Застосування похідної

1. Дотична до кривої

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то рівняння *дотичної* до неї в точці $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \qquad (5)$$

де $y'(x_0) = k$ – кутовий коефіцієнт дотичної; $y_0 = f(x_0)$.

Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$:

1. $y = x^3 - 4x + 6$; $\mathrm{M}_0(1;3)$.

$\ulcorner$ Знайдемо похідну заданої функції: $y' = 3x^2 - 4$. За умовою

$$x_0 = 1. \text{ Тому } y'(1) = 3(1)^2 - 4 = 3 - 4 = -1.$$

Тоді шукане рівняння дотичної

$y - 3 = (-1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$. $\lrcorner$

2. $y = 2\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; $\mathrm{M}_0\left(0; -\sqrt{3}\right)$.

$\ulcorner$ $y' = 2\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) \cdot 4 = 8\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

$$y'(0) = 8\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 8\cos\frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Тоді шукане рівняння дотичної

$$y + \sqrt{3} = 4(x - 0) \Leftrightarrow y + \sqrt{3} = 4x \Leftrightarrow 4x - y - \sqrt{3} = 0. \ \lrcorner$$

3. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$: а) паралельна до прямої $y = 2x - 4$; б) перпендикулярна до прямої $x + y = 1$?

$\ulcorner$ а) В рівнянні (5) $y'(x_0) = k$ – кутовий коефіцієнт дотичної. Відомо (див. розділ 3), що дві прямі паралельні, якщо їх кутові коефіцієнти рівні.

Задана пряма має кутовий коефіцієнт $k_1 = 2$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи:

$$y' = 2x; \ k = y'(x_0) = 2x_0.$$

Так як за умовою має бути $k = k_1$, то $2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Оскільки точка дотику $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ належить параболі, то $y_0 = x_0{}^2 = 1$.

Таким чином, $\mathrm{M}_0(1;1)$ – шукана точка.

б) Пряма $x + y = 1$ має кутовий коефіцієнт $k_2 = -1$. Відома умова перпендикулярності двох прямих (див. розділ 3): $k \cdot k_2 = -1$. Звідси $2x_0(-1) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Знайдемо ординату шуканої точки: $y_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Таким чином, $\mathrm{M}_0\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ – шукана точка. $\lrcorner$

4. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 2x^5 + 3x^3 + 4x - 5$ в точці з абсцисою $x_0 = 0$.

$\ulcorner$ Знайдемо ординату точки дотику: $y_0 = f(0) = -5$.

Знайдемо похідну: $y' = 10x^4 + 9x^2 + 4$; $y'(0) = 4$.

Рівняння дотичної матиме вигляд

$y - (-5) = 4(x - 0) \Leftrightarrow y + 5 = 4x \Leftrightarrow 4x - y + 5 = 0$. $\lrcorner$

5. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 9x - 4$ в точці з абсцисою $x = -1$.

$\ulcorner$ Ордината точки дотику $y_0 = f(-1) = 1 + 9 - 4 = 6$.

Знайдемо похідну: $y' = 2x - 9$, $y'(-1) = -2 - 9 = -11$.

Отже, рівняння дотичної $y - 6 = -11(x + 1) \Leftrightarrow y - 6 = -11x - 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x + y + 5 = 0$. $\lrcorner$

6. При якому значенні незалежної змінної дотичні до кривих $y = x^2$ і $y = \frac{4}{3}x^3$ перпендикулярні?

⌈ Щоб дотичні до кривих були перпендикулярні, потрібно, щоб їх кутові коефіцієнти задовольняли умову

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \qquad (6)$$

де $k_1 = y'(x_0)$, $y = x^2$; $k_2 = y'(x_0)$, $y = \frac{4}{3}x^3$.

Знайдемо похідні. Якщо $y = x^2$, то $y' = 2x$; якщо $y = \frac{4}{3}x^3$, то $y' = 4x^2$. Тоді $k_1 = 2x_0$; $k_2 = 4{x_0}^2$. Підставляючи значення k_1 і k_2 у співвідношення (6), одержимо:

$$2x_0 \cdot 4{x_0}^2 = -1 \Leftrightarrow 8{x_0}^3 = -1 \Leftrightarrow {x_0}^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $x_0 = -\frac{1}{2}$. ⌋

2. Дослідження функцій на монотонність

Функція $y = f(x)$ *зростає* (*спадає*) на (a,b), якщо для будь-яких чисел $x_1 < x_2$ з (a,b) виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a,b). Якщо $y' = f'(x) > 0$ ($y' = f'(x) < 0$) при всіх $x \in (a,b)$, то функція зростає (спадає) на (a,b).

