ЛЕКЦІЯ 5.

ТЕОРІЯ ГРАФІВ

ПЛАН

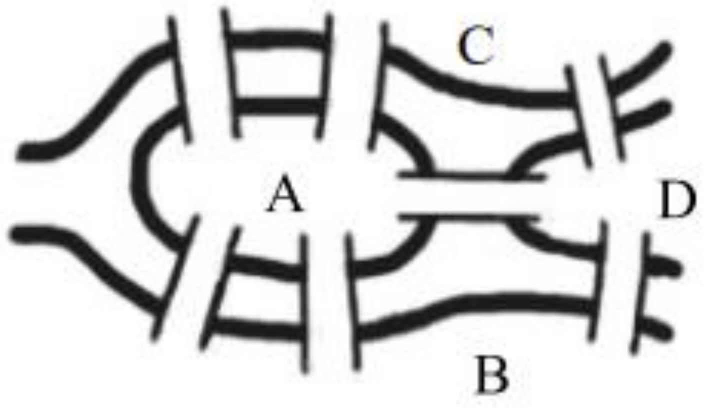
1. Історична довідка
2. Основні поняття
3. Різновиди графів
4. Деякі спеціальні типи графів
5. Ізоморфні графи
6. Способи представлення графів
7. Операції над графами
8. Маршрути, ланцюги, цикли

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Першою згадкою про графи вважається розв'язання Леонардом Ейлером знаменитої задачі про кенігсберзькі мости у 1736 році.

У цьому місті існувала складна система мостів, що з'єднували два острови з берегами річки Прегель. Мешканців цікавило, чи можливо пройти по всіх мостах рівно по одному разу, починаючи і закінчуючи шлях в одній і тій же точці.

Ейлер довів, що такого маршруту не існує, заклавши тим самим основи нової математичної дисципліни – теорії графів.

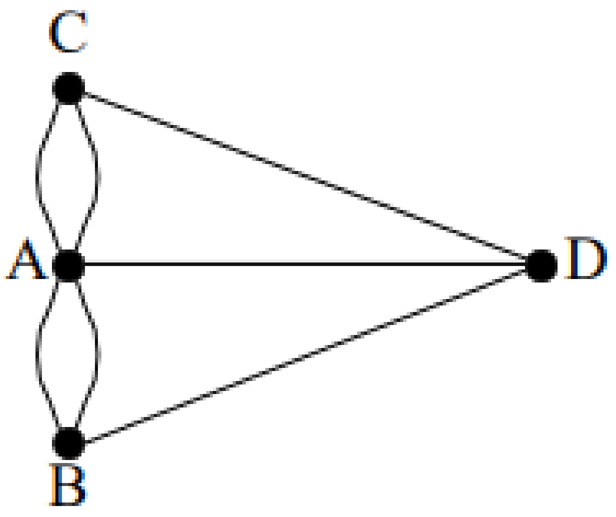


ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

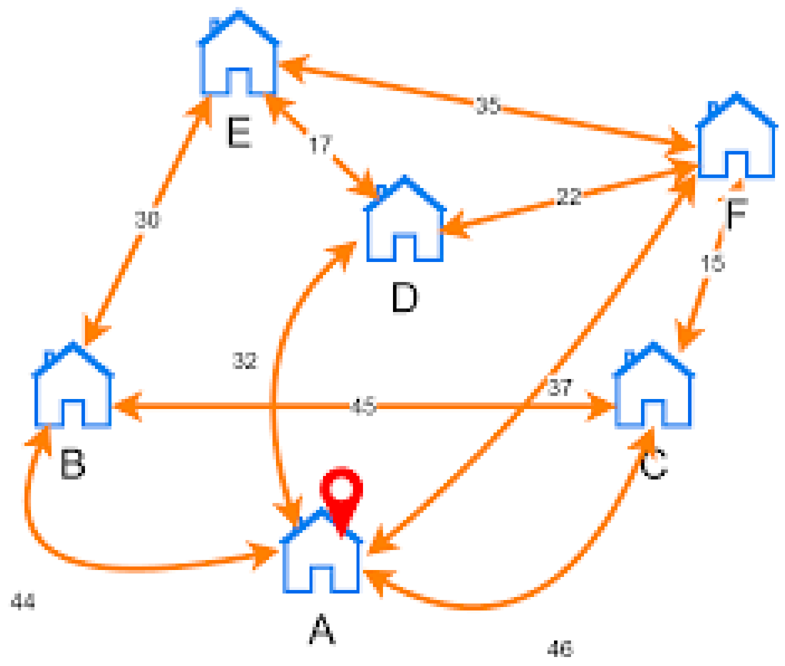
Для доведення неможливості знайти маршрут, що проходить по всіх мостах Кенігсберга рівно по одному разу, Леонард Ейлер запропонував новий метод моделювання.

