точності крім середньої квадратичної похибки використовують середню похибку, що знаходиться за формулою:

$$\theta = \frac{[|\varepsilon|]}{n}. \tag{15}$$

При малому n оцінка за допомогою Θ наближена. Однак при $n \to \infty$ між Θ та m існує залежність

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}m \approx \frac{4}{5}m. \tag{16}$$

В якості міри точності ще використовують ймовірну похибку r, значення якої вибирають таким чином, щоб імовірність появи випадкових похибок, менших або більших цього значення, дорівнювала 0,5. Інакше кажучи, ймовірна похибка ділить навпіл ряд випадкових похибок, розміщених в порядку зростання їх абсолютних величин.

При $n \to \infty$ імовірна похибка r зв'язана з середньою квадратичною похибкою залежністю

$$r \approx \frac{2}{3}m \quad . \tag{17}$$

В подальшому будемо використовувати в основному середні квадратичні похибки.

1.7 Помилки округлення.

Як приклад розподілу, що відрізняється від нормального, розглянемо випадкові помилки округлення, що мають велике значення при обробці результатів вимірювань.

У відповідності з відомими правилами округлення можна сформулювати наступні властивості випадкових помилок округлення:

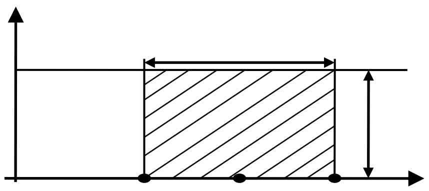
1. Максимальна помилка дорівнює половині одиниці останнього збереженого розряду;
2. Додатні та від'ємні помилки рівноймовірні, тобто розподіл випадкових помилок округлення симетричний відносно центра розподілу;
3. В межах від нуля до половини одиниці останнього збереженого розряду рівноймовірна поява будь-яких числових значень.

Ці властивості дозволяють віднести помилки округлення до випадкових величин, що мають рівномірний розподіл. Функція цього розподілу виражається рівнянням прямої, що паралельна осі абсцис, тобто рівнянням вигляду

$$y = f(\varepsilon) = c, \tag{18}$$

де c – константа.

Випадкове значення числа E (рис. 2) може знаходитись з одною ймовірністю в межах від (E - 0,5t) до (E + 0,5t), де t – значення одиниці останнього збереженого



розряду.

Наприклад, якщо число E = 25,84 – результат округлення до другого розряду після коми, то t = 0,01 і число до округлення знаходилось з однаковою ймовірністю в межах від 25,835 до 25,845.

Ймовірність знаходження числа у вказаних межах дорівнює одиниці, і на графіку зобразиться площею заштрихованого прямокутника. Таким чином можна записати, що

$$c(b-a) = ct = 1 \quad або \quad c = \frac{1}{t} = \frac{1}{b-a}. \tag{19}$$

Математичне сподівання результатів округлення виражається інтегралом, який для функції (18) дорівнює

$$M(\varepsilon)=\int_a^b \varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon = c\int_a^b \varepsilon d\varepsilon = c\left.\frac{\varepsilon^2}{2}\right|_a^b = \frac{c}{2}\left(b^2-a^2\right)=\frac{c(b-a)(b+a)}{2}.$$

Враховуючи вираз (19)

$$M(\varepsilon)=\frac{(b-a)}{2}, \tag{20}$$

тобто математичне сподіванням (середнім значенням) результатів округлення є середина інтервалу.

Дисперсія може бути виражена формулою:

$$D(\varepsilon)=M\left(\varepsilon^2\right)-M^2(\varepsilon), \tag{21}$$

де, $M(\varepsilon^2)$ – математичне сподівання квадратів випадкової величини ε, що обчислюється за формулою:

$$M\left(\varepsilon^2\right)=\int_a^b \varepsilon^2 f(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Враховуючи вирази (19) та (20) можемо записати

$$M\left(\varepsilon^2\right)=c\int_a^b \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{c}{3}\left(b^3-a^3\right)=\frac{1}{3(b-a)}(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Підставляючи отримані значення в формулу (21), тримаємо значення дисперсії випадкових помилок округлення

$$D(\varepsilon)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Після нескладних перетворень отримуємо вираз для визначення величини дисперсії:

$$D(\varepsilon)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{t^2}{12}. \tag{22}$$

Звідси середня квадратична помилка округлення дорівнює

$$m_o=\sqrt{D(\varepsilon)}=\frac{t}{2\sqrt{3}}\approx 0{,}29t. \tag{23}$$

Наведені міркування відносяться до одного округленого числа. В процесі обчислень в обробці знаходяться декілька (інколи досить багато) різних чисел. Згідно з центральною граничної теоремою Ляпунова спільний вплив таких чисел в процесі обчислень приводить до результатів, похибки яких розподілені близько до нормального закону.

В практиці обчислень для зменшення впливу похибок округлення проміжні результати зазвичай приймаються на порядок точніше ніж результати вимірювання. Наприклад, якщо кутові вимірювання мають похибки 5-10", то проміжні результати обчислюються з точністю до секунд.

2. ІМОВІРНІСНЕ ОБГРУНТУВАННЯ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

2.1 Інтеграл ймовірностей.

Функція густини розподілу ймовірностей випадкових похибок вимірювань дозволяє розв'язувати цілий ряд практичних задач. Так, знаючи середню квадратичну похибку вимірювання сукупності однорідних величин, можна обчислити імовірність появи випадкових похибок, які менші або більші деякого, наперед відомого значення. Можна знайти значення межі, яку випадкова похибка не перевищить або перевищить із заданою ймовірністю. На основі розв'язування цих задач за допомогою інтеграла ймовірностей встановлюються допуски, що застосовуються для контролю вимірювань та формулюються принципи забезпечення необхідної точності.

Імовірність потрапляння випадкової похибки вимірювання в деякий інтервал [-a; +a], симетричний відносно осі ординат, буде дорівнювати:

$$p(-a \le \varepsilon \le +a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon. \qquad (24)$$

Для отримання чисельного значення цієї ймовірності необхідно кожного разу знати середнє квадратичне відхилення σ, що створює складнощі при практичному використанні формули. Для спрощення застосовують нову змінну $t = \frac{\varepsilon}{\sigma}$, звідки $d\varepsilon = \sigma dt$. Така операція називається нормуванням, а величина t – нормованою змінною. При цьому нормована межа $k = \frac{a}{\sigma}$ називається *коефіцієнтом кратності*, який вказує, скільки середніх квадратичних відхилень міститься в досліджуваному інтервалі a.

Підставивши нормовані значення в формулу, знайдемо нову функцію імовірності:

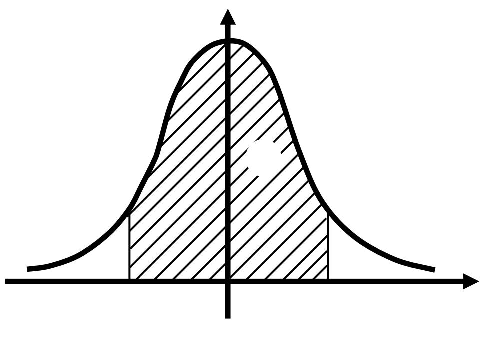
$$p(-k\sigma \le t\sigma \le +k\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{k\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Після скорочення на величину σ отримаємо інтеграл ймовірностей наступного вигляду:

$$\Phi(k) = p(-k \le t \le +k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{k} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (25)$$

Нова функція не залежить від середнього квадратичного відхилення σ, що спрощує її практичне використання. За її допомогою можна отримати імовірність потрапляння випадкової похибки в інтервал [-k; +k]. Проте, інтеграл (25) не інтегрується в елементарних функціях, і його значення обчислюють наближено або вибирають зі спеціальних таблиць.

Графічно імовірність потрапляння випадкової величини ε в інтервал [-a; +a] (рис 3) зобразиться площею S. Незаштрихована площа між кривою та



абсцисою дорівнює імовірності того, що випадкова величина вийде за межі [-a; +a].

2.2 Розв'язування практичних задач з використанням інтеграла ймовірностей.

Розглянемо ряд прикладів використання інтеграла ймовірностей. При цьому будемо вважати, що $\sigma = m$, де m – середня квадратична похибка вимірювання.

Приклад 1. Визначити ймовірність того, що випадкова похибка вимірювань не перевищить за абсолютним значенням середню квадратичну похибку.

Оскільки в цьому випадку $a = m$, то $k = \frac{a}{m} = \frac{m}{m} = 1,$ знаходимо $\Phi(1) = 0{,}683$. Це означає, що зі 100 випадкових похибок 68 за абсолютним значенням будуть менші за m, а 32 – більші.

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що випадкова похибка не перевищить подвоєну та потроєну середню квадратичну похибку.

В першому випадку $a = 2m$, отже, $k = 2$; в другому випадку $k = 3$. Для цих величин знаходимо відповідні значення $\Phi(2) = 0{,}954$; $\Phi(3) = 0{,}997$.

Приклад 3. Знайти ймовірність того, що випадкова похибка перевищить за абсолютним значенням величину подвоєної та потроєної середньої квадратичної похибки.

Імовірність того, що випадкова похибка при вимірюванні з'явиться взагалі дорівнює одиниці. Знайдені в пр. 2 імовірності попадання випадкової похибки в інтервали відповідно [-$2m$; +$2m$] і [-$3m$; +$3m$]. Імовірності виходу випадкових похибок за межі цих інтервалів будуть відповідно рівні $1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}954 = 0{,}046$ та $1 - \Phi(3) = 1 - 0{,}997 = 0{,}003$. Інакше кажучи, з 1000 вимірів подвоєну середню квадратичну похибку за абсолютним значенням перевищать приблизно 46 випадкових похибок, а потроєну – тільки 3.

Приклад 4. знайти граничне значення, яке випадкові похибки не перевищать з імовірністю 0,99.

За імовірністю $\Phi(k) = 0{,}99$ знаходимо найближче значення $k = 2{,}5$. звідси шукана межа $a = km = 2{,}5m$.

Знаючи середню квадратичну похибку m, можна отримати чисельне значення цієї межі.

Приклад 5. Середня квадратична похибка $m = \pm$ 10 см. Знайти ймовірність того, що випадкова похибка не перевищить значення $a = \pm$ 16 см.

Знаходимо коефіцієнт $k = \frac{a}{m} = \frac{16}{10} = 1{,}6.$ Вибираємо відповідну цьому коефіцієнту ймовірність $\Phi(1{,}6) = 0{,}89$.

Приклад 6. Середня квадратична похибка $m = \pm$ 12''. Знайти ймовірність того, що випадкова похибка перевищить значення $a = \pm$ 30''.

Обчислюємо $k = \frac{a}{m} = \frac{30}{12} = 2{,}5.$ Знаходимо ймовірність того, що випадкова похибка не вийде за вказану межу, $\Phi(2{,}5) = 0{,}988$. Тоді ймовірність того, що похибка вийде за ці межі дорівнює $1 - \Phi(k) = 1 - 0{,}988 = 0{,}012$.

Приклад 7. Середня квадратична похибка $m = \pm$ 10 см. Знайти ймовірність того, що випадкова похибка за абсолютним значенням буде знаходитись в межах від 6 до 20 см, тобто належатиме проміжку $[-20; -6] \cup [6; 20]$.

Імовірність того, що випадкова похибка буде належати інтервалу $[-20; 20]$: k = 20/10 = 2; $\Phi(2)$ = 0,954. Імовірність того, що випадкова похибка буде в межах $[-6; 6]$: k = 6/10 = 0,6; $\Phi(0{,}6)$ = 0,451. Виключивши з імовірності $\Phi(2)$ ймовірність $\Phi(0{,}6)$ отримаємо шукану ймовірність, що дорівнює $\Phi(2)$ - $\Phi(0{,}6)$ = 0,954 - 0,451 = 0,503.

Приклад 8. При середній квадратичній похибці m = 5" знайти ймовірність того, що випадкова похибка потрапить в інтервал $[-8{,}3''; -4{,}7'']$.

Знаходимо нормовані межі інтервалів k_1 = - 8,3/5 = - 1,66 та k_2 = -4,7/5= - 0,94. Для інтервалу $[-k_1; k_1]$ знаходимо $\Phi(1{,}66)$ = 0,9031, для інтервалу $[-k_2; k_2]$ $\Phi(0{,}94)$ = 0,6528. Звідси, аналогічно прикладу 7, ймовірність потрапляння абсолютних значень (додатних та від'ємних) випадкових похибок в інтервал від 4,7" до 8,3" буде рівна $\Phi(1{,}66)$ - $\Phi(0{,}94)$ = 0,9031 - 0,6528 = 0,2503. Половина цієї ймовірності буде припадати на від'ємні значення. Тому шукана ймовірність дорівнює 0,2503/2 = 0,125.

Приклад 9. При середній квадратичній похибці m = 9 мм знайти ймовірність попадання випадкової похибки в інтервал $[-5\ мм; 18\ мм]$.

Шукана ймовірність дорівнює $(\Phi(k_1) + \Phi(k_2))/2$.

k_1 = - 5/9 = - 0,55, $\Phi(-0{,}55)$ = 0,4177;

k_2 = 18/9 = 2, $\Phi(2)$ = 0,9545;

Шукана ймовірність дорівнює (0,4177 + 0,9545)/2 = 0,686.

2.3 Пряма та обернена задачі теорії похибок.

При практичному використанні теорії похибок часто доводиться вирішувати дві принципово різні задачі, які називаються прямою та оберненою.

В *прямій задачі* за відомими похибками окремих вимірювань знаходяться похибки кінцевих результатів, що є функціями цих вимірів. Є ряд незалежних величин l_1, l_2, …,l_n, кожна з яких виміряна з середніми квадратичними похибками m_1, m_2, …, m_n. За допомогою обчислень отримаємо t значень функції:

$$y_i = F_i(l_1, l_2, ..., l_n), \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

Середні квадратичні похибки цих функцій можна подати в загальному вигляді:

$$m_{y_i} = \Phi_i(m_1, m_2, ..., m_n) \tag{26}$$

З прямою задачею зв'язане встановлення допустимих значень. У цьому випадку для контролю правильності проведених вимірювань обчислюють такі величини y_i, для яких відомі або дійсні значення, або значення обчислені раніше з високою точністю. Як приклад – умови суми кутів і приростів координат, що виникають в замкненому теодолітному ході:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 180^\circ(n-2); \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0; \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = 0, \tag{27}$$

де, β_i – внутрішні кути ходу;

n – число його сторін.