При розв'язуванні задач, в яких потрібно знайти інтервали монотонності (зростання, спадання) функції, треба перш за все знайти область визначення функції.

Знайти інтервали монотонності функцій:

7. $y = 2x + \cos x$.

⌈ $D(f) = (-\infty, +\infty)$ ($D(f)$ – область визначення функції).

Знайдемо похідну: $y' = 2 - \sin x$.

Оскільки $y' > 0$ при всіх $x \in D(f)$, то функція зростає на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, тобто на всій області визначення. ⌋

8. $y = -\ln(x^3 - 1)$.

⌈ Область визначення $D(f) = (1; +\infty)$.

Знайдемо похідну: $y' = -\frac{1}{x^3 - 1} \cdot (x^3 - 1)' = -\frac{3x^2}{x^3 - 1}$.

Оскільки $y' < 1$ при всіх $x \in D(f)$ ($x^3 - 1 > 0$ і $x^2 > 0$, $x \in D(f)$), то функція спадає на інтервалі $(1; +\infty)$, тобто на всій області визначення. ⌋

9. $y = \frac{e^x}{x}$.

⌈ $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Знайдемо похідну: $y' = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x (x - 1)}{x^2}$.

1) Знайдемо інтервали зростання. Для цього накладемо умову $y' > 0$: $\frac{e^x (x - 1)}{x^2} > 0$. Розв'язуємо дану нерівність і знаходимо $x > 1$.

Отже, функція зростає на інтервалі $(1; +\infty)$.

2) Знайдемо інтервали спадання. Для цього накладемо умову $y'<0$: $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}<0$. Розв'язуємо дану нерівність: $x<0$ або $0<x<1$.

Отже, функція спадає на інтервалах $(-\infty;0)$ та $(0;1)$. $\lrcorner$

Зауваження. Оскільки будь-яка елементарна функція неперервна в своїй області визначення, то нерівність $y'<0$ можна і не розв'язувати. Досить знайти інтервали зростання функції, а ті інтервали, які входять в область визначення функції але не є інтервалами зростання, будуть інтервалами спадання функції (за умови, що на цих інтервалах похідна не дорівнює тотожно нулю).

10. $y=\ln\left(1-x^2\right)$.

$\ulcorner$ $D(f)$: $1-x^2>0 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$. Отже, $D(f)=(-1;1)$.

Знайдемо y': $y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $-\dfrac{2x}{1-x^2}>0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0$. Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів, враховуючи, що $x(x-1)(x+1)=0$ при $x=0$, $x=-1$, $x=1$:

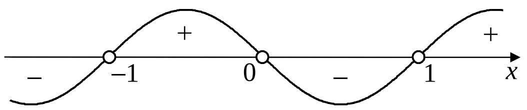

Рис. 1

З рис. 1 маємо $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Але інтервал $(1;+\infty)$ не входить в $D(f)$. Отже, функція зростає на інтервалі $(-1;0)$.

Відповідно до зробленого зауваження функція спадає на інтервалі $(0,1)$. $\lrcorner$

11. $y=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

$\ulcorner$ $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Знайдемо y':

$$y'=2\frac{2x\left(1-x^2\right)-x^2(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=2\frac{2x\left(1-x^2+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $\dfrac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}>0$. Розв'язуємо дану нерівність і знаходимо $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Отже, функція зростає на інтервалах $(0;1)$ та $(1;+\infty)$.

Згідно із зробленим зауваженням функція спадає на інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(-1;0)$. $\lrcorner$

12. $y=4x^3-21x^2+18x+20$.

$\ulcorner$ $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

Знайдемо y': $y'=12x^2-42x+18=6\left(2x^2-7x+3\right)$.