Він представив кожну частину суші як точку (вершину) на графі, а кожен міст - як лінію (ребро), що з'єднує відповідні точки.

Таким чином, проблема пересування по містах була зведена до проблеми обходу графа. Аналізуючи отриманий граф, Ейлер сформулював загальні умови, за яких такий обхід можливий.



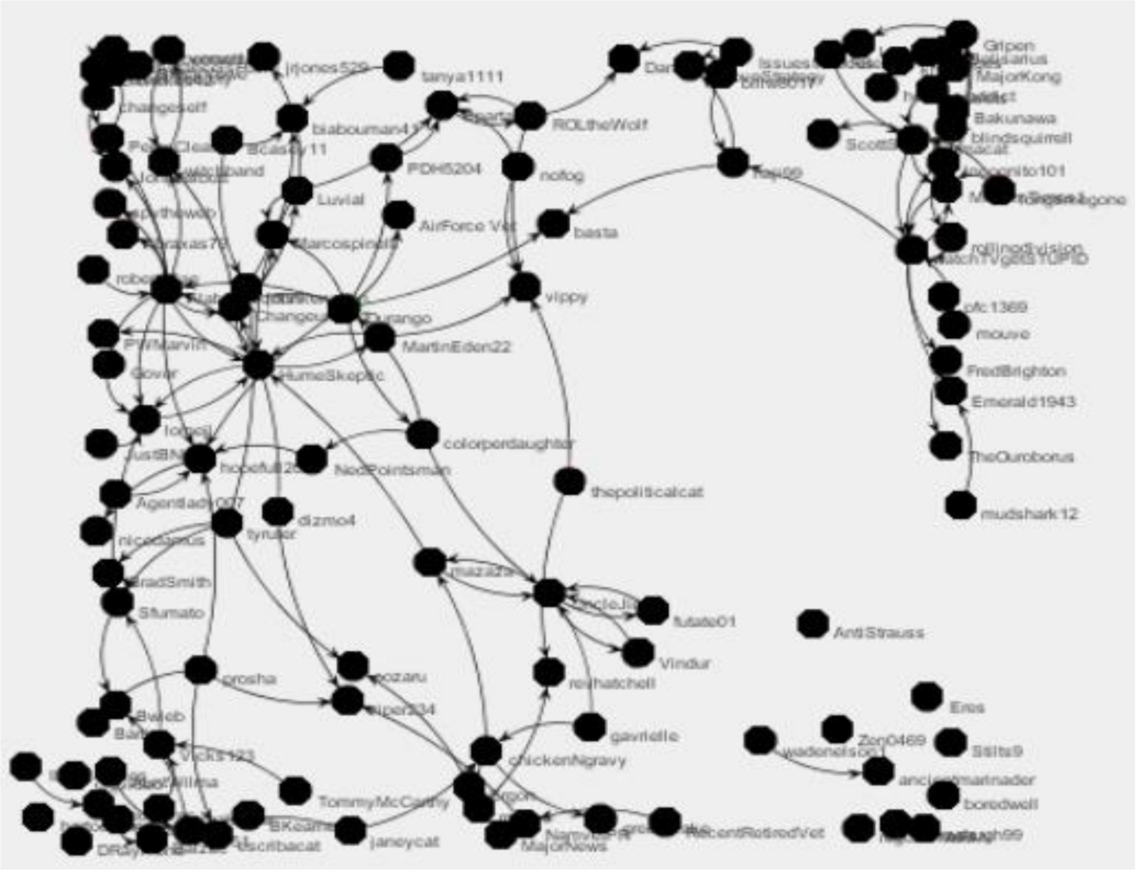
ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА



Задача комівояжера – це NP-повна оптимізаційна задача, що полягає у знаходженні найкоротшого (або найдешевшого) замкненого маршруту, який проходитиме через кожну вершину зваженого графа рівно один раз.

ПРИКЛАДИ

Ролі в соціальних мережах



Соціальні мережі
Кожна людина – це вершина, а дружба між ними – ребро.
Дорожня карта
Міста – вершини, дороги – ребра.
Схема метро
Станції метро – вершини, лінії метро – ребра.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Графом $G = (V, E)$ називається сукупність двох множин: вершин V ребер E, між елементами яких визначено відношення інцидентності – кожне ребро $e \in E$ інцидентно рівно двом вершинам $v', v'' \in V$, які воно сполучає.

При цьому вершина v’(v”) і ребро e називаються інцидентними один одному, а вершини v’ і v” для ребра e кінцевими точками і називаються суміжними.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

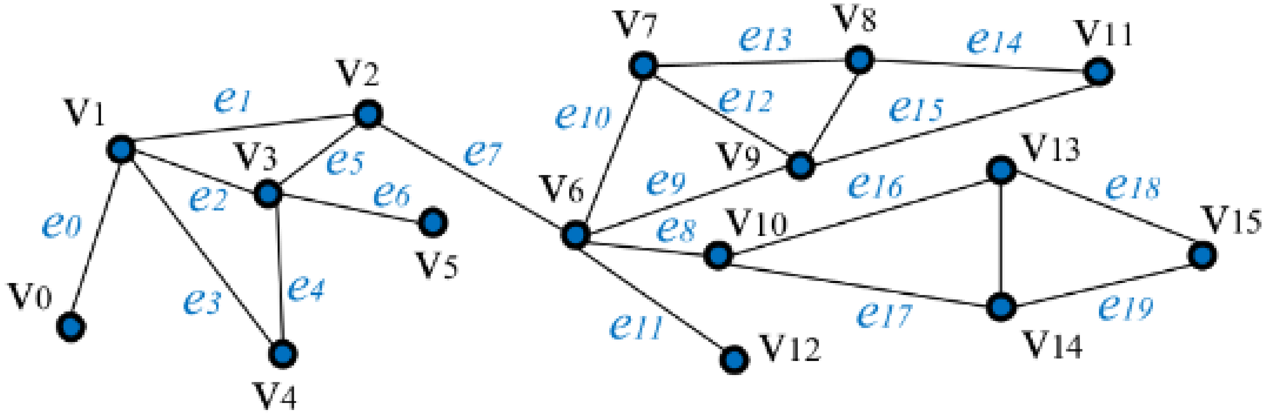
Уявімо граф як схему, де точки зображають вершини (v1, v2, ...), а лінії між ними - ребра (e1, e2, ...).

Кількість вершин - це **розмір** графа, який зазвичай позначають буквою n: |V|= n

Кількість ребер - його **потужність,** позначають m: |E|= m.

Кожне ребро з'єднує рівно дві різні вершини.

