

Приклади розв'язань завдань
Загальне дослідження функцій

Загальне дослідження функцій доцільно виконувати за наступною *схемою*.

1. Знаходимо область визначення функції і з'ясовуємо, чи має графік точки перетину з координатними осями. Досліджуємо функцію на парність та непарність.

2. Досліджуємо графік функції на наявність асимптот.

3. Знаходимо похідну 1-го порядку і критичні точки 1-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 1-го роду.

4. Знаходимо похідну 2-го порядку і критичні точки 2-го роду (якщо вони існують). Визначаємо знак y'' на інтервалах, які дістаємо в результаті розбиття області визначення функції критичними точками 2-го роду.

5. Критичні точки 1-го та 2-го роду вказуємо на координатній прямій. В результаті область визначення буде розбита на інтервали. Будемо таблицю, в якій у першому рядку запишемо ці інтервали та критичні точки.

Інтервали та критичні точки (x)	
y'	
y''	
y	

а) Використовуючи y' з'ясовуємо, на яких інтервалах функція зростає або спадає, та досліджуємо критичні точки 1-го роду на екстремуми.

б) Використовуючи y'' , досліджуємо на інтервалах графік функції на опуклість та угнутість.

Результати досліджень в пунктах а) і б) заносимо до останнього рядка таблиці. Обчислюємо значення функції в точках екстремуму і знаходимо точки перегину.

6. Будуємо графік функції.

Приклад 1. Виконати загальне дослідження функції

$$y = 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

1) а) Область визначення функції – $D = (-\infty; +\infty)$.

б) Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю Oy обчислимо значення функції у точці $x = 0$:

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3}{4} \cdot 0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 = 0.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = 0$, тобто проходить через початок координат – точку $O(0; 0)$.

в) Для знаходження точок перетину графіка функції з віссю Ox слід розв'язати рівняння $y(x) = 0$:

$$2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = 0, \quad x \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = 0, \text{ звідки}$$

$$x = 0 \text{ або } 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 = 0.$$

Корені квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{273}}{4} \approx -6,4; \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{273}}{4} \approx 1,9.$$

Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках $x_1 \approx -6,4$, $x_2 \approx 1,9$ та у точці $x = 0$ (початок координат).

г) Функція ні парна, ні непарна, оскільки $y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x)$.

2) Дослідимо графік функції на наявність асимптот.

а) Рівняння *похилих асимптот*

$$y = kx + b, \tag{1}$$

де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx), \tag{2}$$

якщо границі існують і скінченні.

Оскільки для заданої функції

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}x^2 \right) = \infty,$$

то похилих асимптот графік функції не має.

б) Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y(x)$,
якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \infty. \quad (3)$$

Оскільки функція елементарна і область визначення функції є вся
числова пряма, то вертикальних асимптот немає.

3 Знайдемо похідну 1-го порядку:

$$y' = \left(2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)' = 2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

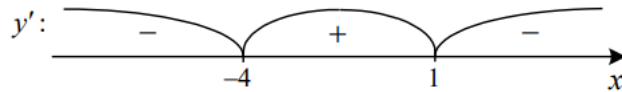
Критичні точки 1-го роду слід шукати серед точок, в яких: а)
 $y' = 0$; б) y' не існує.

а) $y' = 0$: $2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$, або $x^2 + 3x - 4 = 0$, звідки $x = -4$ та
 $x = 1$.

б) y' не існує: таких точок немає, оскільки похідна визначена при
будь-якому $x \in D$.

Отже, маємо дві критичні точки 1-го роду $x = -4$, $x = 1$.

Вказуємо критичні точки на координатній прямій і визначаємо знак
 y' на отриманих інтервалах:



(наприклад, $y'(-6) = -25 < 0$, $y'(0) = 2 > 0$, $y'(2) = -3 < 0$).

4 Знайдемо похідну 2-го порядку:

$$y'' = \left(2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = -\frac{3}{2} - x.$$

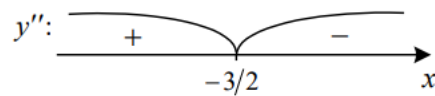
Критичні точки 2-го роду слід шукати серед точок, в яких: а)
 $y'' = 0$; б) y'' не існує.

а) $y'' = 0: -\frac{3}{2} - x = 0, x = -\frac{3}{2}$.

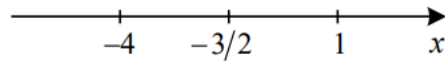
б) y'' не існує: таких точок немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x = -\frac{3}{2}$.

Вказуємо критичну точку на координатній прямій і визначаємо знак y'' на отриманих інтервалах:



5 Вкажемо критичні точки 1-го та 2-го роду на координатній прямій:



Отже, маємо чотири інтервали: $(-\infty; -4)$, $(-4; -1,5)$, $(-1,5; 1)$, $(1; +\infty)$.

Заповнимо таблицю. Заповнюючи рядки, що відповідають y' та y'' , використовуємо результати досліджень у пунктах **3** та **4**.

x	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; -1,5)$	$-1,5$	$(-1,5; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\searrow \cup$	\min $y(-4) = -9\frac{1}{3}$	$\nearrow \cup$	т. п. $y(-1,5) = -4\frac{1}{8}$	$\nearrow \cap$	\max $y(1) = 1\frac{1}{12}$	$\searrow \cap$

Позначення:

- \searrow – функція спадає;
- \nearrow – функція зростає;
- \cup – графік угнутий;
- \cap – графік опуклий;
- т.п. – точка перегину графіка.

6 Будуємо графік функції, використовуючи результати пунктів **1**, **2**, **5**.