Знайдемо інтервали зростання функції. Для цього накладемо умову $y'>0$: $6\left(2x^2-7x+3\right)>0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3>0$. Спочатку розв'яжемо квадратне рівняння $2x^2-7x+3=0$ і розкладемо праву частину нерівності на множники:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot2\cdot3}}{4}=\frac{7\pm5}{4},$$

$$x_1=3,\ x_2=\frac{1}{2};$$

$$2x^2-7x+3>0 \Leftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0.$$

Розв’яжемо нерівність методом інтервалів:

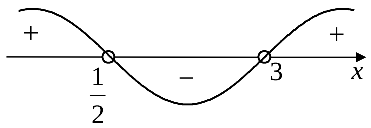

Рис. 2

З рис. 2 маємо $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

Отже, функція зростає на інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ та $(3; +\infty)$, а спадає на інтервалі $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. ⌋

3. Дослідження функцій на екстремуми

Функція $y = f(x)$ має у точці x_0 *локальний максимум* (*мінімум*), якщо знайдеться окіл точки x_0 (тобто інтервал виду $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$), що для усіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Дослідження функції на екстремуми (максимуми, мінімуми) доцільно виконувати за такою схемою:

1) Знайти похідну y'.

2) Розв’язати рівняння $y' = 0$, а також визначити ті значення x, при яких y' не існує (іншими словами: знайти *критичні точки І роду*). Функція може мати екстремуми лише в критичних точках І роду.

3) Всі критичні точки розмістити в порядку зростання. Нехай в інтервал $(a; b)$ з області визначення $D(f)$ функції потрапили точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

4) На кожному з інтервалів $(a; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_n; b)$ потрібно взяти будь-яку точку і встановити в цій точці знак похідної y' (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками).

5) Аналізуємо знаки y' при переході зліва направо через кожну критичну точку: якщо знак змінюється з “+” на “–”, то в критичній точці функція має максимум; якщо знак змінюється з “–” на “+”, то – мінімум. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак похідної y' зберігається, то екстремуму в критичній точці немає.

6) Знайти значення функції $y = f(x)$ в точках, в яких вона досягає екстремуму (*екстремальні значення* функції).

Зауваження. При дослідженні функції на екстремуми потрібно перш за все знайти область визначення функції.

Дослідити на екстремуми функції:

13. $y = \left(1 - x^2\right)^3$.

⌈ $D(f) = R$.

1) $y' = 3\left(1 - x^2\right)^2 \cdot (-2x) = -6x\left(1 - x^2\right)^2$.

2) Знаходимо критичні точки І роду:

а) $y' = 0 \Leftrightarrow -6x\left(1 - x^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x)^2 (1 + x)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1; \end{array}\right.$$

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: -1; 0; 1. В результаті одержимо інтервали: $(-\infty; -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; +\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-\infty; -1)$ візьмемо, наприклад, точку $x = -2$:

$$y'(-2) = -6(-2)\left[1 - (-2)^2\right]^2 = 108 > 0.$$

На інтервалі $(-1,0)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-\frac{1}{2}$:

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{16}>0.$$

На інтервалі $(0,1)$ візьмемо точку $x=\frac{1}{2}$: $y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}<0$.

На інтервалі $(1,+\infty)$ візьмемо точку $x=2$: $y'(2)=-108<0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	+	0	-	0	-

Табл. 1

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході лише через точку $x=0$. Оскільки знак змінюється з "+" на " - ", то в цій точці функція має максимум.

6) Значення функції в точці максимуму $y_{\max}=f(0)=1$. ⌋

Зауваження. За результатами розв'язання задачі **13** можна визначити також інтервали монотонності функції $y=\left(1-x^2\right)^3$. Так, з таблиці 1 випливає, що функція зростає на інтервалі $(-\infty;0)$ і спадає на інтервалі $(0;+\infty)$. Це зауваження стосується також прикладів **14** – **17**.

14. $y=x\sqrt{1-x^2}$.

⌈ $D(f)$: $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 1\Leftrightarrow |x|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

1) $y'=1\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=$

$$=\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0\Leftrightarrow\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x^2=0\\ \sqrt{1-x^2}\neq 0\end{cases}\Rightarrow\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right.$$

б) похідна y' не існує при $x=-1$ та $x=1$.

