# 2. ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ГЕОДЕЗІЇ

**Тема 2.2: Відхилення прямовисних ліній та відступи геоїда від земного еліпсоїда.**

1. Відхилення прямовисних ліній та відступи геоїда від земного еліпсоїда
2. Астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній
3. Гравіметричні відхилення прямовисних ліній
4. Інтерполювання відхилень прямовисних ліній

## 1. Відхилення прямовисних ліній та відступи геоїда від земного еліпсоїда

Напрям сили ваги в деякій точці, або напрям прямовисної лінії повністю визначається виглядом рівневої поверхні в цій точці. Визначає вигляд рівневої поверхні, а, відповідно, і напрям прямовисних ліній розподіл мас в земній поверхні. Це ж саме стосується і відступів геоїда від земного еліпсоїда: відступи обумовлені існуючим розподілом мас на земній поверхні і всередині її та відповідають цьому розподілу.

Порушення певного розподілу мас, при якому густина речовини змінюється в горизонтальному напрямі (має різні значення в різних місцях на одній глибині), охоплюють лише зовнішній шар Землі, товщина якого не перевищує 70 *км*. В порівнянні з розмірами та масою всієї Землі така незначна величина означає, що відступи геоїда від еліпсоїда та відхилення прямовисних ліній від нормалей до цього еліпсоїда повинні бути малими величинами.

На основі сучасної моделі гравітаційного поля EGM96 (Earth Gravitational Model 1996) можна характеризувати відступи геоїда від загального земного еліпсоїда. Доказаним фактом є існування глобальних хвиль геоїда, тобто загальних відступів його від земного еліпсоїда. Висоти цих хвиль складають до $\pm 70$ *м*, а їхня зміна має як довготний так і широтний характер. Цим глобальним відступам геоїда відповідають і глобальні відхилення прямовисних ліній від нормалей до еліпсоїда (до $10''$).

Місцеві особливості будови земної кори викликають локальні хвилі геоїда, яким відповідають і локальні відхилення прямовисної лінії. Причинами, що викликають локальний характер, можуть бути аномальне залягання порід всередині земної кори, берегові лінії океанів та морів, гірські утворення тощо. Місцеві відступи геоїда представлені, переважно, у вигляді порівняно незначних хвиль, що мають невелику висоту та область поширення. Проте відповідні їм локальні відхилення прямовисної лінії можуть досягати дуже значних величин (десятків секунд дуги), що є наслідком значної зміни кривизни рівневої поверхні.

Коли йде мова про відступи геоїда від земного еліпсоїда та відповідні відхилення прямовисних ліній, то ми повинні чітко зрозуміти про які параметри йдеться.

Відступи геоїда над земним еліпсоїдом – це перевищення точок геоїда відносно поверхні еліпсоїда. Вони не можуть бути виміряні безпосередньо. Результати астрономо-геодезичних і гравіметричних вимірювань, віднесені до поверхні певного еліпсоїда, дають тільки похідні величини або градієнти відступів геоїда від поверхні віднесення. Дослідження фігури геоїда і полягає у визначені її відступів від фігури еліпсоїда за похідними від них величинами, якими і є відхилення прямовисних ліній та аномалії сили ваги $\Delta g = g - \gamma$, що безпосередньо обчислюються за даними вимірювань.

Якщо відхилення прямовисної лінії визначають як кут між нормаллю до поверхні загального земного еліпсоїда і напрямом прямовисної лінії, то називають його абсолютним відхиленням прямовисної лінії. Якщо ж до уваги береться нормаль до поверхні референц-еліпсоїда – то отримують відносне відхилення прямовисної лінії.

Абсолютні відхилення прямовисної лінії залежать тільки від розподілу мас Землі. Відносні відхилення прямовисної лінії залежать від розподілу мас Землі, прийнятих параметрів і орієнтування референц-еліпсоїда. Очевидно, що відносні відхилення прямовисної лінії можуть значно відрізнятися від абсолютних в тих же точках і через них ми не можемо безпосередньо робити висновки про характер неправильностей у будові земної кори.

