ФУНКЦІЯ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Функції однієї змінної та їх властивості

Нехай X – непорожня множина дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине число y, то кажуть, що задано *функцію* f з *областю визначення* X. Для позначення функції використовують запис $y = f(x)$. При цьому x називають *незалежною змінною* або *аргументом* функції f, y – *залежною змінною* або *значенням функції* в точці x. Область визначення X позначають $D(f)$, а *множину значень* – $E(f) = \{y : y = f(x),\ x \in X\}$.

Послідовністю називають функцію з областю визначення $X = \{1,\ 2, \ldots\}$. Позначають послідовність символом $\{x_n\}$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину точок площини xOy з координатами $(x;\ f(x))$, де $x \in D(f)$.

Якщо функціональна залежність y від x задана рівнянням $y = f(x)$, з якого можна виразити x як функцію змінної y – $x = \varphi(y)$, то функцію $x = \varphi(y)$ називають *оберненою* до функції $y = f(x)$ і позначають $x = f^{-1}(y)$. Тут y – незалежна змінна, а x – залежна. Якщо перепозначити звичним чином залежну і незалежну змінні, то графіки функцій $f(x)$ та $f^{-1}(x)$ будуть симетричними відносно прямої $y = x$.

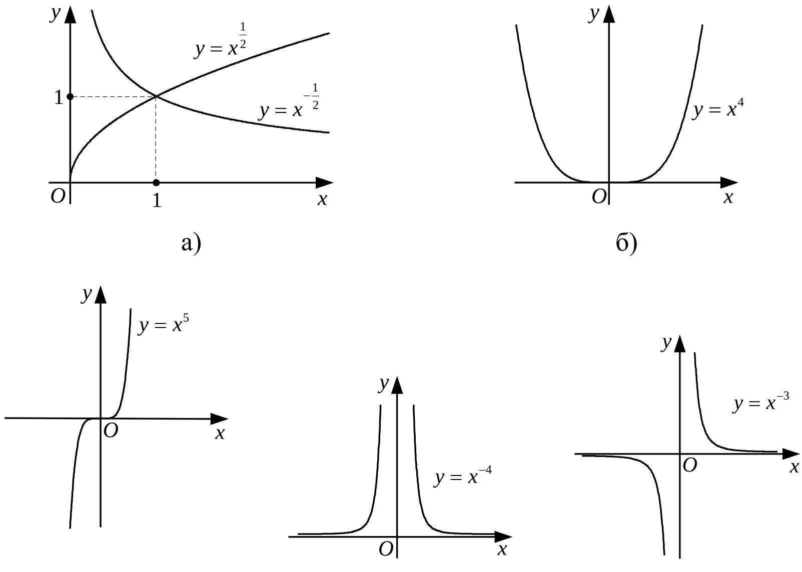
Основними елементарними функціями називають наступні функції:

1) Стала функція $y = c$, $c \in R$.

$D(f): x \in R$; $E(f): y \in \{c\}$.

2) Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ (рис. 1).

Область визначення та множина значень степеневої функції залежать від значення показника α: наприклад, при цілому додатному α $D(f)$: $x \in (-\infty, +\infty)$; при цілому від’ємному α $D(f)$: $x \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$.

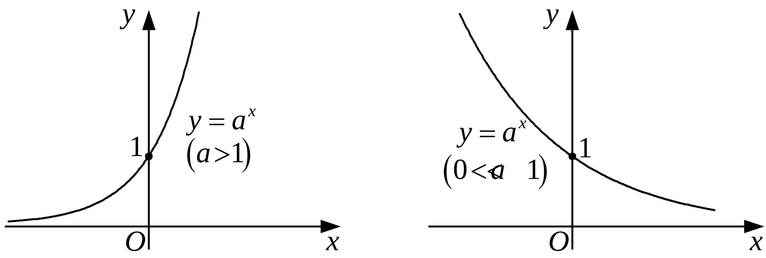


а) б) в) г) д)

Рис. 1

3) Показникова функція $y=a^x$, де $a \in R$, $a>0$, $a \neq 1$ (рис. 2).

$D(f): x \in R$; $E(f): y \in (0, +\infty)$.

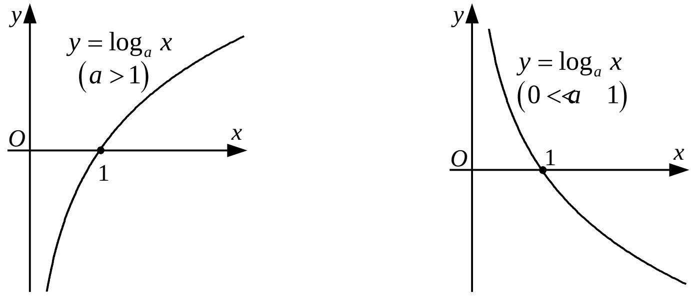


а) б)

Рис. 2

4) Логарифмічна функція $y=\log_a x$, де $a \in R$, $a>0$, $a \neq 1$ (рис. 3).