ПРИКЛАД

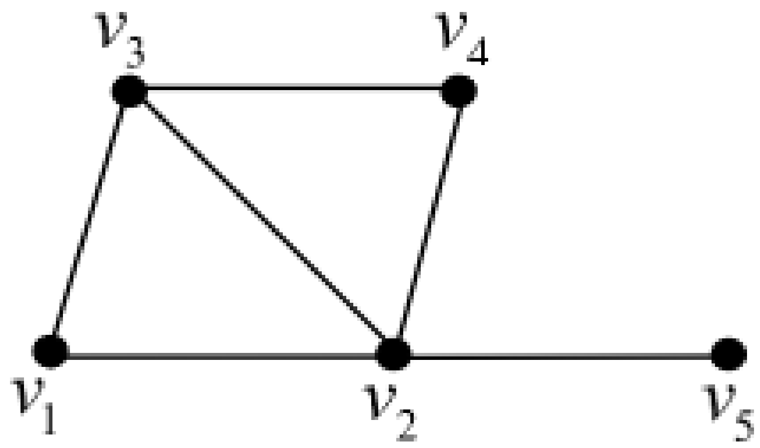


Для цього графа множини V та E матимуть наступний вигляд:

V = { v0, v1, ..., v15 }

E = { e0, e1, ..., e19 }

ПРИКЛАД



На рисунку зображено простий граф G, що складається з п'яти вершин

V = {1, 2, 3, 4, 5}

та шести ребер

E = {{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {2, 5}}.

розмір графа |V| = 5, потужність |E| = 6

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Вершина (вузол) – це точка на графі, яка представляє об'єкт.

Ребро - лінія, яка з'єднує дві вершини і показує зв'язок між ними.

Степень вершини - кількість ребер, які з'єднані з вершиною

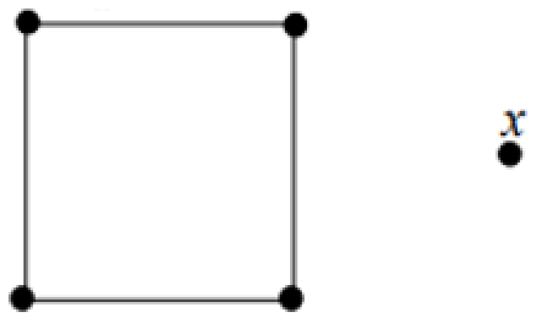
Ребро, яке з’єднує вершину саму із собою, називають петлею.

Якщо пари вершин з’єднані не одним ребром, а декількома, то такі ребра називають кратними.

Шлях – це послідовність ребер, які з'єднують дві вершини.

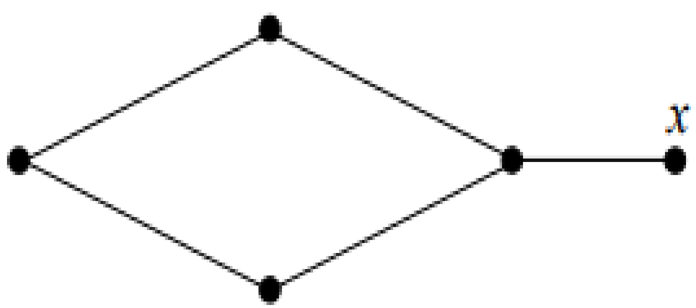
Вершини, які безпосередньо пов'язані між собою ребром називаються суміжними, говорять, що ці вершини інцидентні ребру.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ



Кількість ребер, інцидентних до певної вершини x, називається степенем цієї вершини і позначається δ(x), або deg(x).

Вершина, в якої степінь дорівнює 0, називається ізольованою.



Вершини, які мають степінь 1, називаються висячими, або кінцевими

РІЗНОВИДИ ГРАФІВ

Граф з нескінченною множиною вершин або нескінченною множиною ребер називають нескінченним.

Граф зі скінченними множинами вершин та ребер називають скінченними

Якщо граф має n вершин (n > 1) і кожна пара вершин з'єднана ребром, він називається повним.

У протилежному випадку маємо неповний граф.

Графи бувають **орієнтовані** та **неорієнтовані**.

У неорієнтованих графах ребра не мають напрямку, тобто зв’язок між двома вершинами є двостороннім.

Орієнтовані графи містять ребра, кожне з яких має напрямок від однієї вершини до іншої.

Змішані – графи, що поєднують ребра які не мають напрямку і мають.

Також графи поділяються на **зважені** та **незважені**.