Напрям прямовисної лінії визначається на земній поверхні з астрономічних спостережень через визначення астрономічних координат – широти $\varphi$ та довготи $\lambda$. Напрям нормалі до поверхні референц-еліпсоїда визначається геодезичними координатами $B$ і $L$. Звідси випливає, що відхилення прямовисних ліній можна визначити через співставлення астрономічних і геодезичних координат. Оскільки геодезичні координати традиційно визначаються на поверхні референц-еліпсоїда за результатами лінійних і кутових вимірювань на фізичній поверхні Землі, то відхилення прямовисної лінії називають також відносними астрономо-геодезичними. Відзначимо, що при обчислені геодезичних координат на основі результатів супутникових спостережень, із порівняння їх з відповідними астрономічними координатами отримаємо абсолютні астрономо-“геодезичні” відхилення прямовисних ліній.

Напрям прямовисної лінії в даній точці земної поверхні збігається з напрямом нормалі до рівневої поверхні потенціалу сили ваги $W$ в цій же точці або, точніше, з дотичною до силової лінії дійсного поля сили ваги. Напрям нормалі до земного еліпсоїда збігається з дотичною до силової лінії нормального поля сили ваги. Звідси, відхилення прямовисної лінії можна визначити як кут між дотичними до силових ліній дійсного і нормального полів сили ваги. В такому сенсі його називають гравіметричним відхиленням прямовисної лінії або відхиленням важка.

Одна із причин появи відхилень прямовисних ліній – притягання надлишкових мас на материках і недостатність цих притягальних мас в океанах. І хоча зміна зовнішніх (топографічних) форм рельєфу не є домінуючою як зміна густини порід земної кори, все ж форми топографічного рельєфу вносять певний вплив на знак і величину відхилень прямовисних ліній. Цей вплив дещо послаблюється через так звану ізостатичну компенсацію або ізостазію. Відхилення прямовисних ліній, що визначаються на основі впливу топографічних мас з врахуванням явища ізостазії, називаються топографо-ізостатичними відхиленнями.

Відступи геоїда від земного еліпсоїда теж можна класифікувати на абсолютні – висоти геоїда над загальним земним еліпсоїдом (позначається через $N$) та відносні – висоти геоїда над референц-еліпсоїдом (позначається через $\varsigma$).

Відмітимо значення відступів геоїда та відхилень прямовисних ліній.

– Відступи (висоти) геоїда над референц-еліпсоїдом, як і відхилення прямовисних ліній, безпосередньо використовуються при вивченні фігури Землі: виводі параметрів земного еліпсоїда; встановленні вихідних геодезичних дат; визначенні взаємного орієнтування різних геодезичних систем координат.

– З використанням висот геоїда та відхилень прямовисних ліній розв’язують багато редукційних задач вищої геодезії.

– Через відхилення прямовисних ліній встановлюється прямий зв’язок між астрономічними і геодезичним координатами.

– За допомогою відхилень прямовисних ліній здійснюється перехід від безпосередньо виміряного астрономічного азимута до геодезичного азимута.

– Відхилення прямовисних ліній необхідні при класичному методі визначення геодезичних висот.

### 2. Астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній

Оскільки відхилення прямовисних ліній у будь-якій точці визначається як різниця двох векторних напрямів, то воно повинно визначатись двома параметрами – величиною кута, що позначається через $\theta$ і називається повним відхиленням прямовисної лінії, та азимутом $\vartheta$ площини, в якій він розміщується. Проте частіше відхилення прямовисних ліній визначаються двома іншими величинами: проекцією повного відхилення прямовисної лінії $\theta$ на площину меридіана і першого вертикала даної точки. Проекція на площину меридіана називається складовою відхилення прямовисної лінії в меридіані і позначається $\xi$, а проекція на площину першого вертикалу – складовою відхилення прямовисної лінії в першому вертикалі і позначається через $\eta$.