$D(f): x \in (0, +\infty)$; $E(f): y \in R$.



а) б)

Рис. 3

5) Тригонометричні функції:

*) синус $y=\sin x$ (рис. 4 а).

$$D(f): x \in R\,; \qquad E(f): y \in [-1, 1];$$

*) косинус $y=\cos x$ (рис. 4 б).

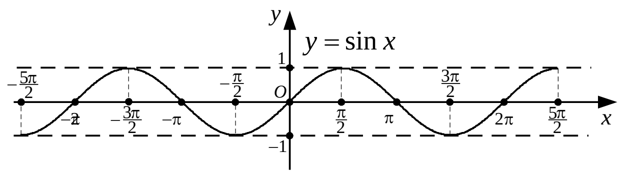
$$D(f): x \in R\,; \qquad E(f): y \in [-1, 1];$$

*) тангенс $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 4 в).

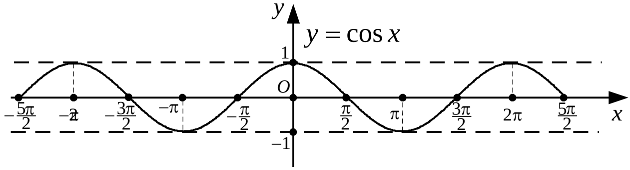
$$D(f): x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ \ k \in Z\,; \qquad E(f): y \in R\,;$$

*) котангенс $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. 4 г).

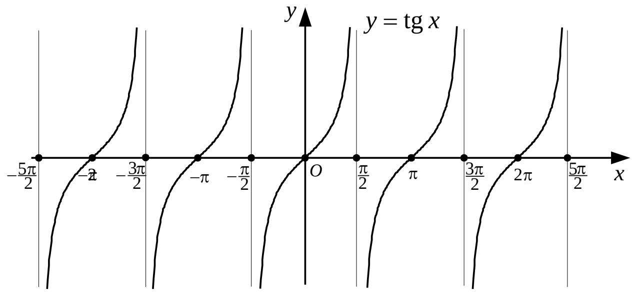
$$D(f): x \in (\pi k,\ \pi+\pi k),\ \ k \in Z\,; \qquad E(f): y = R\,.$$



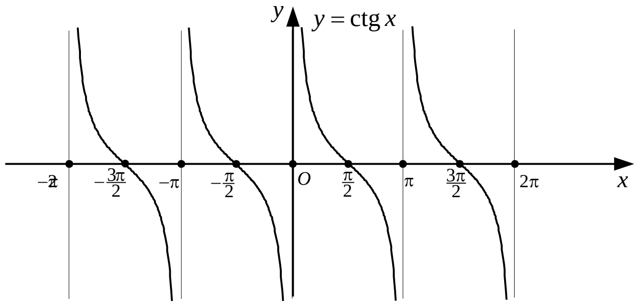
а)



б)



в)



г)

Рис. 4

6) Обернені тригонометричні функції:

*) арксинус $y = \arcsin x$ (рис. 5 а).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

*) арккосинус $y = \arccos x$ (рис. 5 б).

$$D(f): x \in [-1, 1]; \quad E(f): y \in [0, \pi];$$

*) арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 5 в).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

*) арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 5 г).