Внаслідок похибок вимірювань кутів та сторін теодолітного ходу умови (27) не будуть виконуватися. Утворюються нев'язки ω_β, ω_x, ω_y. Значення нев'язок при рівних умовах будуть залежати від розмірів випадкових похибок вимірювань. Однак нев'язки можуть містити й грубі помилки, які необхідно виявити в процесі контролю. Це здійснюється за допомогою співставлення фактичних нев'язок з допустимими. Припустимо, що такі допуски встановлені. Вважається, що вимірювання, за якими отримані нев'язки, не містять грубих помилок, якщо вони виявились меншими за допустимі. В іншому випадку після відповідного аналізу деякі вимірювання повторюються.

Принципи встановлення допусків розглянемо на прикладі отримання допустимої кутової нев'язки замкненого ходу $\omega_{\beta доп}$.

Для цього випадку:

$$y = F(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i .$$

Знаючи середні похибки вимірювання кутів, можна знайти середню похибку суми кутів m_y. В свою чергу, значення m_y – середнє квадратичне значення нев'язки. Допустима нев’язка встановлюється з врахуванням цього значення за формулою:

$$\omega_{\beta доп} = k \cdot m_y , \quad (28)$$

де k – коефіцієнт кратності.

Числове значення цього коефіцієнта вибирають, виходячи з наступних міркувань. Допуск буде більш меншим при малих значеннях k. Однак, при цьому буде відкидатися значна частина правильно виконаних вимірювань. Наприклад, при $k = 1$ у відповідністю із функцією нормального розподілу випадкових похибок відкинуто ≈ 32% правильно виміряних величин, серед яких можливі грубі помилки. При $k = 2$ разом з грубими помилками буде відкинуто ≈ 5% правильно виміряних значень, а при $k = 3$ – ≈ 0,3%. Однак, в останньому випадку допустимими будуть грубі помилки, близькі до потроєного значення середньої квадратичної похибки. В маркшейдерській практиці приймається $k = 2$.

За допомогою оберненої задачі можна встановити середні похибки окремих вимірювань для забезпечення заданої точності деякої функції виміряних величин, тобто встановлення допуску. Допуск приймається в якості граничної похибки, значення якої не повинне перевищувати фактичну. Середню квадратичну похибку зв’язують з граничною таким чином:

$$m_{ср} = \frac{m_{гр}}{k} . \quad (29)$$

Коефіцієнт k вибирається з врахуванням допустимого «ступеня ризику». В маркшейдерській практиці k приймають рівним 3, а в більш відповідальних випадках – 4.

Встановивши таким чином середню квадратичну похибку кінцевого результату, за допомогою спеціального розрахунку визначають, з якою точністю необхідно здійснювати вимірювання окремих величин, щоб отримати задану середню похибку результату. В розв’язання оберненої задачі покладено формулу $m_{yi} = \Phi_i(m_1, m_2,\ldots,m_n)$. В цій формулі в кожному конкретному випадку відома похибка $m_y = m_{ср}$. Шуканими є середні похибки вимірювань $m_j = (j = 1, 2,\ldots,n)$.

Оскільки в одному рівнянні міститься n невідомих, обернена задача не має єдиного розв’язку. Неоднозначність можна уникнути за допомогою додаткових умов, що найчастіше ґрунтуються на використанні принципу рівних впливів. В найбільш простому випадку вплив кожної похибки m_j на похибку m_y приймаються однаковим і, виходячи з цього, визначаються чисельні значення шуканих похибок m_j. Однак отримані результати незручні для практичного використання. Наприклад, якщо таким чином визначається необхідна точність вимірювання кутів та сторін теодолітного ходу, то в результаті обчислень кожна сторона та кут повинні вимірюватись зі своєю похибкою, що відрізняється від інших.

Тому доцільно використовувати принцип рівного впливу згрупованих вимірювань, при якому похибку m_y розподіляють на декілька груп, як правило, однорідних вимірювань. Наприклад, часто передбачається рівність впливу кутових та лінійних вимірів. Після визначення групової похибки, приймаючи вимірювання в групі рівно точними, методом перебору варіантів знаходять середню квадратичну похибку цих вимірювань.

Конкретні прийоми розв’язування оберненої задачі розглядаються в спеціальних курсах маркшейдерської справи.

2.4 Інтервальна оцінка результатів вимірювань.

В результаті обробки ряду виміряних значень однієї величини отримують її середнє арифметичне значення $\overline{X}$, яке називають *статистичною оцінкою невідомого математичного сподівання X*. Оцінка невідомого значення дисперсії або середнього квадратичного відхилення $\sigma_{\overline{X}}$ є обчислювана за результатами обробки ряду вимірювань – *середня квадратична похибка* $m_{\overline{X}}$. Такі оцінки називають точковими, оскільки кожна з них виражається одним числом.

В математичній статистиці використовуються оцінки за допомогою певного інтервалу, який із заданою ймовірністю γ покриває дійсне значення вимірюваної величини. Інтервал типу

$$I = \left[\overline{X} - km_{\overline{X}};\, \overline{X} + km_{\overline{X}}\right] \tag{30}$$

називається *довірчим інтервалом*, а ймовірність γ – *довірчою ймовірністю* або *надійністю*. Коефіцієнт *k* визначається за таблицею значень інтеграла ймовірностей за прийнятою довірчою ймовірністю γ.

Точкова оцінка не суперечить інтервальній, однак, тому що вона має конкретне значення, то є більш зручною при обробці маркшейдерських вимірювань. Іноді точкову оцінку записують у вигляді $\overline{X} \pm m_{\overline{X}}$.

2.5 Оцінка точності при обмеженій кількості вимірів.

Нормована випадкова величина

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{m} \tag{31}$$

підлягає нормальному розподілу, якщо значення $\sigma \approx m$ визначено надійно, тобто з достатньо великого числа вимірювань n. При обмеженій кількості вимірювань розподіл цієї величини відрізняється від нормального, оскільки надійність значення m суттєво залежить від n. В таких випадках поведінка величини t підпорядковується розподілу Стьюдента, яке застосовується при будь-якій кількості вимірювань і дає результати, що співпадають з результатами нормального розподілу при збільшенні кількості вимірювань.

Коефіцієнт розподілу Стьюдента t_γ аналогічний коефіцієнту k нормального розподілу. При обчисленні кількості вимірювань довірчий інтервал має вигляд:

$$I = \left[\overline{X} - t_\gamma m_{\overline{X}};\, \overline{X} + t_\gamma m_{\overline{X}}\right]. \tag{32}$$

Зі зниженням кількості вимірювань довірчий інтервал розширюється.

Розподіл Стьюдента має велике значення при обробці вимірювань, коли середня похибка m невідома і її необхідно визначити на основі обчислення кількості вимірювань. В більшості випадків вимірювання здійснюються з дотриманням цілком певних умов, в результаті яких значення похибки m у відомих межах є надійним і для конкретних умов вимірювань визначається за допомогою спеціальних досліджень. В таких випадках застосовується нормальний розподіл.

2.6 Статистичне дослідження ряду випадкових похибок вимірювань.

Нові прилади та методи вимірювань всебічно досліджуються. Частина цих досліджень виконується з метою визначення точності необхідність дослідження точності та якості виконаних вимірювань виникає також при аналізі побудованих в різних умовах маркшейдерських та геодезичних мереж. Для досліджень зазвичай організовують сукупність випадкових незалежних значень досліджуваного параметра та проводять її статистичну обробку, в процесі якої знаходять основні параметри розподілу (вибіркове математичне сподівання, дисперсію, асиметрію, ексцес та ін.) та визначають ступінь наближеності фактичного розподілу даної сукупності випадкових значень деякому передбачуваному теоретичному розподілу. При аналізі результатів вимірювань за передбачуваний приймають нормальний розподіл.

Розглянемо послідовність статистичної обробки ряду випадкових величин.

Високоточним теодолітом на місцевості виміряний горизонтальний кут із середньою похибкою 1,5'' і отримане його дійсне значення X = 76°15'31'',4. Цей же кут було виміряно багаторазово (n = 30) новим теодолітом з передбачуваною середньою похибкою одного виміру m_0 = 5''. Результати вимірювань наведені в табл. 2.

Послідовність обробки.

1. Обчислюємо випадкові похибки вимірів $\varepsilon_i = x_i - X$, де x_i – виміряні значення; X – дійсне значення величини.
2. Знаходимо степені похибок ε, ε^2, ε^3, ε^4.
3. Визначаємо суми $[\varepsilon]$, $[\varepsilon^2]$, $[\varepsilon^3]$, $[\varepsilon^4]$.

Таблиця 2

Номе	**Виміря**	***ε''***	***ε*²**	***ε*³**	***ε*⁴**
1	2	3	4	5	6
1.	76° 15' 36''	4,6	21,2	97,3	448
2.	27	- 4,4	19,4	- 85,2	375
3.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
4.	24	- 7,4	54,8	- 405,2	2999
5.	33	1,6	2,6	4,1	7
6.	42	10,6	112,4	1191,0	12625
7.	33	1,6	2,6	4,1	7
8.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
9.	33	1,6	2,6	4,1	7
10.	27	- 4,4	19,4	- 85,2	375

11.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
12.	42	10,6	112,4	1191,0	12625
13.	39	7,6	57,8	439,0	3336
14.	39	7,6	57,8	439,0	3336
15.	33	1,6	2,6	4,1	7
16.	21	- 10,4	108,2	- 1124,9	11699
17.	33	1,6	2,6	4,1	7
18.	27	- 4,4	19,4	-85,2	375
19.	36	4,6	21,2	97,3	448
20.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
21.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
22.	33	1,6	2.6	4,1	7
23.	30	-1,4	2,0	- 2,7	4
24.	27	- 4,4	19,4	- 85,2	375
25.	33	1,6	2,6	4,1	7
26.	27	- 4,4	19,4	-85,2	375
27.	45	13,6	185,0	2515,5	34210
28.	24	- 7,4	54,8	- 405,2	2999
29.	27	- 4,4	19,4	- 85,2	375
30.	30	- 1,4	2,0	- 2,7	4
X	76° 15' 31,4"	$[\varepsilon]$ = 9,0	$[\varepsilon^2]$ = 934,2	$[\varepsilon^3]$ = 3533,4	$[\varepsilon^4]$ = 87 052

4. Використовуючи ці суми, знаходимо наступні вирази:

- зсув вибіркового середнього арифметичного значення відносно дійсного:

$$\Delta = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{9''}{30} = 0{,}3''$$

звідси середнє значення з ряду вимірів буде рівне

$$76°15'31{,}4'' + 0{,}3'' = 76°15'31{,}74.$$

- центральний момент другого порядку (вибіркова дисперсія виміряних значень) складає:

$$\alpha_2 = \sigma^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{934{,}2}{30} = 31{,}14$$

звідси середня квадратична похибка вимірювання:

$$m = \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{31{,}14} = 5{,}58''.$$

- центральний момент третього порядку:

$$\alpha_3 = \frac{[\varepsilon^3]}{n} = \frac{3533}{30} = 118$$

звідси асиметрія кривої фактичного розподілу:

$$A = \frac{\alpha_3}{m^3} = \frac{118}{5{,}58^3} = 0{,}679.$$

- центральний момент четвертого порядку визначається за формулою:

$$\alpha_4 = \frac{\left[\varepsilon^4\right]}{n} = \frac{87100}{30} = 2900$$

звідси ексцес кривої фактичного розподілу:

$$E = \frac{\alpha_4}{m^4} - 3 = \frac{2900}{5{,}58^4} - 3 = -0{,}007.$$

Отримана асиметрія – лівостороння (A > 0), а вершина кривої фактичного розподілу дещо нижча вершини кривої теоретичного нормального розподілу (E < 0).

5. Перевіряємо відповідність фактичного розподілу випадкових значень ε_i нормальному закону. Для цього застосовують один з двох статистичних критеріїв: Пірсона чи Колмогорова.

В обох критеріях використовують згруповані вихідні дані. Для цього значення ε_i розташовують у зростаючому порядку і отриманий варіаційний ряд розбивають на рівні інтервали. Ширину інтервалу приймають приблизно рівною половині передбачуваної середньої похибки (h = 2,5'').

Таблиця 3

Верхні межі інтервалів	Частоти	Нормовані інтервали	$\frac{1}{2}\Phi(t_i)$	Ймовірності попадання в інтервал		Теоретичні частоти n_i'	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	Накопичені ймовірності		D
				p_t	$p_ф$			Σp_t	$\Sigma p_ф$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
- ∞		- ∞	-0,5000							
-7,5	1	-1,34	-0,4099	0,09	0,03	2,7	1,07	0,09	0,03	0,06
-5,0	2	-0,89	-0,3132	0,10	0,07	3,0	0,33	0,19	0,10	0,09
-2,5	6	-0,45	-0,1732	0,14	0,20	4,2	0,77	0,33	0,30	0,03
0	7	0	0	0,17	0,23	5,1	0,71	0,50	0,53	-0,03
2,5	7	0,4	0,17	0,	0,	5,1	0,71	0,	0,	-

		5	32	17	23			67	76	0,09
5,0	2	0,89	0,3132	0,14	0,07	4,2	1,15	0,81	0,83	-0,02
7,5	0	1,34	0,4099	0,10	0	3,0	3,00	0,91	0,83	0,08
10,0	2	1,78	0,4625	0,05	0,07	1,5	0,16	0,96	0,90	0,06
∞	3	∞	0,5000	0,04	0,10	1,2	2,70	1,00	1,00	0
Σ	30	–	–	1,00	1,00	30	10,6	–	–	–

Верхні межі інтервалів x_i відкладені по обидва боки від нуля. Для кожного інтервалу шукають частоту n_i – число випадкових величин ряду, що потрапляють всередину відповідного інтервалу.