Нехай фізична поверхня, поверхня геоїда та поверхня земного еліпсоїда в точці $M$ співпадають. На *рис. 2.1* зображений полярний сферичний трикутник $z_\Gamma z_A P$, вершини якого представлені геодезичним $Z_\Gamma$ і астрономічним $Z_A$ зенітами точки $M$ та полюсом світу $P$. Даний трикутник утворений проекціями осей систем координат $Z_\Gamma, Z_A$ на сферу одиничного радіуса та точкою перетину геодезичного і астрономічного меридіанів точки $M$ (лінія $MP$ паралельна осі обертання Землі). Згідно визначення, відхилення прямовисної лінії визначається кутом $\angle Z_\Gamma M Z_A$ або стороною сферичного трикутника $Z_\Gamma Z_A P$ – $\theta$ та азимутом площини $Z_\Gamma Z_A M$ – $\vartheta$, в якому знаходиться повне відхилення $\theta$. Дуга $Z_\Gamma P$ вимірює кут між нормаллю до еліпсоїда і напрямом на точку $P$, тобто вираз $Z_\Gamma P = 90^0 - B$ відповідає геодезичній широті точки $M$. Відповідно, дуга $Z_A P = 90^0 - \varphi$ відповідає астрономічній широті даної точки $M$. Оскільки астрономічні і геодезичні довготи відраховуються від одного початкового меридіана, то $\angle Z_\Gamma P Z_A = \lambda - L$. Сферичний трикутник $Z_\Gamma Z_A P$ з позначеними сторонами і кутами приведений на *рис. 2.1*.

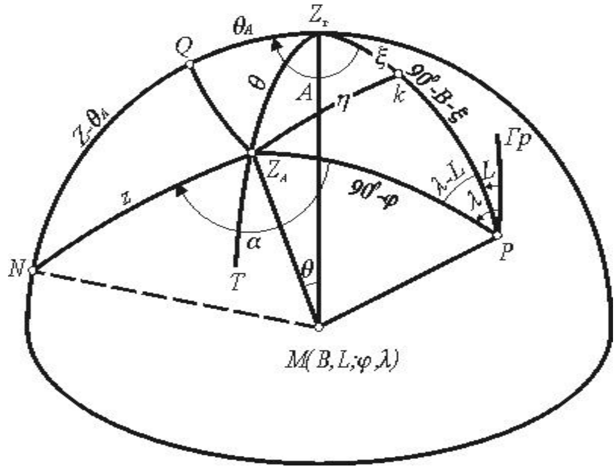


*Рис. 2.1.*

Проведемо криву $Z_A k$ ортогональну до $\cup Z_\Gamma P$. Утворений трикутник $Z_A Z_\Gamma k$ буде малим, оскільки повне відхилення прямовисної лінії $\theta$ рідко перевищує десятки секунд дуги. Тоді, із малого сферичного трикутника $Z_A Z_\Gamma k$, отримаємо

$$\begin{aligned} \theta \cos\vartheta &= \xi, \\ \theta \sin\vartheta &= \eta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

У формулі (2.3) через $\xi$ та $\eta$ позначено складові повного відхилення прямовисної лінії $\theta$ у меридіані та першому вертикалі відповідно.

На основі формул синусів та п'яти елементів для сферичного трикутника $Z_\Gamma Z_A P$ маємо

$$\frac{\sin(\lambda - L)}{\sin\theta} = \frac{\sin\upsilon}{\sin(90^0 - \varphi)},$$

$$\begin{aligned} \sin\theta\cos\vartheta = \cos(90^0 - \varphi)\sin(90^0 - B) - \\ - \sin(90^0 - \varphi)\cos(90^0 - B)\cos(\lambda - L) \end{aligned}.$$

Враховуючи члени першого порядку розкладів для малих величин $\theta, (\lambda - L)$ та позначення (2.3), отримаємо остаточно вирази для складових відхилення прямовисних ліній

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi - B, \\ \eta &= (\lambda - L)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

На основі (2.3) отримаємо

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ tg\vartheta &= \frac{\eta}{\xi} \end{aligned}\right\}. \tag{2.5}$$

На практиці отримують спочатку складові $\xi, \eta$ за (2.4), а потім вже за формулами (2.5) $\theta$ і $\vartheta$.