$$D(f): x \in R; \quad E(f): y \in (0, \pi).$$

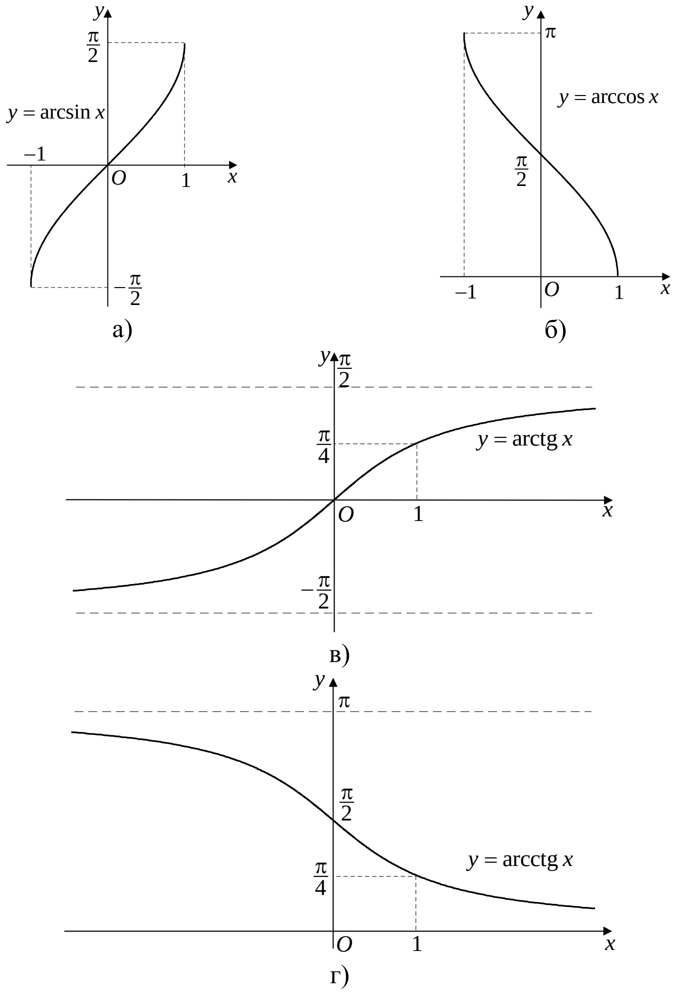


Рис. 5

Елементарними називають функції, що одержуються з основних елементарних функцій за допомогою операцій додавання, віднімання, множення, ділення та операції утворення складної функції, які застосовуються скінченну кількість разів. Операція утворення *складної* функції полягає у наступному: якщо $y = f(u)$, а $u = g(x)$, то функція $y = f(g(x))$ – складна (її ще називають *суперпозицією* функцій).

Функцію $f(x)$ називають *парною* (*непарною*), якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для довільного $x \in D(f)$ $f(-x) = f(x)$ $\big(f(-x) = -f(x)\big)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, графік непарної – відносно початку координат.

Функцію $f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(f)$:

1) $(x+T) \in D(f)$;

2) $f(x+T) = f(x)$.

Число T при цьому називають *періодом* функції $f(x)$, а найменше додатне число T_0, для якого виконуються вказані умови – *основним періодом* функції.

Якщо основний період функції $y = f\ \ x$ дорівнює T_0, то основний період функції $y = f\ \ kx+b$ знаходиться за формулою $T = \dfrac{T_0}{k}$.

1. Задано функцію $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$. Знайти: $f(0)$; $f(2)$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(a)$. Чи існує значення $f(1)$?

⌜ Обчислимо значення функції $f(x)$ у вказаних точках, підставляючи замість x в аналітичний вираз функції $\dfrac{x+3}{x-1}$ задані значення аргументу:

$$f(0) = \frac{0+3}{0-1} = \frac{3}{-1} = -3; \qquad f(2) = \frac{2+3}{2-1} = \frac{5}{1} = 5;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{1} = -7; \qquad f(a) = \frac{a+3}{a-1}.$$

Значення $f(1)$ не існує, оскільки ділення на нуль змісту не має. ⌟

2. Записати перші чотири члени послідовності, заданої загальним членом

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

$\ulcorner$ Підставляємо у формулу загального члена послідовності замість n по черзі натуральні числа $1, 2, 3, 4$:

$$x_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} \Rightarrow x_1 = -1;$$

$$x_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2};$$

$$x_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3};$$

$$x_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4}. \quad \lrcorner$$

3. Записати формулу загального члена послідовності:

$$\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ -\frac{4}{5};\ldots.$$

$\ulcorner$ Знак члена послідовності можна охарактеризувати виразом $(-1)^{n+1}$, а чисельник і знаменник пов'язані з номером члена послідовності наступним чином: $\frac{n}{n+1}$. Тому $x_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$. $\lrcorner$

4. Задано функції $y = u^2$, $u = x + 3$. Виразити y як функцію змінної x.

$\ulcorner$ Будуємо аналітичний вираз складної функції, підставляючи замість u у функцію $y(u)$ значення $u = x + 3$:

$$y = (x+3)^2 \quad \text{або} \quad y = x^2 + 6x + 9. \quad \lrcorner$$

5. Подати складну функцію $y = \sin^2 x$ у вигляді ланцюжка основних елементарних функцій.

$\ulcorner$ Записуючи аналітичний вираз функції у вигляді $y = (\sin x)^2$, бачимо, що $y = u^2$, $u = \sin x$. $\lrcorner$

6. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\sqrt{x-1}$; 2) $y=\log_3(x+2)$;

3) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\arcsin 2x$.