Нормовані інтервали обчислюються за формулою

$$t_i = \frac{x_i}{m}.$$

За ними вибираються половини значень $\Phi(t)$ з табл. додатку 1. Знаки цих значень аналогічні знакам t_i.

Записуються теоретичні p_t та фактичні $p_ф$ ймовірності попадання випадкових величин в інтервали. При цьому величина p_t отримана як різниця сусідніх рядків стовпчика 4, а $p_ф$ – діленням частот n_i на n – число вимірів.

Теоретичні частоти n_i' отримуються множенням теоретичних ймовірностей p_t на число всіх вимірів n.

Значення критерію Пірсона обчислюється за формулою

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 10{,}6,$$

де k – число інтервалів. В нашому випадку k = 9.

Гіпотеза про відповідність розподілу ряду випадкових значень ε_i нормальному приймається, якщо виконується умова $\chi^2 \le \chi_q^2$. Тут χ_q^2 – значення, що вибирається з табл. додатку 3 за числом ступенів вільності r та рівнем істотності p = 1 - γ, де γ – довірча ймовірність.

Число ступенів вільності для нормального розподілу r = k - 3. В нашому випадку r = 9 – 3 = 6.

Для довірчої ймовірності γ = 0,95 (p = 0,05) $\chi_{0{,}05}^2 = 12{,}6$. Оскільки $\chi^2 \le \chi_{0{,}05}^2$, можна зробити висновок про відповідність розподілу випадкових похибок вимірювання нормальному закону.

Стовпчики 9, 10, 11 (табл. додатку 3) містять дані, що необхідні для отримання критерію Колмогорова. Накопичені ймовірності отримуються послідовним додаванням імовірностей p_t та $p_ф$ стовпчиків 5 і 6 (табл. додатку 3). В стовпчику 11 (табл. додатку 3) (D) записуються різниці накопичених імовірностей.

Показником розходження фактичного та теоретичного розподілів є число

$$\lambda_ф = D_{max}\sqrt{n},$$

де, D_{max} – абсолютне значення максимальної різниці накопичених імовірностей. В прикладі D_{max} = 0,09, звідси

$$\lambda_ф = 0{,}09\sqrt{30} = 0{,}493.$$

Гіпотеза відповідності фактичного розподілу ряду випадкових значень похибок ε нормальному розподілу приймається, якщо виконується умова $\lambda_ф \le \lambda_q$. Тут коефіцієнти $\lambda_ф$ в залежності від рівня істотності мають наступні значення :

Рівень істотності q	0,1	0,05	0,01
Коефіцієнт λ_q	1,224	1,358	1,627

В прикладі показник $\lambda_ф$ менший за всі коефіцієнти λ_q, що свідчить про наближеність фактичного розподілу отриманих випадкових похибок до нормального.

Таким чином, за всіма критеріями можна зробити висновок про те, що фактичний розподіл величин ε підлягає нормальному закону.

2.7 Обґрунтування принципу найменших квадратів.

При наявності надлишкових вимірів з похибками отримання шуканих результатів в загальному випадку є неоднозначною задачею, і, відповідно, в деякому сенсі невизначеною.

Застосовуючи будь-який спосіб розв'язування, можна отримувати однозначні розв'язки. Таких розв'язків буде багато. Очевидно, що серед них будуть вдалі та невдалі. Виникає задача знаходження такого розв'язку з множини можливих, в результаті якого отримувалися найбільш точні (надійні) значення шуканих величин. Під надійними розуміються числа $\overline{x}_i$, що найбільш кращим чином наближуються до невідомих дійсних значень X_i.

В загальному вигляді задача оптимального оцінювання, тобто знаходження в умовах неоднозначного розв'язку надійних значень деяких шуканих параметрів T_j (j = 1, 2, …, t) за результатами вимірювання відповідним чином підібраних величин x_i (i = 1, 2, …, n), в математичній статистиці зв'язана з функцією правдоподібності, що має вигляд:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; T_1, T_2, \ldots, T_t) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n) \qquad (33)$$

де $f(x_i)$ – функції густини розподілу випадкових величин x_i.

За змістом функція правдоподібності є функцією густини розподілу всієї сукупності випадкових величин x_1, x_2, …, x_n, зв'язаних шуканими параметрами T_j.

Для вимірюваних величин x_i функції густини розподілу мають вигляд:

$$f(x_i) = \frac{1}{m_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - X_i)^2}{2m_i^2}}, \qquad (34)$$

де, X_i – дійсні значення вимірюваних величин;

m_i – середні квадратичні похибки вимірювань.

Підставивши вирази $f(x_i)$ в L отримаємо

$$L(x_i;T_j)=\frac{1}{m_1m_2\ldots m_n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}e^{-\frac{1}{2}\sum\frac{(x_i-X_i)^2}{m_i^2}}. \tag{35}$$

Оскільки дійсні значення X_i невідомі, для оптимального оцінювання параметрів T_j необхідно підібрати такі значення $\overline{X}_i$, щоб вони в сукупності опинились в області найбільшої густини ймовірностей, що виражається функцією $L(x_i;\ T_j)$. Для цього досить знайти максимум цієї функції та замінити в ній X_i на $\overline{X}_i$. Це приведе до умови:

$$\sum\frac{\left(x_i-\overline{X}_i\right)^2}{m_i^2}=\min. \tag{36}$$

Введемо наступні позначення:

$$x_i-\overline{X}_i=v_i; \tag{37}$$

$$\frac{1}{m_i^2}=p_i. \tag{38}$$

Величину p_i називають *вагою виміряного значення*. Вона характеризує ступінь довіри до виконаного вимірювання. Дійсно, чим менша середня квадратична похибка m_i, тим це вимірювання буде більш надійним. Тоді умова мінімуму прийме наступний вигляд:

$$\sum\frac{v_i^2}{m_i^2}=\sum p_iv_i^2=[pvv]=\min. \tag{39}$$

Таким чином отримується основне положення теорії обробки результатів вимірювань – ***принцип найменших квадратів***, застосування якого приводить до знаходження найбільш надійних значень шуканих параметрів T_j. Сам процес знаходження надійних значень називається *зрівнюванням за методом найменших квадратів*.

Величини v_i називають поправками зі зрівнювання або найбільш ймовірними поправками. Вони підпорядковуються нормальному закону розподілу.

Зрівнювання нормально розподілених величин за методом найменших квадратів призводить по ймовірності до найкращих результатів. Це означає, що в порівнянні з іншими методами зрівнювання, результати обробки за методом найменших квадратів в сукупності будуть розміщуватися ближче до дійсних невідомих значень. Зрівнювання за методом найменших квадратів іноді називають строгим зрівнюванням.

2.8 Строге зрівнювання багаторазових вимірювань однієї величини.

Нехай є ряд нерівноточних вимірів однієї і тієї ж величини X: x_1, x_2, …,x_n. Середні квадратичні похибки вимірювань відповідно рівні

m_1, m_2, …,m_n. Необхідно знайти найбільш надійне значення $\overline{X}$ вимірюваної величини, застосувавши для цього принцип найменших квадратів.

Складемо наступні ряди:

$$\begin{array}{ll} \textit{Поправка:} & \textit{Вага:} \\ v_1 = x_1 - \overline{X}, & p_1 = \dfrac{1}{m_1^2}, \\ v_2 = x_2 - \overline{X}, & p_2 = \dfrac{1}{m_2^2}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ v_n = x_n - \overline{X}, & p_n = \dfrac{1}{m_n^2}. \end{array} \tag{40}$$

Умова найменших квадратів записується наступним чином:

$$\sum_i p_i \cdot v_i^2 = [pvv] = min. \tag{41}$$

Для отримання суми $[pvv]$ кожну поправку піднесемо до квадрату і помножимо на відповідну вагу:

$$\begin{array}{l} p_1 v_1^2 = p_1\left(x_1^2 + 2x_1\overline{X} + \overline{X}^2\right) = p_1 x_1^2 + 2p_1 x_1 \overline{X} + p_1 \overline{X}^2, \\ p_2 v_2^2 = p_2\left(x_2^2 + 2x_2\overline{X} + \overline{X}^2\right) = p_2 x_2^2 + 2p_2 x_2 \overline{X} + p_2 \overline{X}^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n v_n^2 = p_n\left(x_n^2 + 2x_n\overline{X} + \overline{X}^2\right) = p_n x_n^2 + 2p_n x_n \overline{X} + p_n \overline{X}^2. \end{array} \tag{42}$$

Додавши рівняння (42) отримаємо наступний вираз:

$$[pvv] = [pxx] - 2\overline{X}[px] + \overline{X}^2[p], \tag{43}$$

в якому невідомі величини $[pvv]$ і $\overline{X}$. Для знаходження величини $\overline{X}$ необхідно прирівняти частинну похідну від рівняння по цій невідомій до нуля:

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial\overline{X}} = -2[px] + 2\overline{X}[p] = 0. \tag{44}$$

Звідси значення шуканої величини:

$$\overline{X} = \frac{[px]}{[p]} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \tag{45}$$

Величину $\overline{X}$ називають *середньою ваговою*, *середньою зваженою* або *загальною арифметичною середньою*.

Обчислення за формулою (45) є найпростішим випадком строгого зрівнювання результатів нерівноточних вимірювань однієї величини.

Значення $\overline{X}$ не зміниться, якщо всі ваги виміряних значень помножити на постійну величину k,

$$\begin{array}{l} \overline{X} = \dfrac{kp_1x_1 + kp_2x_2 + \ldots + kp_nx_n}{kp_1 + kp_2 + \ldots + kp_n} = \dfrac{k(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n)}{k(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)} = \\ = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}, \end{array} \tag{46}$$

тобто при обробці нерівноточних вимірювань необхідно враховувати співвідношення ваг, а не їх абсолютні значення. Цей висновок поширюється й на більш загальний випадок обробки нерівноточних вимірів. Це дозволяє приводити ваги до зручного для обчислень вигляду. При цьому доцільно значення всіх ваг помножити на квадрат похибки однієї з них (наприклад першої).

Тоді

$$p_1 = \frac{m_1^2}{m_1^2}, p_2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}, \ldots, p_n = \frac{m_1^2}{m_n^2}. \qquad (47)$$

Одна з виміряних величин має вагу, що дорівнює одиниці. В цьому випадку похибку m_1 називають середньою квадратичною похибкою одиниці ваги і позначають μ. Звідси отримуємо рівність:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \qquad (48)$$

В загальному випадку за μ можна приймати будь-яке значення, не обов'язково рівне середній похибці одного з вимірювань. Тоді μ буде середньою похибкою фіктивного вимірювання, яке б мало вагу рівну одиниці. Це часто використовується для спрощення обчислень.

При рівноточних вимірюваннях однієї величини $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, звідси $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$. Прийнявши $m = \mu$, отримаємо $p = 1$. Тоді умова найменших квадратів для рівноточних вимірювань прийме вигляд:

$$[vv] = min. \qquad (49)$$

Для обчислення зрівненого значення $\overline{x}$ з ряду рівноточних вимірів після підстановки $p_i = 1$ в формулу (45) отримаємо вираз:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n}. \qquad (50)$$

Таким чином, середнє арифметичне значення $\overline{x}$ при рівноточних вимірюваннях є найбільш надійним значенням. Його називають простою арифметичною середньою.

Знайдемо рівності для контролю обчислень. Для цього складемо ряди поправок нерівно точних вимірювань:

$$\begin{array}{ll} \textit{Поправка}: & \textit{Вага}: \\ v_1 = x_1 - \overline{X}, & p_1 = \frac{1}{m_1^2}, \\ v_2 = x_2 - \overline{X}, & p_2 = \frac{1}{m_2^2}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ v_n = x_n - \overline{X}, & p_n = \frac{1}{m_n^2}. \end{array}$$

Помножимо поправки на відповідні ваги:

$$\begin{aligned} p_1 v_1 &= p_1 x_1 - p_1 \overline{X}; \\ p_2 v_2 &= p_2 x_2 - p_2 \overline{X}; \\ &\ldots\ldots\ldots; \\ p_n v_n &= p_n x_n - p_n \overline{X}. \end{aligned}$$

Додамо ці вирази і отримаємо таку рівність

$$[pv] = [px] - \overline{x}[p].$$

Після підстановки виразу $\overline{X} = \frac{[px]}{[p]}$, отримаємо рівність $[pv] = 0$. Для рівноточних вимірювань $[v] = 0$.

Отримані рівності використовуються для контролю обробки рядів вимірів однієї величини. Вони контролюють правильність визначення зрівненого значення $\overline{X}$ і обчислення поправок v_i.

Для зручності визначення середніх значень $\overline{X}$ часто використовують наступний прийом. З виміряних величин x_i вибирають деяке значення X_0, причому таке, щоб різниці $\delta_i = x_i - X_0$ були досить малими. Тоді $x_i = X_0 + \delta_i$. Підставивши ці значення в формулу (45), отримаємо

$$\overline{X} = \frac{p_1(X_0 + \delta_1) + p_2(X_0 + \delta_2) + \ldots + p_n(X_0 + \delta_n)}{[p]}.$$

Після перетворень отримаємо

$$\overline{X} = X_0 + \frac{p_1\delta_1 + p_2\delta_2 + \ldots + p_n\delta_n}{[p]} = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]}.$$

Таким чином, досить знайти середню зважену з різниць δ і додати її до значення X_0, яке називають *"умовним нулем"*.