Можна отримати величину $\theta_A$ відхилення прямовисної лінії для будь-якого напряму з азимутом $A$. На основі *рис. 2.1* (без доведення) запишемо остаточно

$$\theta_A = \xi\cos A + \eta\sin A. \tag{2.6}$$

При виводі формул астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній вважалося, що фізична поверхня і поверхня земного еліпсоїда в заданій точці збігаються або перетинаються. В загальному випадку точка фізичної поверхні не знаходиться на поверхні еліпсоїді, а має певну висоту $H$. Через це напрям прямовисної лінії, що задається безпосередньо виміряними астрономічними координатами $\varphi, \lambda$ деякої точки $Q$, не збігається з напрямом прямовисної лінії у перетині її з поверхнею еліпсоїда.

Виходом з такого становища було б редукування астрономічних координат на поверхню еліпсоїда по прямовисній лінії. Проте траєкторія прямовисної лінії всередині Землі може змінюватись невідомим нам чином внаслідок незнання густини мас земної кори, що унеможливлює точне редукування астрономічних координат.

Очевидно, що трактування поняття відхилення прямовисної лінії як кут між дотичними до силових ліній дійсного і нормального полів сили ваги буде відповідати всім можливим випадкам. Так у виміряні астрономічні координати не потрібно вводити жодних поправок, оскільки саме вони дають напрям вектора сили ваги в даній точці земної поверхні. Проте другий вектор – напрям нормалі або напрям дотичної до силової лінії нормального поля рівневого еліпсоїда, відрізняється від напряму нормалі на поверхні цього еліпсоїда. Геометричний зміст різниці між вказаними напрями полягає в тому, що від геодезичних координат на еліпсоїді здійснюється перехід до геодезичних координат, віднесених до поверхні еліпсоїда, що проходить через дану точку $Q$. Оскільки силові лінії нормального гравітаційного поля є плоскими кривими, тобто відсутні викривлення в довготі, то при переміщенні по них змінюється тільки широта.

З врахуванням зроблених пояснень можемо написати

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\bar{\gamma}, \bar{g}\right) = \varphi - B_n, \\ \eta &= (\lambda - L)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2.7}$$

У (7) позначено: $\bar{\gamma}$ – напрям нормалі до еліпсоїда в точці $Q$, або, інакше, напрям дотичної до силової лінії нормального поля, яка проходить через точку $Q$ і утворює з площиною екватора кут $B_n$, $\bar{g}$ – напрям сили ваги в точці $Q$, який складає з площиною екватора кут $\varphi$.

Оскільки із опрацювання спостережень ми можемо отримати геодезичну широту $B$, то для визначення величини складової $\xi$ необхідно знати різницю $(B - B_n)$. В курсі фізичної геодезії дається вивід цієї поправки, кінцевий вигляд якої наступний

$$(B - B_n)'' = -0.17091 H_{км} \sin 2B. \tag{2.8}$$

Отже, остаточні формули для визначення астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \xi^{аг} &= \varphi - B - 0.171'' H_{км} \sin 2B, \\ \eta^{аг} &= (\lambda - L)\cos B. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Знайдемо величини впливу відхилення прямовисних ліній на азимути, горизонтальні та вертикальні кути. Якщо позначити: $A$ – геодезичний азимут напряму з пункту $Q$ на суміжний пункт, $a$ – астрономічний азимут того ж напряму, то різниця вказаних азимутів має такий вигляд

$$A - a = -\eta tg\varphi + (\eta \cos A - \xi \sin A) ctgz_A \tag{2.10}$$

Звернемо увагу, що вираз (2.10) справедливий як для редукції астрономічного азимута, визначеного із астрономічних чи гіроскопічних спостережень, так і для виміряного горизонтального напряму.

У рівнянні (2.10) розрізняють дві частини: одну у вигляді $\eta tg\varphi$, яка є сталою в даній точці, і другу - змінну, що залежить від азимута конкретного напряму та його зенітної відстані.