$\ulcorner$ 1) Область визначення функції $y=\sqrt{x}$ відома – $D(f): x\ge 0$. У випадку функції $y=\sqrt{x-1}$ ця умова набуває вигляду: $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Отже, $D(f): x\in[1, +\infty)$.

2) Скористаємось тим, що для функції $y=\log_a x$ $(a\in R,\ a>0,\ a\ne 1)$ область визначення $D(f): x>0$. Тому $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.

Отже, $D(f): x\in(-2, +\infty)$.

3) Оскільки для $y=\dfrac{1}{x}$ $D(f): x\ne 0$, то у нашому випадку $x-1\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1$.

Тому $D(y): x\in(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

4) Для існування функції слід вимагати виконання системи нерівностей, кожна з яких враховує область визначення відповідної основної елементарної функції:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\ne 0\\ x\ge 0\\ -1\le 2x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ x\ge 0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le \frac{1}{2}.$$

Отже, $D(f): x\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. $\lrcorner$

7. Дослідити функції на парність і непарність:

1) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; 2) $y=x^3+x$;

3) $y=x^6+x$; 4) $y=|x|\cdot\cos x$.

$\ulcorner$ 1) Область визначення даної функції (див. вправу 6) $x\in(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ – не є симетричною відносно нуля. Тому функція ані парна, ані непарна (у цьому випадку ще кажуть, що функція $f(x)$ *загального вигляду*).

2) Область визначення функції $x \in R$ – симетрична відносно нуля. Тому обчислимо $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x)$.

Оскільки виконується умова $f(-x) = -f(x)$, то дана функція непарна.

3) Область визначення функції $x \in R$ – симетрична відносно нуля. Але вираз $f(-x) = (-x)^6 + (-x) = x^6 - x$ не дорівнює $-f(x) = -(x^6 + x)$ і не дорівнює $f(x) = x^6 + x$. Тому функція $f(x)$ ані парна, ані непарна.

4) Область визначення $x \in R$. Оскільки $f(-x) = |-x|\cos(-x) = |x|\cos x = f(x)$, то функція $f(x)$ – парна. ⌋

8. Знайти основні періоди функцій:

1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{4}$.

⌈ 1) Оскільки основний період функції $\cos x$ дорівнює 2π, то основним періодом функції $y = \cos 3x$ є число $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

2) Основний період функції $\mathrm{tg}\,x$ дорівнює π. Тому основним періодом функції $y = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{4}$ є число $T = \dfrac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$. ⌋

9. Дослідити функцію $y = \sin x^2$ на періодичність.

⌈ Припустимо, що функція y – періодична, тобто існує така стала $T > 0$, для якої $y(x+T) = y(x)$ для всіх x. Тоді для заданої функції маємо:

$$\sin(x+T)^2 = \sin x^2 \Leftrightarrow \sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{(x+T)^2 + x^2}{2}\sin\frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x^2+xT+\frac{T^2}{2}\right)\sin\left(xT+\frac{T^2}{2}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos\left(x^2+xT+\dfrac{T^2}{2}\right)=0 \\ \sin\left(xT+\dfrac{T^2}{2}\right)=0. \end{array}\right.$$

Але, розв'язуючи кожне з цих рівнянь відносно T, ми одержимо значення T, яке залежить від x. А це суперечить припущенню, зробленому на початку розв'язання, що T – стала. Отже, припущення не вірне. Функція неперіодична. ⌋

10. Знайти функції, обернені до заданих:

1) $y=3x+1$; 2) $y=e^{4x}$.

⌈ 1) Виразимо з рівняння $y=3x+1$ змінну x через y: $y-1=3x$, $\dfrac{y-1}{3}=x$. Звідси шляхом заміни y на x та x на y одержуємо шукану обернену функцію $y=\dfrac{x-1}{3}$.

2) Прологарифмуємо обидві частини рівняння $y=e^{4x}$ за основою e:

$\ln y=\ln e^{4x} \Leftrightarrow \ln y=4x \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}\ln y$. Отже, оберненою до функції $y=e^{4x}$ є функція $y=\dfrac{1}{4}\ln x$.

Вправи для самостійного розв'язання

11. Задано функцію $f(x)=x^2-4$. Знайти значення $f(0)$; $f(3)$; $f(a)$.

12. Задано функцію $\varphi(t)=ta^{-t}$. Знайти значення $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi\left(\dfrac{1}{a}\right)$; $\varphi(-a)$.

13. Записати перші п'ять членів послідовності, заданої формулою загального члена $x_n=\dfrac{3n-1}{2n+5}$.