Для рівноточних вимірювань ($p_i = 1$)

$$\overline{X} = X_0 + \frac{[\delta]}{n}.$$

При обробці рядів вимірів однієї величини точність можна оцінити, використовуючи суми $[pvv]$ для нерівноточних рядів і суми $[vv]$ – для рівноточних. Знайдемо співвідношення, за допомогою яких можна контролювати обчислення цих сум. Складемо три ряди:

Поправка :	*Різниця :*	*Вага :*
$v_1 = x_1 - \overline{X}$	$\delta_1 = x_1 - X_0$	p_1
$v_2 = x_2 - \overline{X}$	$\delta_2 = x_2 - X_0$	p_2
....	....	...
$v_n = x_n - \overline{X}$	$\delta_n = x_n - X_0$	p_n

З першого ряду, після піднесення до квадрату і множення на ваги p_i, отримаємо

$$[pvv] = [pxx] - 2[px]\overline{X} + [p]\overline{X}^2.$$

Після підстановки значення $\overline{X} = \frac{[px]}{[p]}$ отримаємо:

$$[pvv] = [pxx] - \frac{[px][px]}{[p]}. \qquad (51)$$

Аналогічно знайдемо суму

$$[pv\delta] = [pxx] - [px]\overline{X} - [px]X_0 + [p]\overline{X}X_0.$$

і підставимо сюди значення $\overline{X}$. Отримаємо:

$$[pv\delta] = [pxx] - \frac{[px][px]}{[p]}. \qquad (52)$$

Звідси $[pvv]=[pv\delta]$.

Таким чином, для контролю суму $[pvv]$ отримують двічі і при співпаданні результатів в межах точності обчислень, можна зробити висновок про їх правильність.

Для рівноточних вимірювань справедлива рівність $[vv]=[v\delta]$.

3. ЗАКОН НАКОПИЧЕННЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

3.1 Спільний вплив декількох незалежних причин похибок.

Випадкову похибку вимірювання можна подати у вигляді алгебраїчної суми елементарних похибок, зумовлених незалежними причинами. Звідси ряд випадкових похибок вимірювань однієї величини можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \Delta_{11} \pm \Delta_{12} \pm \ldots \pm \Delta_{1k};\\ &\varepsilon_2 = \Delta_{21} \pm \Delta_{22} \pm \ldots \pm \Delta_{2k};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ &\varepsilon_n = \Delta_{n1} \pm \Delta_{n2} \pm \ldots \pm \Delta_{nk}, \end{aligned} \qquad (53)$$

де, ε_i – випадкові похибки вимірювань;

Δ_{ij} – елементарні складові випадкових похибок;

n – число вимірювань даної величини;

k – число незалежних причин елементарних похибок.

Для обчислення середньої квадратичної похибки одного вимірювання піднесемо кожне рівняння (53) до квадрату, обмежившись двома причинами похибок ($k = 2$). Отримаємо:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1\varepsilon_1 = \Delta_{11}\Delta_{11} + \Delta_{12}\Delta_{12} \pm 2\Delta_{11}\Delta_{12};\\ &\varepsilon_2\varepsilon_2 = \Delta_{21}\Delta_{21} + \Delta_{22}\Delta_{22} \pm \Delta_{21}\Delta_{22};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ &\varepsilon_n\varepsilon_n = \Delta_{n1}\Delta_{n1} + \Delta_{n2}\Delta_{n2} \pm \Delta_{n1}\Delta_{n2}. \end{aligned} \qquad (54)$$

Після додавання та ділення на n отримаємо:

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[\Delta\Delta]_1}{n} + \frac{[\Delta\Delta]_2}{n} \pm 2\frac{[\Delta_1\Delta_2]_n}{n}. \qquad (55)$$

В математичній статистиці доводиться таке положення:

$$\frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n} = \frac{[\Delta_1]}{n}\cdot\frac{[\Delta_2]}{n}. \qquad (56)$$

В свою чергу, у відповідності з четвертою властивістю випадкових похибок кожна з середніх правої частини цієї рівності прямує до нуля при збільшенні числа вимірів n. Тому можна записати:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_1\Delta_2]}{n} = 0. \qquad (57)$$

Звідси, переходячи до середніх квадратичних похибок:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2, \qquad (58)$$

де, m – загальна середня квадратична похибка одного виміру;

m_1, m_2 – середні квадратичні похибки цього ж виміру, що залежать від різних джерел.

Аналогічно можна показати, що при наявності k незалежних джерел похибок справедлива рівність:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_k^2. \qquad (59)$$

Наприклад, відомо, що основний вплив на точність вимірювання перевищень нівеліром вносять такі причини похибок, як неточність відліку за рейкою та неправильне встановлення візирної осі в горизонтальне положення. Ці причини незалежні між собою, оскільки стан однієї з них не впливає на стан другого. Знаючи вплив кожного джерела на точність визначення перевищення, можна отримати загальну похибку:

$$m_h^2 = m_0^2 + m_y^2,$$

де, m_0 – середня похибка перевищення, що викликана неточністю відліку за рейками;

m_y – середня похибка перевищення через негоризонтальне положення візирної осі при вимірюваннях.

3.2 Середня квадратична похибка функції виміряних величин.

Як правило, результати вимірювань використовуються для отримання за допомогою обчислень деяких величин, що мають практичне значення. Наприклад, за результатами вимірювання довжини та ширини ділянки визначають її площу або за результатами вимірювання кутів та сторін теодолітного ходу обчислюють координати точок. В цих випадках важливо знати похибки обчислених величин, що залежать від похибок виміряних значень.

В загальному випадку шукається середня квадратична похибка m_y деякої функції виміряних величин вигляду:

$$y = F(l_1, l_2, \ldots, l_n), \qquad (60)$$

де, l_i – результати безпосередніх вимірювань n різних величин.

При цьому вважаються відомими середні квадратичні похибки окремих вимірювань, які позначимо відповідно m_1, m_2,…, m_n.

Дійсне значення оцінюваної функції отримується при заміні виміряних значень l_i на дійсні значення L_i:

$$Y = F(L_1, L_2, \ldots, L_n). \qquad (61)$$

Тоді випадкова похибка оцінюваної функції буде рівна

$$E = y - Y. \qquad (62)$$

Припустимо, що кожна величина L_i виміряна k разів, тобто маємо такі ряди вимірів:

$$\begin{aligned} &L_1 : l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1k}; \\ &L_2 : l_{21}, l_{22}, \ldots, l_{2k}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &L_n : l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{nk}. \end{aligned} \qquad (63)$$

Для кожної серії вимірювань отримаємо значення оцінюваної функції (60):

$$\begin{aligned} &y_1 = F(l_{11}, l_{21}, \ldots, l_{n1}); \\ &y_2 = F(l_{12}, l_{22}, \ldots, l_{n2}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &y_k = F(l_{1k}, l_{2k}, \ldots, l_{nk}). \end{aligned} \qquad (64)$$

Підставимо замість виміряних значень їх вирази через дійсні значення і випадкові похибки, тобто зробимо заміну $l_{ij} = L_i + \varepsilon_{ij}$. Отримаємо,

$$\begin{aligned} &y_1 = F(L_1 + \varepsilon_{11}, L_2 + \varepsilon_{21}, \ldots, L_n + \varepsilon_{n1}); \\ &y_2 = F(L_1 + \varepsilon_{12}, L_2 + \varepsilon_{22}, \ldots, L_n + \varepsilon_{n2}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &y_k = F(L_1 + \varepsilon_{1k}, L_2 + \varepsilon_{2k}, \ldots, L_n + \varepsilon_{nk}). \end{aligned} \tag{65}$$

Застосовуючи розклад функцій в ряд Тейлора й обмежившись через малу величину випадкових похибок першими членами ряду, запишемо рівняння в вигляді

$$\begin{aligned} &y_1 = F(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{11} + \frac{\partial F}{\partial L_2}\varepsilon_{21} + \ldots \frac{\partial F}{\partial L_n}\varepsilon_{n1}; \\ &y_2 = F(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{12} + \frac{\partial F}{\partial L_2}\varepsilon_{22} + \ldots \frac{\partial F}{\partial L_n}\varepsilon_{n2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &y_k = F(L_1, L_2, \ldots, L_n) + \frac{\partial F}{\partial L_1}\varepsilon_{1k} + \frac{\partial F}{\partial L_2}\varepsilon_{2k} + \ldots \frac{\partial F}{\partial L_n}\varepsilon_{nk}. \end{aligned} \tag{66}$$

У відповідності з формулою (61) $F(L_1, L_2, \ldots, L_n) = Y$. Після перенесення цих величин вліво з врахуванням формули (62) отримаємо $y_j - Y = E_j$ (j = 1, 2, …, k). Введемо такі позначення:

$$\frac{\partial F}{\partial L_i} = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{67}$$

Тоді замість системи рівнянь отримаємо систему випадкових похибок E_J оцінюваної функції:

$$\begin{aligned} &E_1 = f_1\varepsilon_{11} + f_2\varepsilon_{21} + \ldots + f_n\varepsilon_{n1}; \\ &E_2 = f_1\varepsilon_{12} + f_2\varepsilon_{22} + \ldots + f_n\varepsilon_{n2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &E_k = f_1\varepsilon_{1k} + f_2\varepsilon_{2k} + \ldots + f_n\varepsilon_{nk}. \end{aligned} \tag{68}$$

Середня квадратична похибка оцінюваної функції може бути отримана за формулою:

$$m_y = \sqrt{\frac{[EE]}{k}}. \tag{69}$$

Піднесемо кожне з рівнянь (68) до квадрату. Отримаємо,

$$\begin{aligned} &E_1E_1 = f_1^2\varepsilon_{11}\varepsilon_{11} + f_2^2\varepsilon_{21}\varepsilon_{21} + \ldots + f_n^2\varepsilon_{n1}\varepsilon_{n1} + 2f_1f_2\varepsilon_{11}\varepsilon_{21} + \ldots + 2f_{n-1}f_n\varepsilon_{(n-1)1}\varepsilon_{n1}; \\ &E_2E_2 = f_1^2\varepsilon_{12}\varepsilon_{12} + f_2^2\varepsilon_{22}\varepsilon_{22} + \ldots + f_n^2\varepsilon_{n2}\varepsilon_{n2} + 2f_1f_2\varepsilon_{12}\varepsilon_{22} + \ldots + 2f_{n-1}f_n\varepsilon_{(n-1)2}\varepsilon_{n2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ &E_kE_k = f_1^2\varepsilon_{1k}\varepsilon_{1k} + f_2^2\varepsilon_{2k}\varepsilon_{2k} + \ldots + f_n^2\varepsilon_{nk}\varepsilon_{nk} + 2f_1f_2\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k} + \ldots + 2f_{n-1}f_n\varepsilon_{(n-1)k}\varepsilon_{nk}. \end{aligned} \tag{70}$$

Додамо отримані вирази та поділимо суму на k. Отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{[EE]}{k} &= f_1^2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{k} + f_2^2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{k} + \ldots + f_n^2\frac{[\varepsilon_n\varepsilon_n]}{k} + \\ &+ 2f_1f_2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{k} + \ldots + 2f_{n-1}f_n\frac{[\varepsilon_{(n-1)}\varepsilon_n]}{k}. \end{aligned} \tag{71}$$

де ε_i – випадкові похибки виміру l_i.

Застосовуючи до середніх значень добутків незалежних величин ε_i, ε_j рівність (57) отримаємо наступний вираз

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lfloor\varepsilon_i\varepsilon_j\rfloor}{k}=0. \qquad (72)$$

Звідси отримаємо

$$\frac{\lfloor EE\rfloor}{k}=f_1^2\frac{\lfloor\varepsilon_1\varepsilon_1\rfloor}{k}+f_2^2\frac{\lfloor\varepsilon_2\varepsilon_2\rfloor}{k}+\ldots+f_n^2\frac{\lfloor\varepsilon_n\varepsilon_n\rfloor}{k}. \qquad (73)$$

У відповідності з формулою (69) знайдемо середню квадратичну похибку оцінюваної функції, виражену через середні похибки аргументів:

$$m_y^2=f_1^2m_1^2+f_2^2m_2^2+\ldots+f_n^2m_n^2. \qquad (74)$$

Формула (74) є однією з основних формул теорії математичної обробки вимірів, і дозволяє розв'язувати різноманітні задачі по оцінюванню точності будь-яких функцій за відомими середніми похибками їх незалежних аргументів. Її ще називають формулою перенесення похибок.

Якщо аргументи залежні (корельовані), то для середніх добутків різних похибок цих аргументів справедлива рівність:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lfloor\varepsilon_i\varepsilon_j\rfloor}{k}=r_{ij}m_im_j, \qquad (75)$$

де r_{ij} – коефіцієнт кореляції між двома випадковими похибками ε_i і ε_j.

Враховуючи рівність (75) формула середньої квадратичної похибки функції корельованих аргументів прийме вигляд

$$m_y^2=f_1^2m_1^2+f_2^2m_2^2+\ldots+f_n^2m_n^2+2f_1f_2r_{11}m_1m_2+\ldots+2f_{n-1}f_nr_{n-1,n}m_{n-1}m_n. \qquad (76)$$

Для практичного використання цієї формули необхідно знати коефіцієнти кореляції, які визначаються за допомогою спеціальних досліджень.

3.3 Застосування формули перенесення похибок

Задача оцінки точності будь-якої функції виконується в три етапи:

1. Вираження оцінюваної функції через незалежні аргументи з відомими похибками;
2. Визначення частинних похідних функції за незалежними аргументами;
3. Обчислення середньої квадратичної похибки оцінюваної функції за формулою перенесення похибок.

3.3.1 Функція вигляду $\boldsymbol{y = x+k}$, де x – величина, виміряна із середньою квадратичною похибкою m_x; k – стала величина.

Частинна похідна від оцінюваної функції за виміряною величиною дорівнює

$$\frac{\partial y}{\partial x}=1.$$

Застосовуючи формулу (74), отримаємо середню квадратичну похибку функції

$$m_y=m_x.$$

3.3.2 Функція вигляду ***y* = *kx*,** де *x* – величина, виміряна із середньою квадратичною похибкою m_x; *k* – стала величина.

Частинна похідна дорівнює

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k.$$

Застосовуючи формулу (74), отримаємо середню квадратичну похибку функції

$$m_y = km_x.$$

3.3.3 Функція вигляду $\boldsymbol{y = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n}$, де k_i – сталі величини; x_i – виміряні із середніми квадратичними похибками m_i величини.