Кожному ребру у зваженому графі ставиться у відповідність числове значення, або «вага».

ПОРІВНЯЛЬНА ТАБЛИЦЯ

Тип графа	Опис	Приклад	Візуальне представлення
Неорієнтований	Взаємні зв'язки	Соціальна мережа	Лінії без стрілок
Орієнтований	Односторонні зв'язки	Дорожня карта з односторонніми рухом вулицями	Стрілки
Зважений	Зв'язки з числовими значеннями	Дорожня карта з відстанями	Лінії з числами
Повний	Кожна вершина з'єднана з усіма вершинами	Мережа з повним з'єднанням	Повністю заповнений граф
Дерево	Без циклів	Родинне дерево	Форма дерева

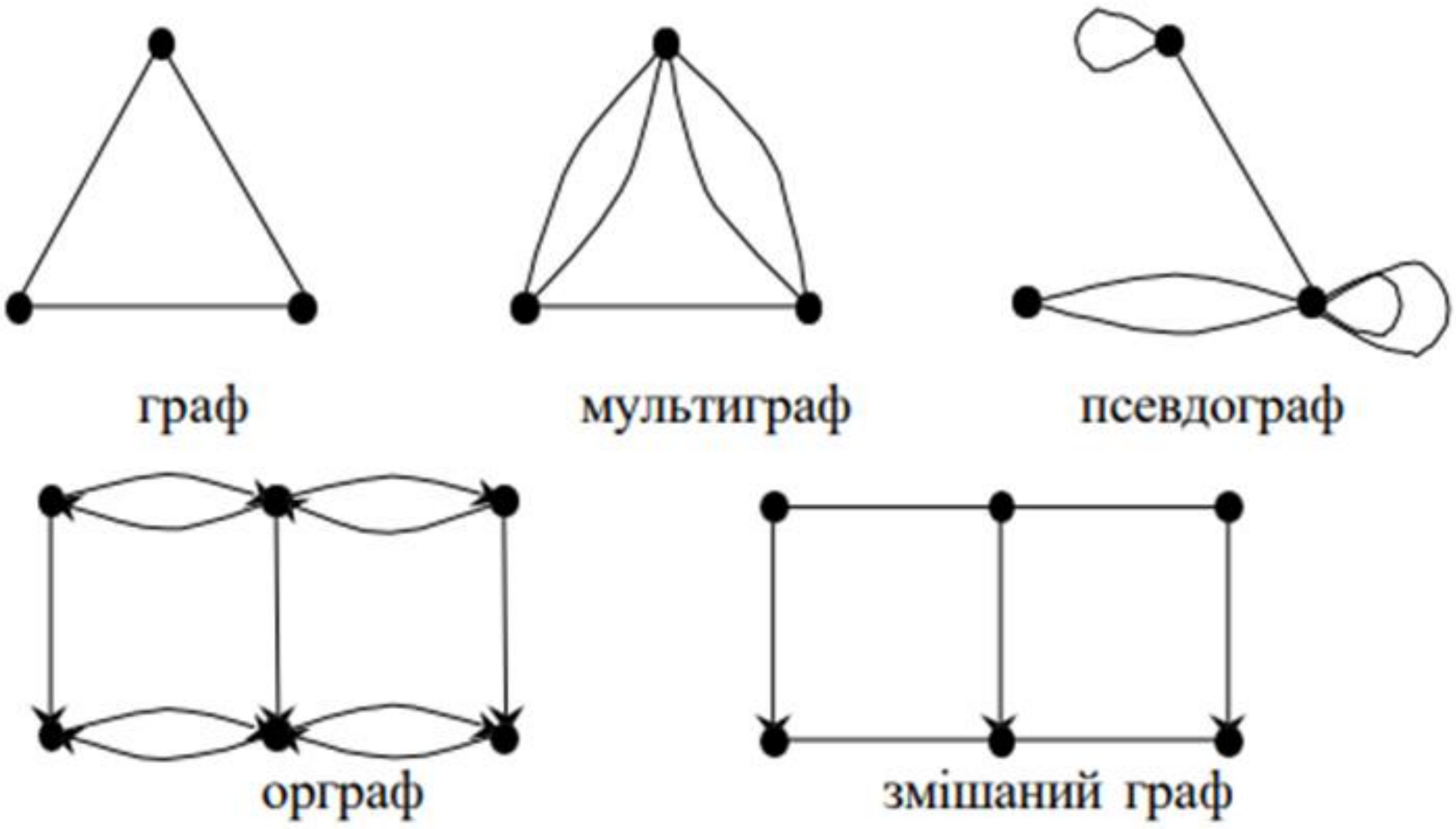
Граф, який не має ребер ($E = \emptyset$), називається порожнім. Усі вершини порожнього графа є ізольовані.