14. Записати формулу загального члена послідовності:

1) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5};\dots;$

2) $-1;\ 0;\ -1;\ 0;\ -1;\dots.$

15. Задано функції $y=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$, $z=\operatorname{tg} x$. Виразити y як функцію змінної x.

16. Подати складні функції за допомогою ланцюжків основних елементарних функцій:

1) $y=\sqrt{\cos x}$; 2) $y=e^{\operatorname{tg}^2 x}$.

17. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\sqrt[3]{x+2}$; 2) $y=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $y=\sqrt{4-x^2}$;

4) $y=\arccos\frac{x}{2}$; 5) $y=\frac{\sqrt{2-x}}{\log_2 x}$; 6) $y=\sin x+\frac{e^x}{\sqrt{|x|-2}}$.

18. Дослідити функції на парність та непарність:

1) $y=7x$; 2) $y=2x+1$; 3) $y=x^2\sin x$;

4) $y=\sqrt[3]{x}+x$; 5) $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$; 6) $y=3^x+3^{-x}$.

19. Знайти основні періоди функцій:

1) $y=\cos\frac{x}{2}$; 2) $y=\operatorname{ctg} 3x$.

20. Знайти функції, обернені до заданих:

1) $y=\frac{x}{2}$; 2) $y=x^2+1$; 3) $y=\frac{1}{x+2}$; 4) $y=2+\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

Відповіді:

11. -4; 5; a^2-4.

12. 0; $\frac{1}{a}$; $a^{-\frac{a+1}{a}}$; $-a^{a+1}$.

13. $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{14}{15}$.

14. 1) $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; 2) $\frac{(-1)^n-1}{2}$.

15. $y = |\cos x|$.

16. 1) $y = \sqrt{u}$, $u = \cos x$; 2) $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \mathrm{tg}\, x$.

17. 1) R; 2) R; 3) $[-2, 2]$; 4) $[-2, 2]$; 5) $(0, 1)\cup(1, 2]$; 6) $(-\infty, -2)\cup(2 +\infty)$.

18. 1) непарна; 2) загального вигляду; 3) непарна; 4) непарна; 5) непарна; 6) парна.

19. 1) 4π; 2) $\dfrac{\pi}{3}$.

20. 1) $y = 2x$; 2) $y = \sqrt{x-1}$; 3) $y = \dfrac{1-2y}{y}$; 4) $y = 3\,\mathrm{tg}(y-2)$.

2. Побудова графіків функцій

При побудові графіків функцій використовують наступні прийоми: а) побудова "за точками" (для чого надають незалежній змінній кількох значень $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, …, $x = x_n$; обчислюють відповідні значення функції $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, …, $y_n = f(x_n)$; будують в системі координат точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, …, $(x_n; y_n)$, які сполучають плавною лінією); б) перетворення графіків (зсув, розтяг); в) дії над графіками ("додавання", "віднімання", "множення" графіків).

Якщо функція є парною або непарною, то побудова графіка спрощується завдяки його симетричності (див. підрозділ 1).

За відомим графіком функції $y = f(x)$ можна побудувати графіки функцій:

1) $y = f(-x)$ – графік симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі Oy;

2) $y = -f(x)$ – графік симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі Ox;

3) $y = f(x-a)$ – графік зсунутий відносно графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі Ox на величину a (при $a > 0$ зсув вправо, при $a < 0$ – вліво);

4) $y = f(x) + b$ – графік зсунутий відносно графіка функції $f(x)$ вздовж осі Oy на величину b (при $b > 0$ зсув вгору, при $b < 0$ – вниз);

5) $y = A f(x)$ – графік розтягнутий відносно графіка функції $f(x)$ в A разів вздовж осі Oy;

6) $y = f(kx)$ $(k > 0)$ – графік розтягнутий відносно графіка функції $f(x)$ в $\frac{1}{k}$ разів вздовж осі Ox.

За допомогою вказаних перетворень можна побудувати графік складної функції вигляду $y = A f(k(x-a)) + b$, якщо відомий графік функції $y = f(x)$.

21. Побудувати графік функції $y = 2x + 1$.

⌐ Дана функція ані парна, ані непарна (див. задачу 18) і визначена на всій множині дійсних чисел. Оскільки графіком лінійної функції є пряма, то для її побудови достатньо знати лише дві точки цієї прямої.