Візьмемо частинні похідні, які дорівнюють

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = k_1, \ \frac{\partial y}{\partial x_2} = k_2, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n} = k_n.$$

Застосовуючи формулу (74), отримаємо середню квадратичну похибку функції

$$m_y = \sqrt{k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2}.$$

Якщо $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = \pm 1$, то похибка функції буде дорівнювати

$$m_y = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i^2}.$$

Звідси можна зробити висновок: якщо оцінювана функція представлена сумою або різницею незалежних аргументів, то її середня квадратична похибка завжди дорівнюватиме кореню квадратному з суми квадратів похибок аргументів. Якщо при цьому $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, то

$$m_y = \sqrt{nm^2} = m\sqrt{n}.$$

3.3.4 Функція вигляду $\boldsymbol{y = lg(x)}$

Функція записана в явному вигляді. Візьмемо частинну похідну, яка дорівнює

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{lg\, e}{x},$$

де *e* = 2,718… – основа натурального логарифма. Оскільки *lge* = 0,4343…, то

$$m_y = \frac{0{,}4343}{x} m_x.$$

Це співвідношення використовується при обробці геодезичних побудов методами логарифмування.

3.4 Оцінка точності функції за наявності систематичних похибок.

Визначимо спільний вплив випадкових та систематичних похибок вимірювань однієї величини. Будемо вважати, що загальна похибка всіх вимірів містить постійну систематичну похибку *Δ*. Тоді ряд похибок вимірів однієї величини можна подати в такому вигляді:

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 + \Delta;$$
$$\sigma_2 = \varepsilon_2 + \Delta;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\sigma_n = \varepsilon_n + \Delta,$$

де, σ_i – загальна похибка вимірів;

ε_i – випадкова складова загальної похибки;

Δ – постійна для всіх вимірів частина загальної похибки.

Для того, щоб застосувати формулу середньої квадратичної похибки (12), отримаємо такі величини:

$$\sigma_1\sigma_1 = \varepsilon_1\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1\Delta + \Delta^2;$$
$$\sigma_2\sigma_2 = \varepsilon_2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2\Delta + \Delta^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\sigma_n\sigma_n = \varepsilon_n\varepsilon_n + 2\varepsilon_n\Delta + \Delta^2.$$

Додавши ці значення та розділивши отримані суми на кількість вимірів n, отримаємо

$$\frac{[\sigma\sigma]}{n} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} + \frac{2\Delta[\varepsilon]}{n} + \Delta^2.$$

Вираз $\frac{[\varepsilon]}{n} = 0$ за четвертою властивістю випадкових похибок. В результаті отримаємо загальну похибку вимірювань при наявності в них систематичної похибки Δ.

$$m_0^2 = m_{вип}^2 + \Delta^2, \qquad (77)$$

де $m_{вип}$ – середня похибка , що залежить від випадкової складової.

Зазвичай з попереднього компарування вимірювального приладу систематична похибка Δ відома і у вигляді поправки виключається з результатів вимірювань. Проте саме компарування є процесом вимірювання і, відповідно супроводжується похибкою. Тому у випадку введення в результати вимірювання поправки справедливою є формула:

$$m_0^2 = m_{вип}^2 + m_\Delta^2,$$

де m_Δ – середня похибка визначення поправки Δ.

Розглянемо вплив систематичних похибок на похибку функції результатів вимірювань. Для спрощення обмежимось трьома вимірюваними величинами, кожна з яких має систематичну похибку $\Delta_i (i = 1,2,3)$. Тоді для цих величин отримаємо таку систему рівнянь:

$$E_1 = f_1(\varepsilon_{11} + \Delta_1) + f_2(\varepsilon_{21} + \Delta_2) + f_3(\varepsilon_{31} + \Delta_3);$$
$$E_2 = f_1(\varepsilon_{12} + \Delta_1) + f_2(\varepsilon_{22} + \Delta_2) + f_3(\varepsilon_{32} + \Delta_3);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$E_k = f_1(\varepsilon_{1k} + \Delta_1) + f_2(\varepsilon_{2k} + \Delta_2) + f_3(\varepsilon_{3k} + \Delta_3).$$

Після розкриття дужок:

$$E_1 = f_1\varepsilon_{11} + f_2\varepsilon_{21} + f_3\varepsilon_{31} + f_1\Delta_1 + f_2\Delta_2 + f_3\Delta_3;$$
$$E_2 = f_1\varepsilon_{12} + f_2\varepsilon_{22} + f_3\varepsilon_{32} + f_1\Delta_1 + f_2\Delta_2 + f_3\Delta_3;$$

……………………………..……………………;

$$E_k = f_1\varepsilon_{1k} + f_2\varepsilon_{2k} + f_3\varepsilon_{3k} + f_1\Delta_1 + f_2\Delta_2 + f_3\Delta_3 .$$

Запишемо систему у вигляді одного рівняння:

$$E_i = f_1\varepsilon_{1i} + f_2\varepsilon_{2i} + f_3\varepsilon_{3i} + f_1\Delta_1 + f_2\Delta_2 + f_3\Delta_3 . \qquad (78)$$

Піднесемо до квадрату:

$$\begin{aligned} E_iE_i = {} & f_1^2\varepsilon_{1i}^2 + f_2^2\varepsilon_{2i}^2 + f_3^2\varepsilon_{3i}^2 + (2f_1f_2\varepsilon_{1i}\varepsilon_{2i} + 2f_1f_3\varepsilon_{1i}\varepsilon_{3i} + 2f_2f_3\varepsilon_{2i}\varepsilon_{3i} + \\ & + 2f_1^2\varepsilon_{1i}\Delta_1 + 2f_1f_1\varepsilon_{1i}\Delta_2 + 2f_1f_3\varepsilon_{1i}\Delta_3 + 2f_1f_2\varepsilon_{2i}\Delta_1 + 2f_2^2\varepsilon_{2i}\Delta_2 + 2f_2f_3\varepsilon_{2i}\Delta_3 + \\ & + 2f_1f_3\varepsilon_{3i}\Delta_1 + 2f_2f_3\varepsilon_{3i}\Delta_2 + 2f_3^2\varepsilon_{3i}\Delta_3) + (f_1\Delta_1 + f_2\Delta_2 + f_3\Delta_3)^2. \end{aligned} \qquad (79)$$

Подамо рівняння і розділимо суму на k:

$$\frac{[EE]}{k} = f_1^2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{k} + f_2^2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{k} + f_3^2\frac{[\varepsilon_3\varepsilon_3]}{k} + (f_1\Delta_1 + f_2\Delta_2 + f_3\Delta_3)^2. \qquad (80)$$

При виведенні цього рівняння слід врахувати, що члени правої частини рівняння (79) в перших дужках після додавання і ділення суми на k дорівнюватимуть 0 для добутків незалежних випадкових величин. Тоді загальна середня похибка функції:

$$m_{yo} = \left(f_1^2m_1^2 + f_2^2m_2^2 + f_3^2m_3^2\right) + \left(f_1\Delta_1 + f_2\Delta_2 + f_3\Delta_3\right)^2 . \qquad (81)$$

Таким чином похибка функції залежить від впливу випадкових похибок (вираз в перших дужках) і систематичних (вираз в других дужках).

Приклад. Замкнений теодолітний хід складається з чотирьох сторін, довжина кожної з яких виміряна із середніми похибками $m_1 = 21 мм$, $m_2 = 15 мм$, $m_3 = 14 мм$, $m_4 = 18 мм$. Вимірювання супроводжувалися систематичними похибками $\Delta_1 = 36 мм$, $\Delta_2 = -3 мм$, $\Delta_3 = 21 мм$, $\Delta_4 = -12 мм$. Необхідно визначити загальну середню похибку периметра цього ходу.

Оцінювана функція має вигляд:

$$y = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 .$$

Частинні похідні:

$$\frac{\partial y}{\partial l_i} = 1.$$

Звідси:

$$m_{y0}^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)^2.$$

Після підстановки випадкових і систематичних похибок вимірювання отримаємо:

$$m_{y_0} = \sqrt{1186 + 1936} = 56 \; мм .$$

Без врахування систематичних похибок:

$$m_y = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2} = 34 \; мм .$$

Постановка задачі цього прикладу є некоректною. Якщо відомі систематичні похибки вимірювань, вони мають бути введені як поправки в виміри. Тим самим виключається їх вплив на похибку будь-яких функцій виміряних величин. Тоді замість похибки 56 мм, на периметр обчислений за виправленими довжинами, будуть впливати тільки випадкові похибки вимірювань, що дорівнюють 34 мм.

Проте, при визначенні поправок Δ_j допускаються випадкові похибки. Для врахування впливу похибок поправок замість вихідної формули дійсних похибок функції слід застосовувати наступну формулу:

$$E_i = f_1\varepsilon_{1i} + f_2\varepsilon_{2i} + f_3\varepsilon_{3i} + f_1\delta_{1i} + f_2\delta_{2i} + f_3\delta_{3i}, \qquad (82)$$

де δ_{ji} - випадкові похибки визначення поправок Δ_j.

Перетворюючи це рівняння отримаємо:

$$m_{y0} = f_1^2 m_1^2 + f_2^2 m_2^2 + f_3^2 m_3^2 + f_1^2 m_{\Delta_1}^2 + f_2^2 m_{\Delta_2}^2 + f_3^2 m_{\Delta_3}^2, \qquad (83)$$

де m_{Δ_j} – середні квадратичні похибки визначення поправок.

Перегрупуємо доданки, в результаті отримаємо

$$m_{y0}^2 = f_1^2\left(m_1^2 + m_{\Delta_1}^2\right) + f_2^2\left(m_2^2 + m_{\Delta_2}^2\right) + f_3^2\left(m_3^2 + m_{\Delta_3}^2\right). \qquad (84)$$

На основі цієї формули можна зробити висновок: при обробці вимірів, в які вводяться незалежні поправки, визначені з похибками, можна до середніх квадратичних похибок вимірювань додати похибки визначення поправок. При подальшому використанні середню квадратичну похибку результату вимірювань, в тому числі при отриманні допустимих і граничних очікуваних похибок.

Іноді одна поправка Δ вводиться в декілька виміряних значень. В цих випадках похибка визначення поправок порівняна за значенням з похибками вимірів. Введення загальної поправки в деяку групу виміряних значень робить їх залежними, і вплив похибки набуває систематичного характеру.

Припустимо, що в результаті спільної обробки вимірів введені три незалежні між собою поправки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Тоді оцінювана функція таких вимірів буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} y = F(&l_1 + \Delta_1, l_2 + \Delta_1, \ldots, l_k + \Delta_1; \\ &l_{k+1} + \Delta_2, l_{k+2} + \Delta_2, \ldots, l_t + \Delta_2; \\ &l_{t+1} + \Delta_3, l_{t+2} + \Delta_3, \ldots, l_n + \Delta_3). \end{aligned} \qquad (85)$$

Дійсна похибка цієї функції:

$$\begin{aligned} E_y = {} & f_1(\varepsilon_1 + \delta_1) + f_2(\varepsilon_2 + \delta_1) + \ldots + f_k(\varepsilon_k + \delta_1) + \\ & + f_{k+1}(\varepsilon_{k+1} + \delta_2) + f_{k+2}(\varepsilon_{k+2} + \delta_2) + \ldots + f_t(\varepsilon_t + \delta_2) + \\ & + f_{t+1}(\varepsilon_{t+1} + \delta_3) + f_{t+2}(\varepsilon_{t+2} + \delta_3) + \ldots + f_n(\varepsilon_n + \delta_3) \end{aligned}$$

де $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – дійсні похибки значення поправок $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Після перетворень можемо записати:

$$\begin{aligned} E_y = {} & f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + \ldots + f_n\varepsilon_n + (f_1 + f_2 + \ldots + f_k)\delta_1 + (f_{k+1} + f_{k+2} + \ldots + f_t)\delta_2 + \\ & + (f_{t+1} + f_{t+2} + \ldots + f_n)\delta_3. \end{aligned} \qquad (86)$$

Суми частинних похідних позначимо наступним чином:

$$\begin{aligned} & f_1 + f_2 + \ldots + f_k = \eta_1; \\ & f_{k+1} + f_{k+2} + \ldots + f_t = \eta_2; \\ & f_{t+1} + f_{t+2} + \ldots + f_n = \eta_3. \end{aligned} \qquad (87)$$

Тоді дійсна похибка функції:

$$E_y = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + \ldots + f_n\varepsilon_n + \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + +\eta_3 v_3 .$$

Середня квадратична похибка функції:

$$m_y^2 = \left(f_1^2 m_1^2 + f_2^2 m_2^2 + \ldots + f_n^2 m_n^2\right) + \left(\eta_1^2 m_{\Delta_1}^2 + \eta_2^2 m_{\Delta_2}^2 + \eta_3^2 m_{\Delta_3}^2\right), \qquad (88)$$

де, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – середні квадратичні похибки вимірювань величини l_i;

$m_{\Delta_1}, m_{\Delta_2}, m_{\Delta_3}$ – середні квадратичні похибки визначення поправок $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

3.5 Вага функції виміряних величин.

Середня квадратична похибка функції:

$$m_y^2 = f_1^2 m_1^2 + f_2^2 m_2^2 + \ldots + f_n^2 m_n^2.$$

Замінимо середні похибки окремих аргументів такими виразами:

$$m_i^2 = \mu^2 \frac{1}{p_i}, \qquad (89)$$

де, p_i – ваги аргументів,

μ – похибка одиниці ваги.