Граф називають простим, якщо будь-які дві його вершини з’єднані не більш, ніж одним ребром і кожне ребро з’єднує різні вершини.

Граф, який містить кратні ребра (але не петлі) називають мульти-графом.

Граф, який містить кратні ребра або петлі називають псевдографом.

ПРИКЛАДИ ГРАФІВ РІЗНИХ ТИПІВ



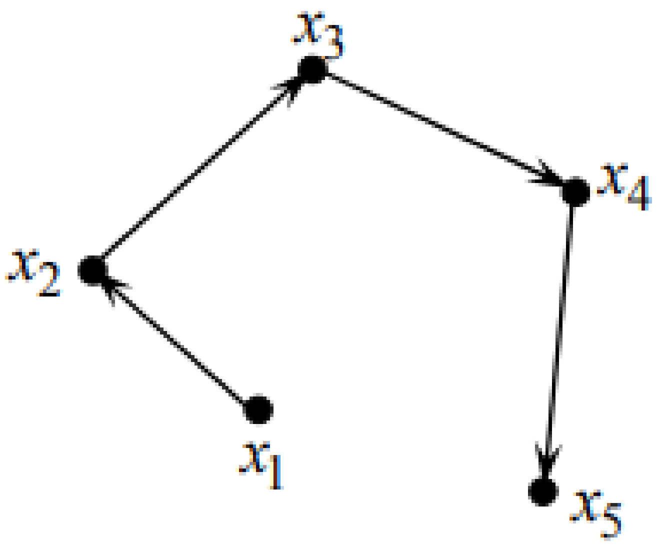
ОРІЄНТОВАНИМ ГРАФОМ (ОРГРАФОМ)

Поняття орієнтованого графа (орграфа) виникає, якщо ребрам графа надати напрямок (тобто орієнтацію) в такий спосіб, що один з кінців ребра буде початком, а інший – кінцем.

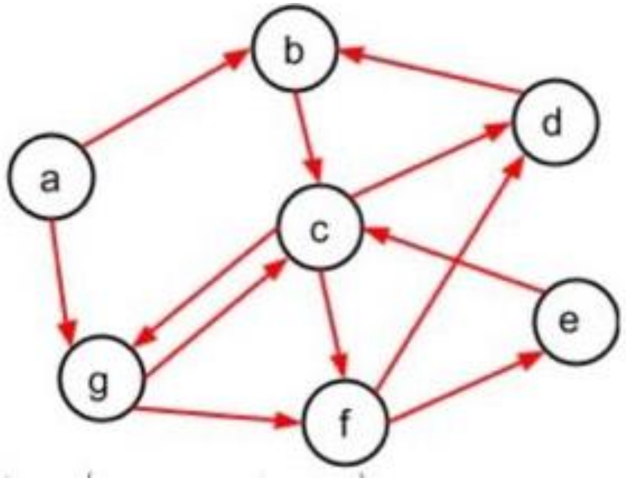
Елементи множини E називають дугами. Дуга орієнтованого графа зображується відрізком із зазначенням напрямку (стрілкою).

Приклад:

Дано орієнтований граф G = (V, E), де
V = {x1, x2, x3, x4, x5}
E= {{x1, x2}, {x2, x3}, {x3, x4}, {x4, x5}} .