Оскільки горизонтальний кут визначається різницею напрямів, то, очевидно, що формула

$$\delta_\theta = (\eta \cos A - \xi \sin A) ctgz \tag{2.11}$$

і буде виглядом поправки в горизонтальний кут $\delta_\theta$ за відхилення прямовисної лінії. Величину $\delta_\theta$ називають поправкою в горизонтальний кут, обумовлену відхиленням прямовисної лінії у вершині даного кута. Ця поправка вводиться при редукуванні виміряних горизонтальних кутів з фізичної поверхні на поверхню земного еліпсоїда.

Поправка $\delta_\theta$, що визначається формулою (2.11), переважно має досить мале числове значення у порівнянні з поправкою $\eta tg\varphi$. Так, при визначенні астрономічних азимутів сторін геодезичної мережі, зенітні відстані, як правило, близькі до $90^0$, тобто $ctgz \approx 0.017 \div 0.0017$. Приймемо, що для деякого пункту на широті $\varphi = 49^0$ складові відхилення прямовисної лінії дорівнюють $\eta = 5'', \xi = -5''$, а азимут напряму – $A = 45^0$. Тоді

$$\eta tg\varphi = 5.75'', \delta_\theta = 0.12 \div 0.01''.$$

Зважаючи, що астрономічний азимут $a$ визначається з похибкою $\pm 0.7''$, то для переходу до геодезичного азимута рівняння (2.11) записують у вигляді

$$A = a - \eta tg\varphi = a - (\lambda - L)\sin\varphi \tag{2.12}$$

Це рівняння називають рівнянням Лапласа, а азимути, що отримують за формулою (2.12), називають азимутами Лапласа. Для їх отримання необхідно на пункті геодезичної мережі мати визначені значення астрономічного азимута та астрономічних координат, переважно, астрономічної довготи. Оскільки азимути Лапласа практично не залежать від похибок кутових вимірювань в геодезичних мережах, то їх можна використовувати як надійний контроль кутових вимірювань у ланці тріангуляції. Нехтувати поправкою $\delta_\theta$ можна при одиничних редукуваннях горизонтальних кутів. При передачі азимутів через багато кутів трикутників ланки тріангуляції ця поправка може носити систематичний характер, особливо у випадку неповної відповідності розмірів та орієнтування референц-еліпсоїда геоїду в межах території розташування астрономо-геодезичної мережі, що позначиться на складових $\xi, \eta$.

Формула

$$z = z_A + (\xi\cos A + \eta\sin A) \tag{2.13}$$

визначає вигляд редукційної поправки за вплив складових відхилення прямовисних ліній на виміряні зенітні відстані.

В класичній геодезії пунктами для отримання астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній служили пункти Лапласа. На інших пунктах геодезичної мережі ці відхилення визначали через інтерполювання.

На пунктах Лапласа чи на будь-яких інших пунктах, де визначені астрономічні і геодезичні координати, складові астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній обчислюються за формулами (2.9). Не важко помітити, що похибка значення $\cos\varphi$ при визначенні величини $\eta$ завжди буде настільки малою, що нею можна знехтувати. Точність визначення астрономічних координат складає 0.3'' в широті та $0.3''\sec\varphi$ в довготі. Враховуючи (2.9), отримаємо для середніх квадратичних похибок

$$m_\xi^{\,2} = (0.3'')^2 + m_B^{\,2},$$

$$m_\eta^{\,2} = (0.3'')^2 + m_L^{\,2}\cos^2\varphi.$$

Вважаючи, що точність визначення широти і довготи є однаковою, тобто $m_B = m_L\cos\varphi = m$, запишемо

$$m_\xi^{\,2} = m_\eta^{\,2} = (0.3'')^2 m^2$$

При опрацюванні геодезичних мереж величиною похибки визначення геодезичних координат можна знехтувати у порівнянні з похибкою астрономічних визначень. Це означає, що обчислення астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній повністю залежить від точності астрономічних визначень, що виконуються на пунктах геодезичної мережі. Для пунктів, астрономо-геодезичні відхилення яких визначають шляхом інтерполювання через відомі їх значень на інших пунктах, точність буде визначатися точністю визначення останніх та точністю інтерполювання.