Тоді

$$m_y^2 = \mu^2 \left(\frac{f_1^2}{p_1} + \frac{f_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{f_n^2}{p_n} \right). \qquad (90)$$

Звідси отримаємо значення оберненої ваги функції виміряних величин

$$\frac{1}{p_y} = \frac{f_1^2}{p_1} + \frac{f_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{f_n^2}{p_n} = \left[\frac{ff}{p}\right]. \qquad (91)$$

Для лінійної функції $y = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n$ обернена вага дорівнює

$$\frac{1}{p_y} = \frac{k_1^2}{p_1} + \frac{k_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{k_n^2}{p_n} = \left[\frac{kk}{p}\right].$$

Якщо при цьому $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = \pm 1$, то обернена вага функції дорівнюватиме сумі обернених ваг окремих аргументів, тобто

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = \left[\frac{1}{p}\right].$$

3.6 Середні квадратичні похибки та вага арифметичних величин.

Знайдемо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середньої, яка визначається за формулою

$$\overline{X} = \frac{[px]}{[p]} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Частинні похідні, необхідні для обчислення середньої квадратичної похибки, будуть рівні

$$f_i = \frac{\partial \overline{X}}{\partial x_i} = \frac{p_i}{[p]}.$$

Тоді за формулою (74) середня квадратична похибка

$$m_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{[p]^2}\left(p_1^2 m_1^2 + p_2^2 m_2^2 + \ldots + p_n^2 m_n^2\right).$$

Оскільки $m_i^2 = \frac{\mu^2}{p_i}$,то після перетворень отримаємо

$$m_{\overline{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}.$$

В кінцевому випадку середня квадратична похибка:

$$m_{\overline{X}} = \mu\sqrt{\frac{1}{[p]}}. \qquad (92)$$

Тоді, враховуючи вираз (48), вага загальної арифметичної середньої буде рівна $p_{\overline{X}} = [p]$, тобто сумі значень ваг окремих вимірів.

Для отримання середньої квадратичної похибки і ваги простої арифметичної середньої достатньо прирівняти ваги $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$. Тоді вагу простої арифметичної середньої можна знайти за виразом

$$p_{\overline{X}} = [p] = n.$$

Цей вираз підставимо в формулу (92) і в результаті отримаємо середню квадратичну похибку простої арифметичної середньої

$$m_{\overline{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

Але при $p = 1$ завжди $\mu = m$. Тоді отримаємо вираз наступного вигляду:

$$m_{\overline{X}} = \frac{m}{\sqrt{n}}, \qquad (93)$$

де m – середня квадратична похибка одного виміру.

3.7 Визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за відхиленнями від загальної арифметичної середньої.

Зв'язок між вагою p_i, середньою похибкою одиниці ваги μ і середньою квадратичною похибкою m_i виражається формулою (48), де величина μ визначається довільно. Таке прийняте до початку обробки вимірів значення називається *апріорною похибкою одиниці ваги* і позначається μ_0.

За результатами обробки нерівноточних вимірів можна обчислити похибку одиниці ваги, що характеризує точність фактично виконаних вимірювань, тобто отримати так звану *апостеріорну похибку одиниці ваги*, що позначається μ. На основі порівняння μ і μ_0 можна зробити висновок про правильність вибору початкових значень середніх похибок вимірів m_i, що беруться для визначення ваг вимірів. Знайдемо апостеріорну похибку одиниці ваги при обробці ряду нерівноточних вимірів однієї величини.

Нехай є ряд нерівноточних вимірів однієї величини x_1, x_2, …, x_n. З вагами вимірів p_1, p_2, …, p_n. За результатами вимірювань отримане середнє арифметичне значення:

$$\overline{X} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{[p]}.$$

Відхилення першого виміряного значення від середнього

$$v_1 = x_1 - \overline{X} = x_1 - \frac{1}{[p]}(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots p_nx_n) = \frac{1}{[p]}(x_1([p] - p_1) - p_2x_2 - \ldots - p_nx_n). \quad (94)$$

Через похибки вимірювань величин x_i значення $v_1 \neq 0$. тому відхилення v_1 – похибка функції, і тому справедлива рівність $v_1 = m_{v1}$. застосувавши формулу перенесення похибок, знайдемо похибку функції через похибки окремих аргументів. Для цього знайдемо частинні похідні функції за всіма аргументами:

$$f_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{[p] - p_1}{[p]}; \quad f_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{-p_2}{[p]}; \quad f_n = \frac{\partial v_1}{\partial x_n} = \frac{-p_n}{[p]}.$$

Звідси середня квадратична похибка функції

$$m_{v_1}^2 = \frac{1}{[p]^2}\left(([p] - p1)^2 m_1^2 + p_2^2 m_2^2 + \ldots + p_n^2 m_n^2\right).$$

Замінимо похибки такими виразами $m_i^2 = \frac{\mu^2}{p_i}$.

$$m_{v_1}^2 = \frac{\mu^2}{[p]^2}\left(\frac{[p]^2 - 2[p]p_1 + p_1^2}{p_1} + p_2 + \ldots + p_n\right) =$$

$$= \frac{\mu^2}{[p]^2}\left(\frac{[p]^2 - 2[p]p_1 + p_1^2 + p_1(p_2 + \ldots + p_n)}{p_1}\right) =$$

$$= \frac{\mu^2}{[p]^2}\left(\frac{[p]^2 - 2[p]p_1 + p_1[p]}{p_1}\right) = \frac{\mu^2([p] - p_1)}{[p]p_1}.$$

$$p_1 m_{v_1}^2 = p_1 v_1 v_1 = \frac{\mu^2}{[p]}([p] - p_1) = \mu^2\left(1 - \frac{p_1}{[p]}\right).$$

Для інших відхилень ряду:

$$p_i v_i v_i = \frac{\mu^2}{[p]}([p] - p_i) = \mu^2\left(1 - \frac{p_i}{[p]}\right).$$

Отримаємо суму цих виразів

$$[pvv] = \mu^2\left(n - \frac{[p]}{[p]}\right) = \mu^2(n-1).$$

Звідси шукана середня квадратична похибка одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}. \quad (95)$$

Для рівноточних вимірів, прийнявши $p_i = 1$, знайдемо середню квадратичну похибку одного виміру

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\,. \qquad (96)$$

Формулу (96) часто називають формулою Беселя.

Похибки цих значень оцінюються наступним чином:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}\,; \qquad (97)$$

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}\,. \qquad (98)$$

Підставивши отримані значення μ та m в формули (92) та (93), визначимо середню квадратичну похибку середньої арифметичної зваженої

$$m_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}}$$

та середню квадратичну похибку простої середньої арифметичної

$$m_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}\,.$$

3.8 Обробка рядів багаторазових вимірів однієї величини.

В процесі маркшейдерсько-геодезичних робіт або при дослідженні нових приладів та методів вимірювання часто одну й ту саму величину вимірюють багаторазово. Виникає необхідність визначення кінцевого значення з ряду вимірів та точності вимірювань. При цьому також виникає проблема відбракування неякісно виконаних вимірювань. Розглянемо послідовність обробки рядів рівноточних та нерівноточних вимірів.

3.8.1. Обробка рівноточних вимірів.

В табл. 4 наведено результати багаторазового визначення поправки гірокомпасу Δ_i на вихідній стороні високоякісної тріангуляційної мережі. В результаті обробки необхідно знайти:

1. Найбільш надійне (середнє арифметичне) значення вимірюваної величини $\overline{\varDelta}$;
2. Середню квадратичну похибку одного вимірювання m;
3. Середню похибку одного вимірювання θ;
4. Ймовірну похибку одного вимірювання r;
5. Фактичні та теоретичні співвідношення θ/m та r/m;
6. Похибку середньої квадратичної похибки одного вимірювання m_m;

Середню квадратичну похибку найбільш надійного значення $m_{\overline{\varDelta}}$.

Обробку виконаємо в такій послідовності:

1. Визначимо попереднє значення ("умовний нуль"), яке приблизно розміщене між максимальним та мінімальним значенням, в нашому прикладі $\varDelta_0 = 43'30''$.

Отримаємо різниці

$$\delta_i = \varDelta_i - \varDelta_0\,,$$

де, Δ_i – результати вимірювання.

Ці різниці записуються в стовпчик 3 таблиці 4.

Таблиця 4

Номер виміру	Виміряне значення Δ_i	$\delta_i=\Delta_i-\Delta_0$	$v_i = \Delta_i - \bar{\Delta}$	$\delta_i v_i$	$v_i v_i$	Впорядкований ряд $\lvert v_i \rvert$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	43’58”	28	22,9	641,2	524,41	2,9
2	38”	8	2,9	23,2	8,41	2,9
3	43”	13	7,9	102,7	62,41	2,9
4	24”	-6	-11,1	66,6	123,21	6,9
5	44”	14	8,9	124,6	79,21	7,9
6	23”	-7	-12,1	84,7	146,41	8,9
7	54”	24	18,9	453,6	357,21	8,9

Продовження табл. 4

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
8	38”	8	2,9	23,2	8,41	10,1
9	63”	33	27,9	920,7	778,41	11,1
10	38”	8	2,9	23,2	8,41	11,9
11	42”	12	6,9	82,8	47,61	11,9
12	47”	17	11,9	202,3	141,61	12,1
13	16”	-14	-19,1	267,4	364,81	12,1
14	23”	-7	-12,1	84,7	146,41	14,9
15	09”	-21	-26,1	548,1	681,21	16,1
16	17”	-13	-18,1	235,3	327,61	18,1
17	47”	17	11,9	202,3	141,61	18,9
18	44”	14	8,9	124,6	79,21	19,1
19	25”	-5	-10,1	50,5	102,01	20,9
20	19”	-11	-16,1	177,1	259,21	22,1
21	12”	-18	-23,1	415,8	533,61	22,9
22	50”	20	14,9	298	222,01	23,1
23	56”	26	20,9	543,4	436,81	26,1
24	13”	-17	-22,1	375,7	488,41	27,9
Δ_0 = 43’ 30” $\bar{\Delta}$ = 043’ 35,1”		$[\delta]$ = 123	$[v]$ = 0,6	$[\delta v]$ = 6071,7	$[vv]$ = 6068,64	$[\lvert v_i \rvert]$ = 340,6

2. Найбільш надійне значення визначаємо за формулою простої арифметичної середньої:

$$\bar{\Delta} = \Delta_0 + \frac{[\delta]}{n} = 43'30'' + \frac{123}{m} = 43'35{,}1''.$$

3. В стовпчик 4 (табл. 4) записуємо відхилення окремих вимірів від найбільш надійного (середньої арифметичної), тобто $v_i = \Delta_i - \bar{\Delta}$. Для контролю отримуємо суму $[v]$, яка повинна дорівнювати нулю. В нашому прикладі $[v]$=0,6. Незначне відхилення від нуля зумовлене помилками округлення при визначенні $\bar{\Delta}$. Тут же

визначаємо суму абсолютних значень відхилення $[|v|]=340{,}6$, необхідну для знаходження середньої похибки.

4. В стовпчики 5 і 6 (табл. 4) записуємо добутки $\delta_i v_i$ та $v_i v_i$. Після додавання отримаємо $[\delta v]=6071{,}7$ і $[vv]=6008{,}4$. Контроль $[\delta v]=[vv]$ сходиться в межах точності обчислення Δ та обчислення цих сум.

5. В стовпчику 7 (табл. 4) розміщуємо абсолютні значення v_i в порядку їх зростання.

6. Знаходимо похибки одного вимірювання:

Середня квадратична похибка дорівнює:

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{6068}{23}}=16{,}2''.$$

Середня похибка

$$\theta=\frac{[|v|]}{n}=\frac{340{,}6}{24}=14{,}2''.$$

Імовірну похибку вибираємо із середини впорядкованого ряду – в нашому прикладі (n - парне) як середнє із $|v_{12}|$ і $|v_{13}|$,тобто

$$r=\frac{|v_{12}|+|v_{13}|}{2}=\frac{(12{,}1+12{,}1)}{2}=12{,}1''.$$

7. Обчислюємо фактичні співвідношення виду:

$$\frac{\theta}{m}=\frac{14{,}2}{16{,}2}=0{,}877\ (0{,}758);$$

$$\frac{r}{m}=\frac{12{,}1}{16{,}2}=0{,}747\ (0{,}674).$$

В дужках наведені теоретичні співвідношення. Розходження фактичних та теоретичних співвідношень при такій обчисленій кількості вимірів складає менше 10%, що є цілком прийнятним.

8. Визначаємо похибку отриманої середньої квадратичної похибки:

$$m_m=\frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}=\frac{16{,}2}{\sqrt{46}}=2{,}4''.$$

9. Обчислюємо середню квадратичну похибку визначення кінцевого (середнього арифметичного) значення поправки гірокомпаса:

$$m_\Delta=\frac{m}{\sqrt{n}}=\frac{16{,}2}{\sqrt{24}}=3{,}3''.$$

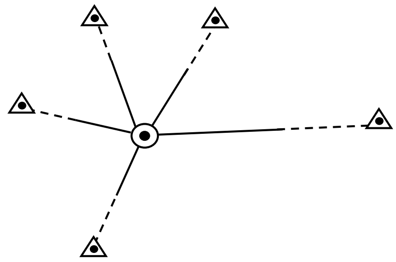
Отримані результати запишемо у вигляді

$$\overline{\Delta}=43'35''\pm3{,}3''.$$

3.8.2. Обробка нерівноточних вимірів.

Як приклад обробки розглянемо наближене зрівнювання багатократної оберненої засічки (рис. 4).

Мета наближеного зрівнювання – отримання середньої зваженої з координат пункту K, що обчислюються із розв’язку оберненої засічки в усіх комбінаціях. В



нашому прикладі буде 10 комбінацій з п’яти по три.

Значення, отримані з розв’язку 10 засічок, наведені в стовпчиках 2 табл. 5 і табл. 6. Вони складені для окремої обробки абсцис і ординат пункту, що визначається. В стовпчиках 3 табл. 5 і табл. 6 наведені значення похибок положення пункту K оберненої засічки за осями координат, обчисленні при розв’язуванні відповідних варіантів обернених засічок.

Послідовність обробки:

Обчислюємо ваги отриманих значень абсцис та ординат за формулою:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}.$$

Оскільки апріорне значення похибки одиниці ваги μ_0 вибирається довільно; для абсцис та ординат за μ_0 приймемо значення першого варіанту засічок, тобто

$$\mu_{0X} = m_{X_1} \text{ та } \mu_{0Y} = m_{Y_1}.$$

Отримані ваги наведені в стовпчиках 4 табл. 5 і табл. 6.