Виберемо два довільні значення аргументу і обчислимо відповідні значення функції:

x	y
0	1
2	5

Побудуємо в координатній площині точки $M_1(0;1)$ та $M_2(2;5)$. Вони і визначать пряму, яка є графіком заданої функції (рис. 6). ⌋

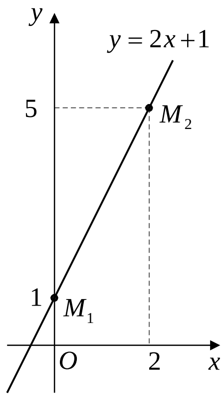


Рис. 6

22. Побудувати графік функції $y = x^2$.

⌐ Оскільки функція парна, то достатньо побудувати частину графіка для значень $x \ge 0$, а потім симетрично відобразити її відносно осі Oy.

Виберемо кілька невід’ємних значень аргументу і обчислимо відповідні значення функції:

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Зобразимо точки $(0;\,0)$, $(1;\,1)$, $(2;\,4)$, $(3;\,9)$ в системі координат і сполучимо їх плавною лінією.

Побудуємо лінію симетричну одержаній лінії відносно осі Oy.

Одержану лінію (рис. 7), яка є графіком функції $y = x^2$, називають параболою. ⌋

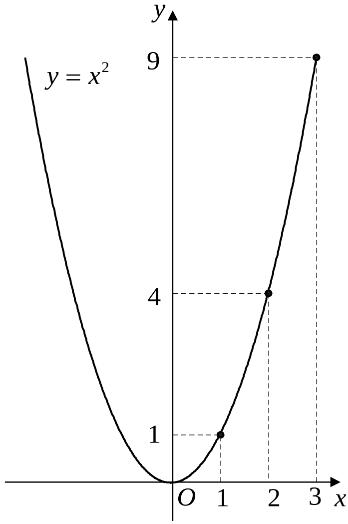


Рис. 7

23. За відомим графіком функції $y = x^2$ побудувати графіки функцій: 1) $y = 2x^2$; 2) $y = (x-1)^2$; 3) $y = -x^2$; 4) $y = x^2 - 1$.

⌈ Використовуючи відомий графік функції $y = x^2$ (рис. 7) та наведені вище перетворення графіків нам слід:

у випадку 1) здійснити розтяг у 2 рази вздовж осі Oy (рис. 8);

у випадку 2) – зсув на 1 одиницю вправо вздовж осі Ox (рис. 9);

у випадку 3) – симетричне відображення відносно осі Ox (рис. 10);

у випадку 4) – зсув на 1 одиницю вниз вздовж осі Oy (рис. 11). ⌋

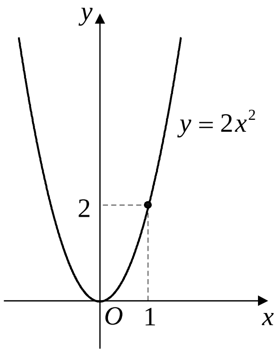


Рис. 8

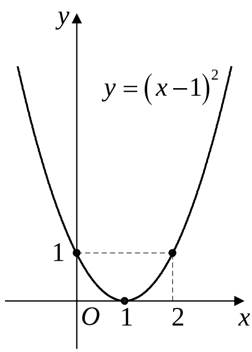


Рис. 9

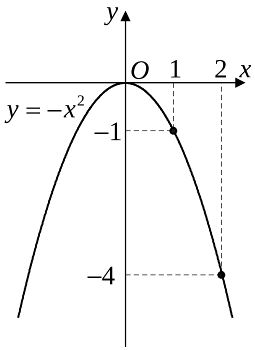


Рис. 10

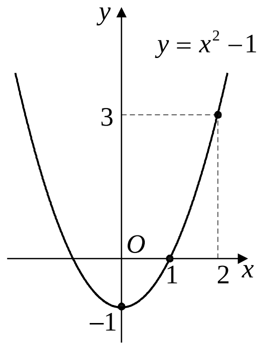


Рис. 11

24. Побудувати графік функції $y=\dfrac{1}{x}$.

⌐ Оскільки дана функція непарна, то виберемо кілька додатних значень аргументу та обчислимо відповідні значення функції:

x	y
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

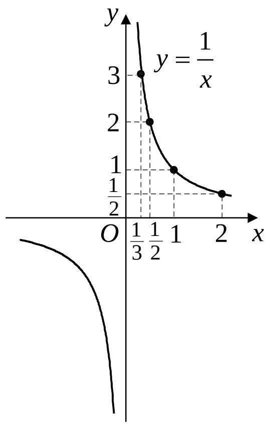


Рис. 12

Зобразимо відповідні точки в системі координат і сполучимо їх плавною лінією. Використовуючи симетричність графіка відносно початку координат, одержуємо графік функції, зображений на рис. 12. ⌋

25. Побудувати графік функції $y = e^{x-2}$.