### 3. Гравіметричні відхилення прямовисних ліній

Поскільки відхилення прямовисної лінії є кут між нормалями до рівневих поверхонь дійсного і нормального гравітаційного полів, то, очевидно, має місце функціональний зв'язок між відхиленнями прямовисних ліній та аномаліями сили ваги, тобто $\theta = f(\Delta g)$. Термін “гравіметричні” означає, що відхилення прямовисних ліній визначають на основі вимірювань прискорення сили ваги методами гравіметрії.

Кут між нормаллю до рівневого еліпсоїда та прямовисною лінією на земній поверхні будемо представляти його складовими в площинах меридіана і першого вертикалу

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{g(M+H)}\frac{\partial T}{\partial B}, \\ \eta &= -\frac{1}{g(N+H)\cos B}\frac{\partial T}{\partial L}. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Знак “-“ поставлений через те, що додатні відхилення прямовисних ліній збільшують геодезичну широту і довготу і поправку треба вводити із знаком мінус.

Формула (2.14) відображає залежність між відхиленням прямовисних ліній та збурюючим потенціалом сили ваги $T$. Збурюючий потенціал $T = (W_0 - U_0) + N\gamma_m$. Тоді, приймаючи $W_0 = U_0$, для часткових похідних запишемо

$$\frac{\partial T}{\partial B} = \gamma_m \frac{\partial N}{\partial B}, \qquad \frac{\partial T}{\partial L} = \gamma_m \frac{\partial N}{\partial L}.$$

Підставимо знайдені значення часткових похідних у формулу (2.14), вважаючи при цьому, що $g \approx \gamma_m$, а $(M+H) \approx (N+H) \approx R$ - середньому радіусу кривини еліпсоїда в даній точці. Отримаємо

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial B}, \\ \eta &= -\frac{1}{R\cos B}\frac{\partial N}{\partial L}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Значення висоти геоїда $N$ задається формулою Стокса

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi)\sin\psi d\psi dA.$$

Оскільки $S(\psi)$ явно від $B$ і $L$ не залежить і, враховуючи, що кінцевість підінтегрального виразу дозволяє диференціювати під знаком інтегралу, то будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial B} &= \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial B}\sin\psi d\psi dA, \\ \frac{\partial N}{\partial L} &= \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial L}\sin\psi d\psi dA. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Похідні $\psi$ по $B$ і $L$ мають наступні значення

$$\frac{\partial \psi}{\partial B} = -\cos A, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial L} = -\sin A\cos B. \tag{2.17}$$

Позначимо

$$-\frac{1}{2\gamma}\frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}\sin\psi = Q(\psi) \tag{2.18}$$

Тоді, з врахуванням (2.16-2.18) формули (2.15) отримають наступний вигляд

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g Q(\psi)\cos A d\psi dA, \\ \eta &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta g Q(\psi)\sin A d\psi dA. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Формули (2.19) називаються формулами Венінг-Мейнеса, а вираз (2.18) – функцією Венінг-Мейнеса. Вказані формули дають значення відхилень прямовисних ліній на поверхні геоїда в меридіані та у напрямі першого вертикалу за відомими аномаліями сили ваги на цій поверхні.

Опустивши викладки з диференціюванням формули Стокса, напишемо для функції Венінг-Мейнеса (2.18) розгорнутий вираз

$$Q(\psi)=\frac{\rho}{2\gamma}\cos^2\frac{\psi}{2}\left[\begin{array}{l}\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}+12\sin\frac{\psi}{2}-32\sin^2\frac{\psi}{2}+\\+\frac{3}{1+\sin\frac{\psi}{2}}-12\sin^2\frac{\psi}{2}\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\end{array}\right] \qquad (2.20)$$