ПРИКЛАД



Для орієнтованих графів замість степені вершини x вводять поняття півстепенів: додатні $\delta_+(x)$ й від’ємні $\delta_-(x)$ півстепені вершини x:

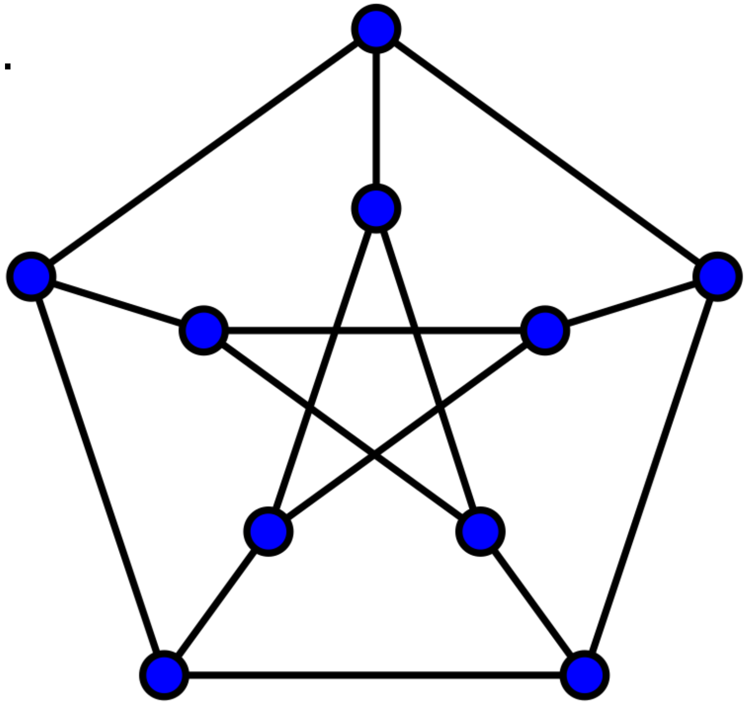
$\delta_+(x)$ – число дуг, які входять до вершини x;

$\delta_-(x)$ – число дуг, які виходять з вершини x.

Вершина A: $\delta_+(x) = 0$, $\delta_-(x) = 2$.
Вершина B: $\delta_+(x) = 2$, $\delta_-(x) = 1$.
Вершина C: $\delta_+(x) = 3$, $\delta_-(x) = 3$.
Вершина D: $\delta_+(x) = 2$, $\delta_-(x) = 1$.
Вершина E: $\delta_+(x) = 1$, $\delta_-(x) = 1$.
Вершина F: $\delta_+(x) = 2$, $\delta_-(x) = 2$.
Вершина G: $\delta_+(x) = 2$, $\delta_-(x) = 2$.

ДЕЯКІ СПЕЦІАЛЬНІ ТИПИ ГРАФІВ

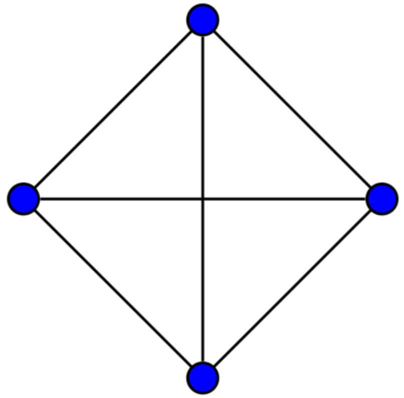
.



Граф називається регулярним, якщо всі його вершини мають один і той же степінь.

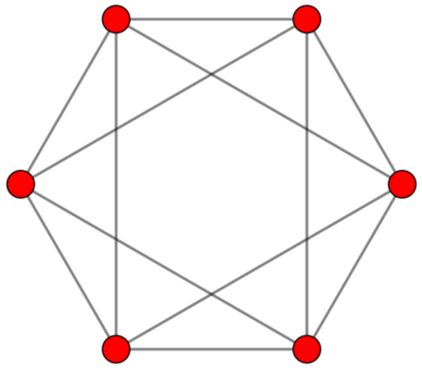
Якщо степінь кожної вершини k, то граф називають регулярним графом степеня $\boldsymbol{k}$.