Точками екстремуму функції можуть бути лише точки $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Саме вони лежать всередині області визначення $D(f)=[-1;1]$ функції. В точках $x=-1$ та $x=1$ функція не може мати локальних екстремумів, оскільки ці точки лежать не всередині області визначення $D(f)$, а на її межі.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання і, враховуючи $D(f)$, маємо $-1<-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$. Інтервали: $\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-0,8$:

$$y'(-0,8)=\frac{1-2(-0,8)^2}{\sqrt{1-(0,8)^2}}=-\frac{7}{15}<0.$$

На інтервалі $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ візьмемо точку $x=0$:

$$y'(0)=\frac{1-2\cdot 0}{\sqrt{1-0}}=1>0\,.$$

На інтервалі $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ візьмемо точку $x=0{,}8$: $y'(0{,}8)=-\frac{7}{15}<0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$
y'	-	0	+	0	-

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві точки $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При переході через точку $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ знак змінюється з “ - ” на “+”. Отже, в цій точці функція має мінімум.

При переході через точку $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ знак похідної змінюється з “+” на “ - ”. Тому в цій точці функція має максимум.

6) $y_{\min}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$;

$y_{\max}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$. $\lrcorner$

15. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$.

$\ulcorner$ $D(f)=R$.

1) $y'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-\frac{5}{2}x+6=x^2-5x+6$.

2) Знаходимо критичні точки І роду:

а) $y'=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3; \end{array}\right.$

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 2; 3. В результаті одержимо інтервали: $(-\infty;2)$; $(2;3)$, $(3;+\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-\infty;2)$ візьмемо, наприклад, точку $x=0$:

$$y'(0)=6>0\,.$$

На інтервалі $(2;3)$ візьмемо точку $x=\frac{5}{2}$:

$$y'\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}+6=-\frac{1}{4}<0\,.$$

На інтервалі $(3;+\infty)$ візьмемо точку $x=4$:

$$y'(4)=4^2-5\cdot 4+6=16-20+6=2>0\,.$$

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	+	0	-	0	+

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві точки $x=2$ і $x=3$.

При переході через точку $x=2$ знак змінюється з “+” на “ - ”. Отже, в цій точці функція має максимум.

При переході через точку $x=3$ знак похідної змінюється з “ - ” на “+”. Тому в цій точці функція має мінімум.

6) Екстремальні значення функції:

$$y_{\max}=f(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{5}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2=\frac{8}{3}-10+12=\frac{14}{3};$$

$$y_{\min}=f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{5}{2}\cdot 3^2+6\cdot 3=9-\frac{45}{2}+18=\frac{9}{2}.\quad\lrcorner$$

16. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

⌜ $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$.

1) $y'=\dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2)-\sqrt[3]{x^2}}{(x+2)^2}=\dfrac{2(x+2)-3x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}=\dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$.

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0\Leftrightarrow \dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}=0\Leftrightarrow \begin{cases}4-x=0\\ 3\sqrt[3]{x}(x+2)^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow x=4\in D(f)$;

б) похідна не існує при $x=0\in D(f)$, оскільки вираз у знаменнику похідної при цьому значенні x дорівнює нулю.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 0; 4. Враховуючи область визначення функції, одержимо інтервали: $(-2;0)$; $(0;4)$; $(4;+\infty)$.

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(-2;0)$ візьмемо, наприклад, точку $x=-1$:

$$y'(-1)=\frac{4-(-1)}{3\sqrt[3]{-1}(-1+2)^2}=-\frac{5}{3}<0.$$

На інтервалі $(0;4)$ візьмемо точку $x=1$: $y'(1)=\dfrac{1}{9}>0$.

На інтервалі $(4;+\infty)$ візьмемо точку $x=5$: $y'(5)=-\dfrac{1}{3\cdot 49\sqrt[3]{5}}<0$.

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(-2;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
y'	-	не існує	+	0	-

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві критичні точки $x=0$ і $x=4$.

Оскільки при переході через точку $x=0$ знак похідної змінюється з “ - ” на “+”, то в цій точці функція має мінімум.

При переході через точку $x=4$ знак змінюється з “+” на “ - ”. Отже, в цій точці функція має максимум.

6) Значення функції в точках екстремуму:

$$y_{\min}=f(0)=0;$$

$$y_{\max}=f(4)=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$ ⌟

17. $y=(x^2-2x)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

⌜ $D(f)=(0;+\infty)$.

1) $y'=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}\cdot 2x+4=$

$=2(x-1)\ln x+x-2-3x+4=2(x-1)\ln x-2x+2=$

$=2(x-1)\ln x-2(x-1)=2(x-1)(\ln x-1)$.

2) Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0\Leftrightarrow 2(x-1)(\ln x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ \ln x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\in D(f)\\ x=e\in D(f)\end{array}\right.$

($e\approx 2{,}71$);

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

3) Розмістимо критичні точки в порядку зростання: 1; e. В результаті одержимо інтервали: $(0;1)$; $(1;e)$; $(e;+\infty)$.

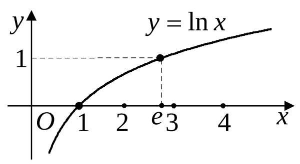

Рис. 3

4) Визначимо знак похідної на кожному з інтервалів.

На інтервалі $(0;1)$ візьмемо точку $x=\dfrac{1}{2}$:

$$y'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\ln\frac{1}{2}-1\right)=-(\ln 1-\ln 2-1)=\ln 2+1>0.$$

На інтервалі $(1;e)$ візьмемо точку $x=2$:

$$y'(2)=2(2-1)(\ln 2-1)=2(\ln 2-1)<0 \text{ (див. рис. 3).}$$

На інтервалі $(e;+\infty)$ візьмемо точку $x=3$:

$$y'(3)=2(3-1)(\ln 3-1)=4(\ln 3-1)>0 \text{ (див. рис. 3).}$$

Результати досліджень занесемо до таблиці:

x	$(0;1)$	1	$(1;e)$	e	$(e;+\infty)$
y'	+	0	-	0	+

5) З таблиці бачимо, що похідна змінює знак при переході через обидві критичні точки $x=1$ і $x=e$.

Оскільки при переході через точку $x=1$ знак похідної змінюється з "+" на "-", то в цій точці функція має максимум.

При переході через точку $x=e$ знак похідної змінюється з "-" на "+". Тому функція в цій точці має мінімум.

6) Значення функції в точках екстремуму:

$$y_{\max}=f(1)=(1-2)\ln 1-\frac{3}{2}\cdot 1+4\cdot 1=0-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2};$$

$$y_{\min}=f(e)=\left(e^2-2e\right)\ln e-\frac{3}{2}e^2+4e=e^2-2e-\frac{3}{2}e^2+4e=$$

$$=2e-\frac{1}{2}e^2=e\left(2-\frac{1}{2}e\right). \quad \lrcorner$$

4. Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень, які позначаються M і m, де $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$; $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$. Ці значення досягаються або в точках локального екстремуму, які є критичними точками I роду, або на кінцях відрізка.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку $[a;b]$ потрібно обчислити значення функції в усіх критичних точках I роду, які належать відрізку $[a;b]$, і в точках $x=a$, $x=b$ (кінцях відрізка), після чого серед цих значень вибрати найбільше і найменше. Це і будуть відповідно M і m.

Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку:

18. $y=x+\dfrac{1}{x}$, $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$.

$\ulcorner$ $y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1; \end{array}\right.$

б) точки з області визначення функції, в яких y' не існує, відсутні.

Отже, маємо критичні точки $x=-1$ та $x=1$.

Відрізку $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$ належить лише точка $x=1$: $f(1)=2$. Знаходимо значення функції на кінцях відрізка: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$, $f(3)=\dfrac{10}{3}$. Порівнюємо числа 2, $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{10}{3}$. Найбільше серед них $\dfrac{10}{3}$, а найменше 2. Отже, $M=\max\limits_{\left[\frac{1}{2},3\right]} f(x)=\dfrac{10}{3}$; $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2},3\right]} f(x)=2$. $\lrcorner$

19. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\dfrac{1}{3}$, $[0,5]$.

$\ulcorner$ Знаходимо похідну y':

$$y'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2\cdot 2x+3=x^2-4x+3$$

Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y'=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=3$;

б) точки, в яких y' не існує, відсутні.

Отже, маємо критичні точки $x=1$, $x=3$, які належать відрізку $[0;5]$.

Обчислимо значення функції в точках $x=1$, $x=3$ і на кінцях відрізка: $f(1)=\frac{1}{3}-2+3-\frac{1}{3}=1$, $f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+3\cdot 3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$, $y(0)=-\frac{1}{3}$, $f(5)=\frac{19}{3}$.