Прийнявши наближені значення ("умовні нулі") X_0=15663,000 та Y_0=33158,000, обчислюємо значення δ_i (стовпчики 5). В їх нижній частині записані суми $[p\delta]$. За цими сумами отримуємо середні зважені (зрівняні) значення:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[p\delta]_X}{[p]_X} = 15663{,}0994 \text{ та } \bar{Y} = Y_0 + \frac{[p\delta]_Y}{[p]_Y} = 33158{,}2643.$$

Обчислюємо відхилення значень X_i та Y_i від їх середнього значення і записуємо ці відхилення в стовпчики 6, в нижній частині яких записуємо суми $[pv]$. Наближеність значень сум до нуля говорить про правильність знаходження середніх зважених.

Наведені в стовпчиках 7 і 8 значення $p_i\delta_i v_i$ і $p_i v_i v_i$ використовуємо для обчислення сум $[p\delta v]$ та $[pvv]$. Наближена рівність цих сум дозволяє контролювати правильність їх обчислення.

Визначаємо апостеріорні значення середніх похибок одиниці ваги:

$$\mu_X = \sqrt{\frac{[pvv]_X}{n-1}} = \sqrt{\frac{17751}{9}} = 44{,}4 \text{ мм } (\mu_{0X}=45{,}4 \text{ мм});$$

$$\mu_Y = \sqrt{\frac{[pvv]_Y}{n-1}} = \sqrt{\frac{10960}{9}} = 34{,}5 \text{ мм } (\mu_{0Y}=32{,}6 \text{ мм}).$$

Таблиця 5

Варіант засічки	**Абсцисса, X_i, мм**	**M_{Xi}, мм**	**Вага p_i**	**$\delta_i=X_i-X_0$**	**$p_i\delta_i$**	**$v_i=X_i-\bar{X}$**	**p_iv_i**	**$p_i\delta_iv_i$**	**$p_iv_iv_i$**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-2-3	15663,169	45,4	1,00	169	169	69,5	69,50	11745	4830
1-2-4	15663,139	25,9	3,07	139	427	39,5	121,27	16857	4790

1-2-5	15663,093	20,5	4,90	93	456	-6,5	-31,85	-2962	207
1-3-4	15663,100	44,8	1,03	100	103	0,5	0,52	52	0
1-3-5	15663,054	34,3	1,75	54	95	-45,5	-79,63	-4300	3623
1-4-5	15663,025	55,4	0,67	25	17	-74,5	-49,92	-1248	3719
2-3-4	15663,105	41,7	1,19	105	125	5,5	6,55	688	36
2-3-5	15663,090	29,2	2,42	90	218	-9,5	-22,99	-2069	218
2-4-5	15663,089	30,3	2,25	89	200	-10,5	-23,63	-2103	248
3-4-6	15663,109	48,1	0,89	109	97	9,5	8,46	922	80
X_0	15663,000		**19,17**		**1907**		**-1,72**	**17582**	**17751**
$\bar{X}$	15663,0995								

Таблиця 6

Варіант засічки	**Ордината, Y_i, мм**	**M_{Yi}, мм**	**Вага p_i**	**$\delta_i=Y_i-Y_0$**	**$p_i\delta_i$**	**$v_i=Y_i-\bar{Y}$**	**p_iv_i**	**$p_i\delta_iv_i$**	**$p_iv_iv_i$**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-2-3	33158,287	32,6	1,00	287	287	22,7	22,70	6515	515
1-2-4	33158,304	37,3	0,76	304	231	39,7	30,17	9172	1198
1-2-5	33158,331	46,6	0,49	331	162	66,7	32,68	10817	2180
1-3-4	33158,278	23,0	2,01	278	559	13,7	27,54	7656	377
1-3-5	33158,273	21,2	2,36	273	644	8,7	20,53	5605	179
1-4-5	33158,229	34,7	0,88	229	202	-35,3	-31,06	-7113	1096
2-3-4	33158,234	53,3	0,37	234	87	-30,3	-11,21	-2623	340
2-3-5	33158,222	33,5	0,95	222	211	-42,3	-40,19	-8922	1700
2-4-5	33158,202	46,2	0,50	202	101	-62,3	-31,15	-6292	1941
3-4-6	33158,194	60,8	0,29	194	56	-70,0	-20,30	-3944	1421
Y_0	33158,000		**9,61**		**2540**		**-0,29**	**10871**	**10947**
$\bar{Y}$	33158,2643								

Наближеність апріорних та апостеріорних значень похибок одиниці ваги говорить про те, що середні квадратичні похибки окремих значень абсцис та ординат, прийняті при отриманні з середніх зважених значень $\bar{X}$ та $\bar{Y}$, відповідають дійсним похибкам.

Визначаємо похибки отриманих середніх квадратичних похибок одиниці ваги:

для абсцис $m_\mu = \dfrac{\mu_X}{\sqrt{2(n-1)}} = \dfrac{44{,}4}{\sqrt{18}} = 10{,}5$ мм;

для ординат $m_\mu = \dfrac{\mu_Y}{\sqrt{2(n-1)}} = \dfrac{34{,}5}{\sqrt{18}} = 9{,}2$ мм.

Обчислюємо середні квадратичні похибки зрівнених значень:

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu_X}{\sqrt{[p]_X}} = \frac{44{,}4}{\sqrt{19{,}7}} = 10{,}1 \text{ мм};$$

$$m_{\bar{Y}} = \frac{\mu_Y}{\sqrt{[p]_Y}} = \frac{34{,}5}{\sqrt{9{,}61}} = 11{,}3 \text{ мм}.$$

3.9 Визначення середньої квадратичної похибки одного виміру за різницею подвійних вимірів.

Оскільки всі вимірювання дублюються, при маркшейдерських роботах накопичується велика кількість інформації, яка може бути використана для характеристики точності фактичних вимірювань.

Нехай є ряд подвійних рівноточних виміряних значень в загальному випадку різних однорідних величин

$$l_1', l_2', \ldots, l_n';$$
$$l_1'', l_2'', \ldots, l_n''.$$

Визначимо їх різниці

$$\begin{aligned} d_1 &= l_1' - l_1''; \\ d_2 &= l_2' - l_2''; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ d_n &= l_n' - l_n''. \end{aligned} \qquad (99)$$

Дійсні значення різниць дорівнюють нулю, оскільки результати безпомилкових вимірювань однієї і тієї ж величини рівні між собою. Тому відмінні від нуля різниці d_i – дійсні похибки функцій (99), тобто різниць. Звідси за формулою (12) отримаємо середню квадратичну похибку цих різниць:

$$m_d = \sqrt{\frac{[dd]}{n}}. \qquad (100)$$

Разом з тим за формулою перенесення похибок середня квадратична похибка суми або різниці двох величин, подано через середні похибки цих величин, має вигляд:

$$m_d^2 = m_1^2 + m_2^2.$$

Оскільки $m_1 = m_2 = m$, то

$$m_d = m\sqrt{2}. \qquad (101)$$

Враховуючи рівність правих частин формул (100) і (101), після нескладних перетворень отримаємо середню квадратичну похибку одного вимірювання, виражену через різниці двох значень:

$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}. \qquad (102)$$

Оскільки d_i – дійсні значення, то для них при великій кількості різниць $n > 20$ справедлива рівність $\frac{[d]}{n} = 0$. Якщо ці значення відрізнятимуться від нуля, то можна зробити висновок про наявність у вимірюваннях систематичної похибки.

Тому для визначення випадкової складової середньої квадратичної похибки обчислюють виправлені значення за формулою:

$$d_i' = d_i - \frac{[d]}{n}.$$

Величини d_i' – відхилення випадкових значень d_i від середнього арифметичного значення. Тоді випадкова складова середньої квадратичної похибки обчислюється за формулою Беселя (96)

$$m = \sqrt{\frac{[d'd']}{2(n-1)}}. \qquad (103)$$

В цьому випадку при безпомилкових обчисленнях завжди $[d'] = 0$.

При оцінюванні точності вимірювань за формулами (102) і (103) можуть отримуватися зменшені значення середніх похибок m, оскільки часто подвійні вимірювання виконуються в однакових умовах, наприклад, при одному місцеположенні приладу, при одному й тому самому куті нахилу і т. п. В результаті деякі причини похибок однаково впливають на результати обох вимірювань і виключаються при визначенні різниць (99).

3.10 Критерії знаходження грубих результатів.

При багаторазових незалежних визначеннях однієї величини можливі результати, які за чисельним значенням відрізняються від інших. Іноді ця різниця настільки значна, що сумнівів в наявності грубої помилки немає. Таке виміряне значення відкидається. Проте досить часто впевнено відкинути виміри неможливо й виникає необхідність встановлення, чи знаходиться це значення в межах, що допускаються законом нормального розподілу, чи воно відноситься до грубих помилок. Інакше кажучи, необхідно об'єктивно оцінити якість отриманих результатів.

Суб'єктивне відкидання оптимальних значень, по-перше, може призвести до викривлення дослідних даних, а по-друге, необґрунтовано відкинуте значення може відображати нові властивості. Тому слід повторити визначення, щоб мати певний висновок про недопустимість отриманого раніше екстремального значення. Якщо аномалія повториться, то необхідно виявити причину її появи.

В основу поданих нижче критеріїв знаходження грубих результатів покладені закони розподілу екстремальних значень.

3.10.1 Критерії допустимості розмаху.

Розмахом R називається різниця між екстремальними (максимальним і мінімальним) значеннями результатів багаторазового визначення деякої величини, тобто

$$R = x_{max} - x_{min}\,, \qquad (104)$$

де, x_{max} і x_{min} – найбільше та найменше значення з результатів визначення однієї і тієї ж величини.

В цьому критерії результати незалежні, розподілені нормально і їх середнє квадратичне відхилення σ відоме. Нормований розмах

$$\omega = \frac{R}{\sigma} \qquad (105)$$

буде допустимим, якщо виконується умова $\omega \leq \omega_T$, в якому значення ω_T вибирається за двома параметрами: n – кількість значень, з яких вибирають екстремальні величини, і γ – довірчої ймовірності (табл. 7).

Таблиця 7

n	γ = 0,95	γ = 0,99	*n*	γ = 0,95	γ = 0,99	*n*	γ = 0,95	γ = 0,99
2	2,77	3,64	8	4,29	4,99	14	4,74	5,40
3	3,31	4,12	9	4,39	5,08	15	4,80	5,45
4	3,63	4,40	10	4,47	5,16	16	4,85	5,49
5	3,86	4,60	11	4,55	5,23	17	4,89	5,54
6	4,03	4,76	12	4,62	5,29	18	4,93	5,57
7	4,17	4,88	13	4,68	5,35	20	5,01	5,65

Приклад. Відомі приведені до нуля результати вимірювання на тріангуляційному пункті дев'ятьма пристроями п'яти напрямів (в кут с) на різні пункти (табл. 8). Відомі середня квадратична похибка вимірювання одного напряму $m = 3{,}5''$. В двох останніх стовпчиках таблиці для нижнього пункту візірування визначені розмах та його нормоване значення за формулою (105), для якого прийняте $\sigma = m$.

Таблиця 8

Пункт візирування	**Номер прийому**									**R**	**R/m**
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	7,7	10,1	9,8	17,8	15,3	13,1	10,4	7,1	12,3	10,7	3,06
c	29,9	33,1	24,5	32,6	32,8	26,0	22,6	30,2	31,6	10,5	3,00
d	50,3	45,9	46,0	55,7	48,6	48,7	50,4	50,4	50,7	9,8	2,80
e	10,4	13,6	14,9	14,8	26,3	17,2	11,6	18,6	17,8	15,9	4,54

Для n=9 при довірчій ймовірності γ=0,95 визначаємо ω_T=4,39. порівнюючи це значення з нормативними значеннями, робимо висновок, що виміряні напрями на пункт *e* перевищують допуск. Очевидно, що необхідно перевизначити два прийоми (перший і п'ятий).

3.10.2 Критерії допустимості екстремальних значень.

Ці критерії застосовуються для оцінки незалежних нормально розподілених результатів визначення однієї і тієї ж величини. Вони більш універсальні ніж критерії розмаху, оскільки охоплюють чотири можливих варіанти (I – IV) з врахуванням їх особливостей.

Варіанти класифікуються в залежності від того, чи відомі апріорні значення двох параметрів: x – математичного сподівання (дійсного значення) тієї величини, що визначається, і σ – середньої квадратичної похибки результатів вимірювань. Кожному варіанту відповідає свій критерій, що залежить від довірчої ймовірності γ і кількості вимірів n (додаток 3).

Якщо дійсне значення x невідоме, то середнє арифметичне значення $\bar{x}$ визначається за формулою:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

де x_i – значення, отримані з окремих вимірювань.

Якщо відоме середнє квадратичне відхилення σ, то обчислюється його емпіричне значення за однією із наступних формул:

$$S = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \text{ або } S = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} ,$$

де, $\varepsilon_i = x_i - X$ і $v_i = x_i - \bar{X}$.

В додатку 3 наведені допустимі значення η екстремального нормованого відхилення, що обчислюється за формулами:

$$\eta_e = \frac{|x_e - X|}{\sigma} \text{ (для варіанту I);}$$

$$\eta_e = \frac{|x_e - X|}{S} \text{ (для варіанту II);}$$

$$\eta_e = \frac{|x_e - \bar{X}|}{\sigma} \text{ (для варіанту III);}$$

$$\eta_e = \frac{|x_e - \bar{X}|}{S} \text{ (для варіанту IV);}$$

де x_e – екстремальне значення з ряду вимірів.

Приклад. В тріангуляції 3 класу відомі нев'язки (в кут с) 28 трикутників (табл. 9). Враховуючи, що середня квадратична похибка вимірювання одного кута в тріангуляції 3 класу дорівнює 1,5", необхідно визначити, чи можна при довірчій імовірності γ=0,095 вважати екстремальну нев’язку №27 допустимою.