⌈ Схематичний графік показникової функції $y = e^x$ ($y = a^x$, $a > 1$) зображений на рис. 2. Здійснюючи зсув цього графіка на 2 одиниці вправо вздовж осі Ox одержимо графік функції $y = e^{x-2}$ (рис. 13). ⌋

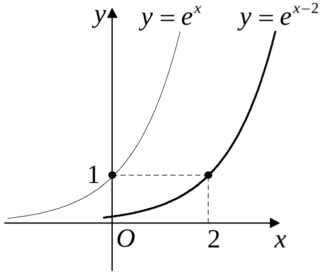


Рис. 13

26. Побудувати графік функції $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

⌈ Подамо задану функцію у вигляді $y = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Графік функції $y = \sin x$ нам відомий (рис. 4). Графік функції $y = \sin 2x$ одержиться з початкового стисканням вздовж осі Ox у два рази. Графік $y = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ побудуємо зсувом попереднього на $\frac{\pi}{4}$ вправо і розтягом у два рази останнього графіка вздовж осі Oy отримаємо шуканий графік функції $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 14). ⌋

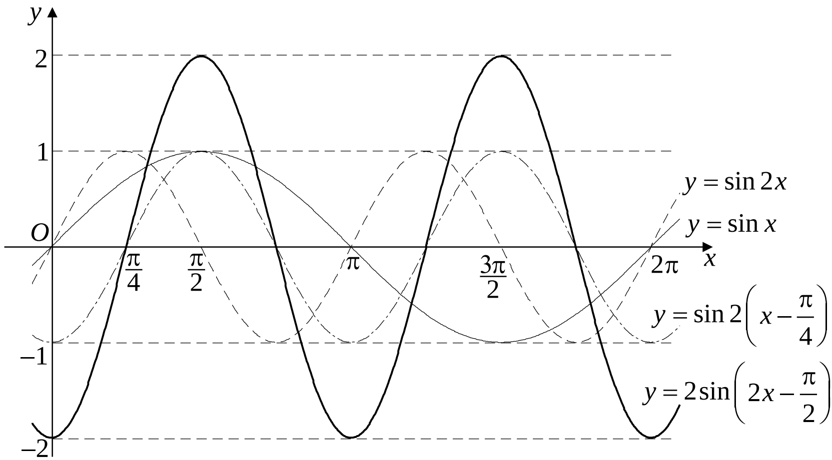


Рис. 14

27. Побудувати графік функції

$$y=\begin{cases} x+1, & \text{якщо } x\le 1, \\ 2, & \text{якщо } 1<x<2, \\ -x+4, & \text{якщо } x\ge 2. \end{cases}$$

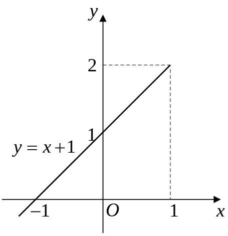
⌈ Дана функція не є елементарною.

При $x\le 1$ функція задана рівнянням $y=x+1$ і її графіком є промінь (рис. 15 а).

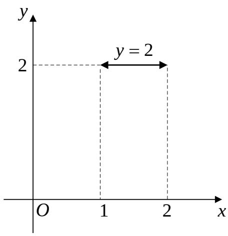
При $1<x<2$ функція задана рівнянням $y=2$ і її графіком є пряма, на якій потрібно взяти відрізок, що відповідає значенням аргументу $x\in[1,\ 2]$ з виколотими кінцями (рис. 15 б) (ми позначимо виколоті точки стрілками на кінцях відрізка).

При $x\ge 2$ функція задана рівнянням $y=-x+4$ і її графіком є промінь (рис. 15 в).

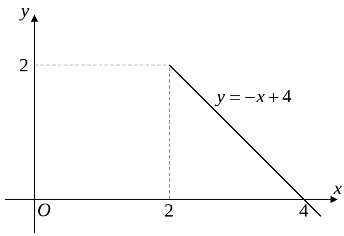
“Збираючи” побудовані окремо частини, отримаємо графік заданої функції, який зображений на рис. 15 г. ⌋



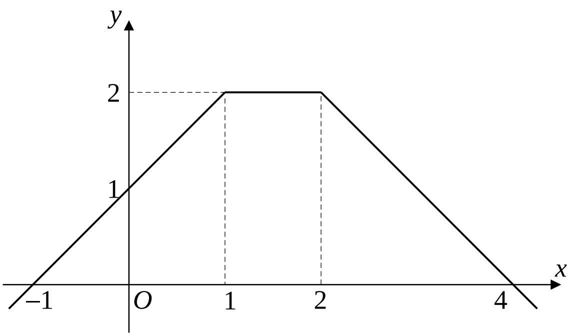
а)