Серед знайдених чисел вибираємо найбільше і найменше: $M=\max\limits_{[0,5]} f(x)=f(5)=\frac{19}{3}$, $m=\min\limits_{[0,5]} f(x)=f(0)=f(3)=-\frac{1}{3}$. ⌋

20. $y=3x-x^3$, $[-2,3]$.

⌜ Знаходимо y' і критичні точки I роду:

$$y'=3-3x^2=3\left(1-x^2\right),$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3\left(1-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2,3] \\ x=1\in[-2,3]. \end{array}\right.$$

Обчислюємо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка: $f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(-2)=2$, $f(3)=-18$.

Порівнюємо одержані значення і маємо

$$M=\max_{[-2,3]} f(x)=f(1)=f(-2)=2,$$

$$m=\min_{[-2,3]} f(x)=f(3)=-18. \quad ⌋$$

21. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0;1]$.

⌜ $$y'=\frac{(-1+2x)\left(1+x-x^2\right)-\left(1-x+x^2\right)(1-2x)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x-1)\left(1+x-x^2+1-x+x^2\right)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=\frac{2(2x-1)}{\left(1+x-x^2\right)^2}.$$

а) $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(2x-1)}{\left(1+x-x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ \left(1+x-x^2\right)^2\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$;

б) точки з області визначення заданої функції, в яких y' не існує, відсутні.

Обчислимо значення функції в критичній точці $x=\frac{1}{2}\in[0,1]$ і на кінцях відрізка:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5},\ f(0)=1,\ f(1)=1.$$

Порівнявши одержані значення, маємо

$$M=\max_{[0,1]} f(x)=f(0)=f(1)=1,$$

$$m=\min_{[0,1]} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}. \quad ⌋$$

22. $y=\sin 2x-x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

⌜ $y'=2\cos 2x-1$,

$$y'=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in Z.$$

Відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ належать лише точки $x=-\frac{\pi}{12}$ та $x=\frac{\pi}{12}$.

$$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{12}=-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi-6}{12},$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{6-\pi}{12},$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\pi+\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\sin\pi-\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Порівнявши одержані значення, маємо

$$M=\max_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$m=\min_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}. \quad \lrcorner$$

5. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційовних функцій, якщо є невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

або

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

де a – число або один із символів $\infty, +\infty, -\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)},$$

якщо границя справа існує (не обов'язково скінченна).

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів.

Аналогічне правило має місце і для односторонніх границь.

Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\ln x}$.

$$\ulcorner \quad \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)'}{\left(2\ln x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}x^2=1. \quad \lrcorner$$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

$$\ulcorner \quad \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos 3x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3\sin 3x\right)'}{\left(2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5. \quad \lrcorner$$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

$$\ulcorner \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0 . \quad \lrcorner$$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$\ulcorner \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 . \quad \lrcorner$$

27. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

$$\ulcorner \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to a+0}\frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} = \cos a \cdot \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to a+0}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} =$$

$$= \cos a \cdot \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to a+0}\frac{e^x - e^a}{(x-a)e^x} = \frac{\cos a}{e^a}\cdot \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to a+0}\frac{e^x - e^a}{x-a} = \frac{\cos a}{e^a}\lim_{x\to a+0}\frac{e^x}{1} = \frac{\cos a}{e^a}\cdot e^a = \cos a . \quad \lrcorner$$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

$$\ulcorner \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5}{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{5\cdot \cos^2 3x}{3\cos^2 5x} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{5\cdot 2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}{3\cdot 2\cos 5x(-\sin 5x)\cdot 5} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\cdot \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{(-\sin 3x)\cdot 3}{(-\sin 5x)\cdot 5}\cdot(-1) = -\frac{3}{5}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = -\frac{3}{5}\cdot(-1) = \frac{3}{5} . \quad \lrcorner$$

Наведемо приклад, коли правило Лопіталя застосувати не можна.

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

$$\ulcorner \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \lim_{x\to \infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to \infty}\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to \infty}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} .$$

Оскільки границя праворуч не існує, то застосовувати правило Лопіталя для знаходження заданої границі не можна. Шукану границю можемо знайти, поділивши попередньо чисельник і знаменник на x:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to \infty}\frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1, \text{ так як } \lim_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x} = 0 \quad (|\sin x| \le 1). \quad \lrcorner$$