При практичному обчисленні відхилень прямовисних ліній праву частину формул (2.19) поділяють на три частини, що відповідають трьом областям інтегрування: центральній області радіуса $r_0$, в якій градієнт сили ваги за вибраними напрями $x$ і $y$ можна вважати сталими ( $r_0 \approx 5$ км ), а поверхню сфери в її межах – горизонтальною площиною; ближній кільцевій зоні радіуса $r$ ( $r_0 \le r \le 2000$ км ), в якій можна знехтувати кривиною Землі; далеким зонам, в яких кривина Землі враховується ( $r > 2000$ км ). Кожна область, за виключенням центральної, розбивається радіальними напрямами на сферичні трапеції. Для кожної трапеції повинно бути відомо середнє значення аномалії сили ваги $\Delta g$ . В курсі фізичної геодезії приводиться детальний виклад методики обчислення відхилень прямовисних ліній з застосуванням чисельних способів розв'язування інтегралів (2.19). Вкажемо лише на те, що обчислення в усіх трьох областях інтегрування представляє собою "абсолютне" відхилення прямовисних ліній. Лапки " " означають, що теоретично це можливо, але практично даних про аномалії сили ваги по всій поверхні Землі завжди є недостатньо, тому досить часто інтегрування ведеться тільки у області до 1000 км від досліджуваного пункту. На даний час врахування далеких зон можна виконувати за глобальними гравітаційними моделями.

При оцінці точності визначення гравіметричних відхилень прямовисних ліній необхідно взяти до уваги систематичні похибки впливу далеких зон, обумовлені відсутністю даних про аномалії сили ваги або похибками інтерполювання аномалій для тих трапецій, де вони не визначалися. Крім систематичних будуть мати місце випадкові похибки врахування місцевих (локальних) полів аномалій сили ваги. Якщо рівномірне гравіметричне знімання виконане для всієї поверхні Землі, то похибка визначення абсолютних відхилень прямовисних ліній буде залежати тільки від точності визначення гравіметричних характеристик для відповідних ділянок земної поверхні. Її можна підрахувати за формулою

$$m_\xi = m_\eta = 0.15'' m_{g_{мГал}},$$

де $m_{g_{мГал}}$ - похибка гравіметричного визначення прискорення сили ваги, яка залежить точності самих гравіметричних вимірів, від густоти знімання та від похибки інтерполювання до центральної точки трапеції. Для похибки $m_{g_{мГал}} = 1 \div 4$ мГал похибки гравіметричних відхилень прямовисних ліній будуть складати $0.15 \div 0.60''$ .

**4. Інтерполювання відхилень прямовисних ліній**

При обчислені гравіметричних відхилень прямовисних ліній в конкретній точці фізичної поверхні вимагаються дані про аномалії сили ваги на всій поверхні Землі. Фактично, навіть при достатньо детальних гравіметричних зніманнях, сила ваги визначається в обмеженому числі знімальних точок. Значення сили ваги між цими точками оцінюється методом інтерполяції. На ті області Землі, де взагалі відсутні гравіметричні дані, аномалії сили ваги отримують методами прогнозування. Отже, при обчисленні відхилень прямовисних ліній за аномаліями сили ваги останні інтерполюють або екстраполюють. Методи інтерполяції і прогнозу аномалій сили ваги достатньо повно розглядаються в курсах гравіметрії та фізичної геодезії. Після того, як будуть відомі аномалії сили ваги (виміряні, інтерпольовані чи прогнозовані) по всій поверхні Землі, задача визначення відхилень прямовисних ліній для будь-якої точки фізичної поверхні розв'язується. Для цього можуть бути використані інтегральні формули Венінг-Мейнеса (2.19).

Зовсім інша справа є з астрономо-геодезичними відхиленнями прямовисних ліній. Значення цих відхилень можна отримати тільки на пунктах, де виконані астрономічні і геодезичні визначення їх координат. На решті пунктах геодезичної мережі астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній отримують шляхом інтерполювання. Для інтерполювання значення відхилення в даному пункті необхідно мати інформацію про величини відхилень в суміжних пунктах та закон розподілу цих відхилень в даній ділянці земної поверхні.

Найбільшого поширення отримали наступні способи інтерполювання:

- пряма інтерполяція;
- використання гравіметричних даних.