б)



в)

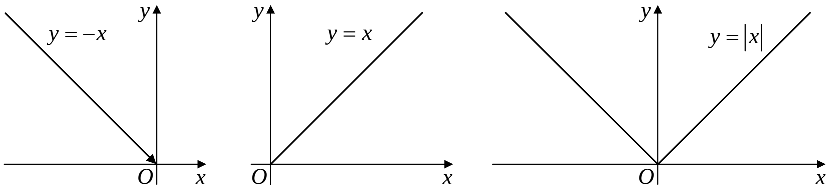


г)

Рис. 15

28. Побудувати графіки функцій: 1) $y=|x|$; 2) $y=|x-1|$.

⌈ 1) Подаючи дану функцію у вигляді $y=\begin{cases}-x, & \text{якщо } x<1,\\ x, & \text{якщо } x\ge 1,\end{cases}$ отримаємо можливість реалізувати описану у попередньому прикладі процедуру, яка ілюструється рис. 16.



а) б) в)

Рис. 16

2) Зсувом графіка функції $y=|x|$ (рис. 16 в)) на одиницю вправо одержимо графік функції $y=|x-1|$ (рис. 17). ⌋

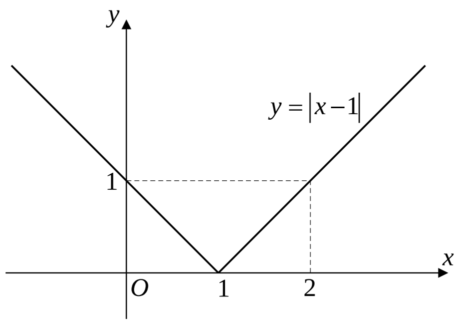


Рис. 17

29. Побудувати графік функції $y=x+\cos x$.

⌈ Графік заданої функції можна побудувати "додаванням" відомих графіків функцій $y=x$ та $y=\cos x$ (рис. 18). ⌋

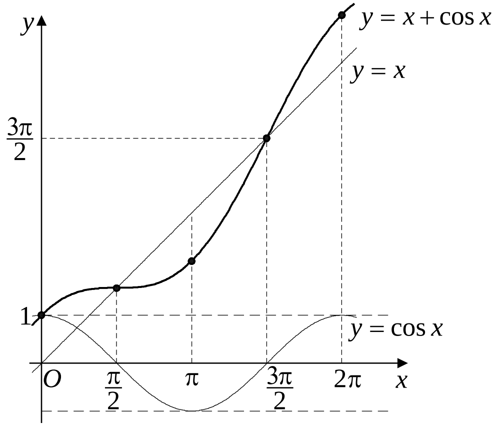


Рис. 18

30. Побудувати графік функції $y = x \sin x$.

⌈ Графік заданої функції можна побудувати "множенням" відомих графіків функцій $y = x$ та $y = \sin x$ (рис. 19). ⌋

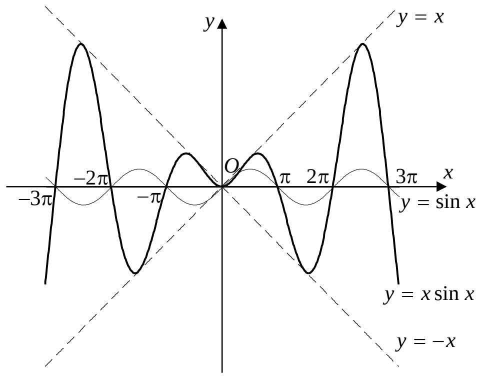


Рис. 19

<u>Вправи для самостійного розв'язання</u>

Побудувати графіки функцій:

31. $y = -2x + 3$. **32.** $y = x^3$.

33. 1) $y = (x+1)^3$; 2) $y = 2x^3$; 3) $y = x^3 + 2$; 4) $y = -x^3$.

34. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x-1}$; 3) $y = 2\sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{-x}$.

35. 1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; 2) $y=\log_2(x+1)$.

36. 1) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y=3\sin x$; 3) $y=2\,\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

37. 1) $y=2\arcsin x$; 2) $y=\arccos\frac{x}{2}$; 3) $y=2\,\mathrm{arctg}(x-3)$.

38. 1) $y=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x<0,\\ 1, & \text{якщо } x>0;\end{cases}$ 2) $y=2|x-2|$.

39. 1) $y=x+1+\sin x$; 2) $y=\frac{1}{x}\sin x$.