Таблиця 9

Номер виміру	**Нев'язка** Δ	$\Delta\Delta$	**Номер виміру**	**Нев'язка** Δ	$\Delta\Delta$	**Номер виміру**	**Нев'язка** Δ	$\Delta\Delta$
1	2,6	6,76	11	1,5	2,25	20	-1,2	1,44
2	-3,1	9,61	12	1,8	3,24	21	0,3	0,09
3	1,8	3,24	13	2,8	7,84	22	0,0	0,00
4	-0,9	0,81	14	3,5	12,25	23	0,7	0,49
5	-0,6	0,36	15	-1,6	2,56	24	1,5	2,25
6	-1,2	1,44	16	-1,2	1,44	25	2,9	8,41
7	1,5	2,25	17	-3,1	9,61	26	2,2	4,84
8	0,3	0,09	18	2,4	5,76	27	-7,1	50,41
9	-3,0	9,00	19	2,2	4,84	28	-1,4	1,96
10	-3,6	12,96						

Цей приклад відповідає І варіанту, оскільки дійсне значення нев'язок відоме і завжди дорівнює нулю. Знаючи середню квадратичну похибку вимірювання кута, можна обчислити значення середньої квадратичної нев'язки $\sigma = 1{,}5\sqrt{3} = 2{,}6''$. Нормоване значення екстремальної нев'язки дорівнює

$$\eta_e = \frac{7{,}1''}{2{,}6''} = 2{,}73\,.$$

Для варіанту І за величинами γ=0,095 і n=28 за допомогою інтерполяції визначаємо допустиме значення η=2,90 (додаток 3). Оскільки $\eta_e < \eta$, то нев'язка, що дорівнює -7,1" є допустимою і наведену мережу тріангуляції можна віднести за точністю до III класу. Цей висновок також підтверджує значення фактичної середньої квадратичної нев'язки, що визначена за формулою:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = \sqrt{\frac{166{,}2}{n}} = 2{,}4''\,,$$

яке незначно відрізняється від значення апріорної похибки σ.

Величина $[\Delta\Delta]$ – сума квадратів нев'язок.

Приклад. Відомі результати багаторазових (n=45) вимірювань світлодалекоміра відомого з високою точністю базису b=583,612, виконаних для визначення середньої квадратичної похибки одного вимірювання (табл. 10). Цей випадок відноситься до II варіанту, оскільки відоме дійсне значення вимірюваної величини $x = b$.

Таблиця 10

Номер виміру	x_i	$\varepsilon_i = x_i$ - b	$\varepsilon_i\varepsilon_i$	Номер виміру	x_i	$\varepsilon_i = x_i$ - b	$\varepsilon_i\varepsilon_i$
1	583,604	-8	64	24	583,627	15	225
2	583,607	-5	25	25	583,606	-6	36
3	583,583	-29	841	26	583,631	19	361
4	583,618	6	36	27	583,629	17	289
5	583,622	10	100	28	583,613	1	1
6	583,601	-11	121	29	583,630	18	324
7	583,619	7	49	30	583,596	-16	256
8	583,606	-6	36	31	583,634	22	484
9	583,642	30	900	32	583,631	19	361
10	583,610	-2	4	33	583,592	-20	400
11	583,607	-5	25	34	583,603	-9	81
12	583,612	0	0	35	583,627	15	225
13	583,589	-23	529	36	583,584	-28	784
14	583,618	6	36	37	583,660	48	2304
15	583,596	-16	256	38	583,610	-2	4
16	583,597	-15	225	39	583,600	-12	144
17	583,622	10	100	40	583,627	15	225
18	583,608	-4	16	41	583,614	2	4
19	583,630	18	324	42	583,587	-25	625
20	583,629	17	289	43	583,586	-26	676
21	583,622	10	100	44	583,585	-27	729
22	583,607	-5	25	45	583,620	8	64
23	583,597	-15	225				

В результаті обчислень отримаємо [ε]= -2 мм, [$\varepsilon\varepsilon$]=12982. На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що при вимірюваннях не буде систематичної похибки і середню квадратичну похибку одного вимірювання обчислюють за формулою

$$S = m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{12982}{45}} = 16{,}9\ \text{мм}.$$

Максимальне відхилення від базису дорівнює 48 мм (вимірювання №37). Необхідно визначити, чи є допустимим таке відхилення. Для цього знаходимо його нормоване значення

$$\eta_e = \frac{48\text{мм}}{16{,}9\text{мм}} = 2{,}84.$$

Для II варіанту за величинами n=45 і γ=0,95 за допомогою інтерполяції отримаємо допустиме значення η=3,12 (додаток 3). Оскільки η_e<η вимірювання №37 можна вважати виконаним правильно.

Таким чином, відстані в 500-600 м вимірюються із середньою похибкою m=17 мм.

Приклад. Теодолітом Т5 дев'ятьма прийомами виміряний горизонтальний кут (табл. 11). Необхідно визначити середнє значення кута. В результаті обчислень отримаємо $\bar{X} = 258°13'31{,}3''$. Обчислюємо відхилення $v_i = x_i - \bar{X}$ і відмічаємо, що максимальне відхилення, що дорівнює 16,7", має вимірювання №3.

Таблиця 11

Номер виміру	x_i	$v_i = x_i - \bar{X}$, "	$v_i' = x_i - \bar{X}'$, "
1	258°13'18"	- 13,3	- 11,2
2	36"	4,7	6,8
3	48"	16,7	—
4	30"	- 1,3	0,8
5	24"	- 7,3	- 5,2
6	30"	- 1,3	0,8
7	36"	4,7	6,8
8	24"	- 7,3	- 5,2
9	36"	4,7	6,8
$\bar{X}$	258°13'31,3"	[v] = 0,3	[v'] = 0,4
$\bar{X}'$	258°13'29,2"		

Оскільки середня квадратична похибка вимірювання кута одним прийомом теодолітом Т5 відома і дорівнює m=5", то цей випадок відноситься до варіанту III. За величинами n=9 і γ=0,95 отримаємо допустиме значення η=2,39 (додаток 3). Нормоване відхилення вимірювання №3 дорівнює

$$\eta_e = \frac{16{,}7''}{5''} = 3{,}34 .$$

Оскільки η_e<η, то вимірювання №3 слід розглядати як помилкове і воно не враховується при обчисленні середнього значення кута. В результаті отримуємо нове середнє значення $\bar{X} = 258°13'29{,}2''$. За допомогою цього значення обчислюємо нові відхилення v_i'. максимальне відхилення має вимір №1. Обчислюємо для нього нормоване значення:

$$\eta_e = \frac{11{,}2''}{5''} = 2{,}24 .$$

Для варіанту III за величинами n=8 і γ=0,95 вибираємо нове допустиме значення η'=2,39. Оскільки $\eta'_e<\eta'$, то середнє значення $\bar{X}'$ приймається. Його середня квадратична похибка визначається за формулою

$$m_{\bar{X}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{8}} = 1{,}8'' .$$

Приклад. В процесі дослідження точності нового теодоліта багаторазово (n = 21) виміряний горизонтальний кут (табл. 12). Необхідно визначити середню квадратичну похибку одного вимірювання кута цим теодолітом.

Таблиця 12

Номер виміру	x_i	$v_i = x_i - \bar{X}$, "	$v'_i = x_i - \bar{X}'$, "
1	48°32'20,1"	- 1,9	- 2,2
2	22,3	0,3	0,0
3	23,9	1,9	1,6
4	20,7	- 1,3	- 1,6
5	22,7	0,7	0,4
6	22,2	0,2	- 0,1
7	22,5	0,5	0,2
8	25,2	3,2	2,9
9	22,7	0,7	0,4
10	22,0	0,0	- 0,3
11	24,2	2,2	1,9
12	15,8	- 6,2	—
13	20,8	- 1,2	- 1,5
14	24,9	2,9	2,6
15	21,5	- 0,5	- 0,8
16	22,5	0,5	0,2
17	20,6	- 1,4	- 1,7
18	21,0	- 1,0	- 1,3
19	20,1	- 1,9	- 2,2
20	20,0	- 2,0	- 2,3
21	25,5	3,5	3,2
$\bar{X}$	48°32'22,0"	[v] = - 0,8	[v'] = - 0,6
$\bar{X}'$	48°32'22,3"		

Для цього обчислюємо середнє значення кута $\bar{X} = 48°32'22{,}0''$ і знаходимо відхилення $v_i = x_i - \bar{X}$. За цими величинами визначаємо суму квадратів відхилень [vv] = 96,96 і обчислюємо середню квадратичну похибку

$$S=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{96{,}96}{20}}=2{,}20''.$$

Відмічаємо, що максимальне значення відхилення від середнього має №12, що дорівнює v_{12} = - 6,2".

Цей випадок відноситься до IV варіанту, оскільки значення вимірюваного кута та середня похибка його вимірювання невідомі до початку досліджень. Для величин n=21 і γ=0,95 знаходимо допустиме значення нормованого відхилення η=2,73 (дод. 5). Фактичне нормоване відхилення вимірювання №12 дорівнює

$$\eta_e=\frac{|v_{12}|}{S}=\frac{6{,}2}{2{,}20}=2{,}82.$$

Оскільки $\eta_e<\eta$, то вимір №12 має бути відкинутий.

З 20 вимірів, що залишилися, отримаємо $\bar{X}'=48°32'22{,}3''$, $[v'v']$=57,08. Звідси середнє квадратичне відхилення складе

$$S'=\sqrt{\frac{[v'v']}{n-1}}=\sqrt{\frac{57{,}08}{19}}=1{,}73''.$$

В ряді максимальне відхилення має вимірювання №21, нормоване відхилення якого дорівнює

$$\eta'_e=\frac{3{,}2}{1{,}73}=1{,}85.$$

Для варіанту IV за величинами n = 20 і γ = 0,95 виміряємо допуск η' = 2,71 (додаток 3).

Оскільки $\eta_e<\eta$, можна зробити висновок, що вимірювання, які залишилися, виконані правильно.

У випадках обробки рядів нерівноточних величин спочатку отримують нормовані значення шляхом ділення кожного відхилення на середню квадратичну похибку. Допустимість екстремального нормованого значення визначають аналогічно розглянутим прикладам з використанням додаток 3.

Додатки

Додаток 1

Значення функції $\Phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{\frac{-x^2}{2}}dx$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0479	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1035	0,1114	0,1193	0,1271	0,1350	0,1429	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2811	0,2886	0,2960	0,3034
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3400	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3758
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6527	0,6579	0,6630	0,6680	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7418	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7776	0,7813	0,7850	0,7887	0,7924	0,7959	0,7995	0,8030
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8530	0,8557	0,8585	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8754	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9511	0,9523	0,9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9615	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9742	0,9749	0,9755	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9785	0,9791	0,9796	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9831
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9868	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9882	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904

Додаток 2

Значення критичних точок розподілу χ^2

Число ступенів свободи ***r***	Критичні точки розподілу χ^2					
	Рівень істотності ***p***					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток 3

Допустимі нормовані відхилення *η* при двох значеннях ймовірності *γ*

	I		***II***		***III***		***IV***	
	X відоме				***X відоме***			
	σ (m) відоме		***σ (m) невідоме***		***σ (m) відоме***		***σ (m) невідоме***	
n	***0,95***	***0,99***	***0,95***	***0,99***	***0,95***	***0,99***	***0,95***	***0,99***
1	1,65	2,33						
2	1,96	2,58	1,41	1,41	1,39	1,82	—	—
3	2,12	2,71	1,70	1,73	1,74	2,22	1,15	1,15
4	2,23	2,81	1,90	1,97	1,94	2,43	1,48	1,50
5	2,32	2,88	2,05	2,15	2,08	2,57	1,71	1,76
6	2,39	2,93	2,16	2,30	2,18	2,68	1,87	1,97
7	2,44	2,98	2,26	2,42	2,27	2,76	2,02	2,14
8	2,49	3,02	2,33	2,52	2,33	2,83	2,12	2,27
9	2,53	3,06	2,40	2,61	2,39	2,88	2,21	2,39
10	2,57	3,09	2,45	2,68	2,44	2,93	2,29	2,48
11	2,60	3,12	2,51	2,74	2,48	2,97	2,36	2,56
12	2,63	3,14	2,55	2,80	2,52	3,01	2,41	2,64
13	2,66	3,17	2,59	2,85	2,56	3,04	2,46	2,70
14	2,68	3,19	2,62	2,90	2,59	3,07	2,51	2,76
15	2,71	3,21	2,66	2,94	2,62	3,10	2,55	2,81
16	2,73	3,23	2,69	2,97	2,64	3,12	2,59	2,85
17	2,75	3,24	*2,72*	3,00	*2,67*	3,15	2,62	2,89
18	2,77	3,26	2,75	3,04	2,69	3,17	2,65	2,93
19	2,78	3,28	2,77	3,07	2,71	3,19	2,68	2,97
20	2,80	3,29	2,79	3,10	2,73	3,21	2,71	3,00
21	2,82	3,30	2,81	3,12	2,75	3,22	2,73	3,03
22	2,83	3,32	2,83	3,14	2,77	3,24	2,76	3,06
23	2,84	*3,34*	2,85	3,17	2,78	3,26	2,78	3,09
24	2,86	3,35	2,87	3,19	2,80	3,27	2,80	3,11
25	2,87	3,36	2,89	3,22	2,82	3,28	2,82	3,13
30	2,93	3,40	2,96	3,30	2,89	3,35	2,91	3,24
40	3,01	3,48	3,08	3,43	2,98	3,44	3,04	3,38
50	3,08	3,54	3,16	3,52	3,06	3,50	3,13	3,48
60	3,14	3,59	3,23	3,59	3,11	3,56	3,20	3,56
80	3,22	3,66	3,31	3,68	3,21	3,64	3,31	3,67
100	3,28	3,71	3,39	3,76	3,27	3,70	3,38	3,75
120	3,33	3,76	3,46	3,83	3,33	3,75	3,45	3,82