***Спосіб прямої інтерполяції***

В класичних астрономо-геодезичних мережах астрономічні визначення широти і довготи виконувалися на всіх пунктах Лапласа, а також на пунктах, що були розташовані приблизно посередині ланок 1 класу. При такій типовій схемі розташування астропунктів їх кількість складала 9-15 в межах полігону 1 класу, а середня відстань між цими пунктами – біля $100$ км . Значення складових астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній можна отримати шляхом прямої (лінійної чи графічної) інтерполяції між астропунктами. За даними досліджень, похибка інтерполяції відхилення $m_{\delta\theta_A}$ для рівнинних районів дорівнює

$$m_{\delta\theta_A} = 0.17'' \sqrt{S_{км}} . \tag{2.21}$$

При зменшенні відстані $S$ між астропунктами такі оцінки можна було би вважати прийнятними, якщо б закон розподілу відхилень прямовисних ліній був близьким до лінійного. Навіть у рівнинних районах існують різні за розмірами аномальні ділянки, на яких реальні оцінки $m_{\delta\theta_A}$ перевищують обчислені у два і більше разів. В гірських районах характер розподілу відхилень прямовисних ліній значно ускладнюється через вплив топографічних мас. Виходом із становища є суттєве збільшення числа астрономічних пунктів або застосування інших способів інтерполювання.

***Спосіб інтерполювання з використанням гравіметричних даних***

Для застосування цього способу повинна бути виконана за певною програмою локальне гравіметричне знімання. В основі даного способу лежать дослідження М. Молоденського (1940), який показав, що при умові виконання локального гравіметричного знімання різниці астрономо-геодезичних і гравіметричних відхилень прямовисних ліній змінюються на земній поверхні за лінійним законом. Це означає, що вказані різниці будуть лінійними функціями координат пунктів.

Припустимо, що для деякої геодезичної мережі з рівномірно розташованими астрономічними пунктами відомими є складові гравіметричних відхилень прямовисних ліній $\xi_i^{гр}, \eta_i^{гр}$ для всіх пунктів цієї мережі. Вони можуть бути обчислені за формулами (2.19) на основі виконаного гравіметричного знімання. Тоді для астропунктів можна отримати різниці

$$\Delta\xi_i = \xi_i^{аг} - \xi_i^{гр},$$

$$\Delta\eta_i = \eta_i^{аг} - \eta_i^{гр}, \qquad (2.22)$$

$$(i = 1,2,...,n),$$

де $\xi^{аг}, \eta^{аг}$ – складові астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній, $n$ - число астропунктів.

Різниці $\Delta\xi_i, \Delta\eta_i$ вважаються лінійними функціями планових координат астропунктів. Тому можна написати наступні рівняння

$$\Delta\xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i,$$

$$\Delta\eta_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i. \qquad (2.23)$$

Невідомими в рівняннях (2.23) є інтерполяційні коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$. Для кожного астропункту можна скласти два рівняння вигляду (2.23). Очевидно, що для розв'язування задачі необхідно мати не менше трьох рівномірно розташованих в геодезичній мережі астропунктів. З метою забезпечення контролю та для забезпечення точності інтерпольованих відхилень прямовисних ліній число астропунктів в геодезичній мережі повинно бути більше трьох. Як ми вже зазначали, при стандартній схемі побудови державної геодезичної мережі число астропунктів у полігоні 1-го класу повинно бути не менше 9. Тоді появляються надлишкові вимірювальні величини, а самі рівняння розв'язуються за способом найменших квадратів. Отримавши значення інтерполяційних коефіцієнтів, можна для будь-якого $k$-го геодезичного пункта, розташованого між астропунктами, обчислити значення $\Delta\xi_k, \Delta\eta_k$, а потім, на основі (2.22), знайти для нього астрономо-геодезичні відхилення прямовисної лінії

$$\xi_k^{аг} = \xi_k^{гр} + \Delta\xi_k \text{ і } \eta_k^{аг} = \eta_k^{гр} + \Delta\eta_k. \qquad (2.23)$$

В результаті такого інтерполювання складові астроно-геодезичних відхилень прямовисних ліній будуть визначатися із середніми квадратичними похибками $\pm 0.5 - 0.7''$.