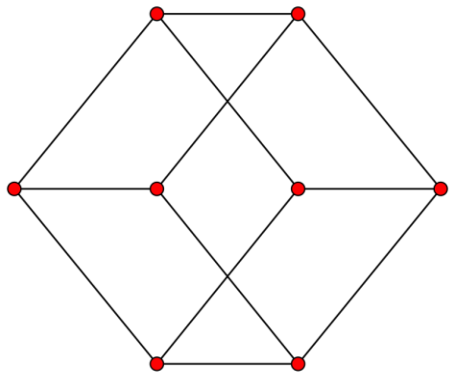
Граф називається порожнім (нуль) графом, якщо в нього є лише вершини, а ребер немає. Позначається N_n.

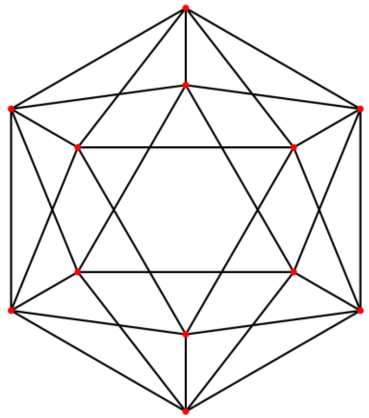


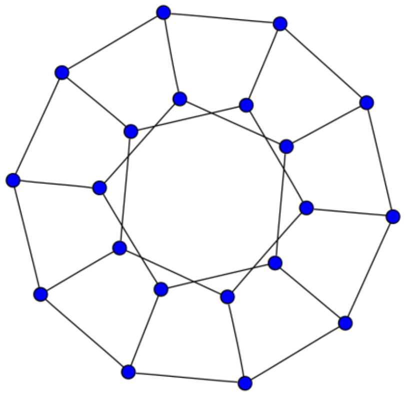
Платоновими графами називаються графи, утворені вершинами і ребрами п’яти правильних многогранників – платонових тіл:

тетраедра, куба, октаедра, додекаедра та ікосаедра.

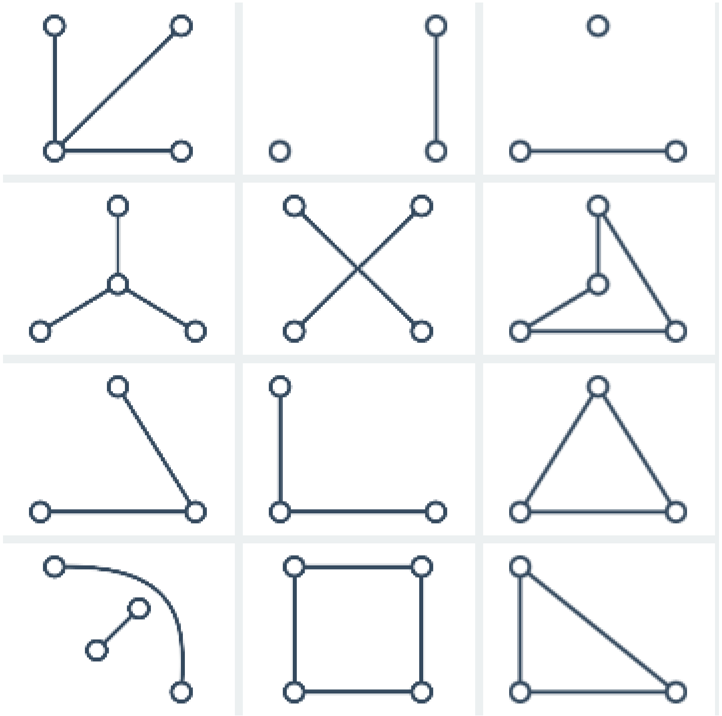




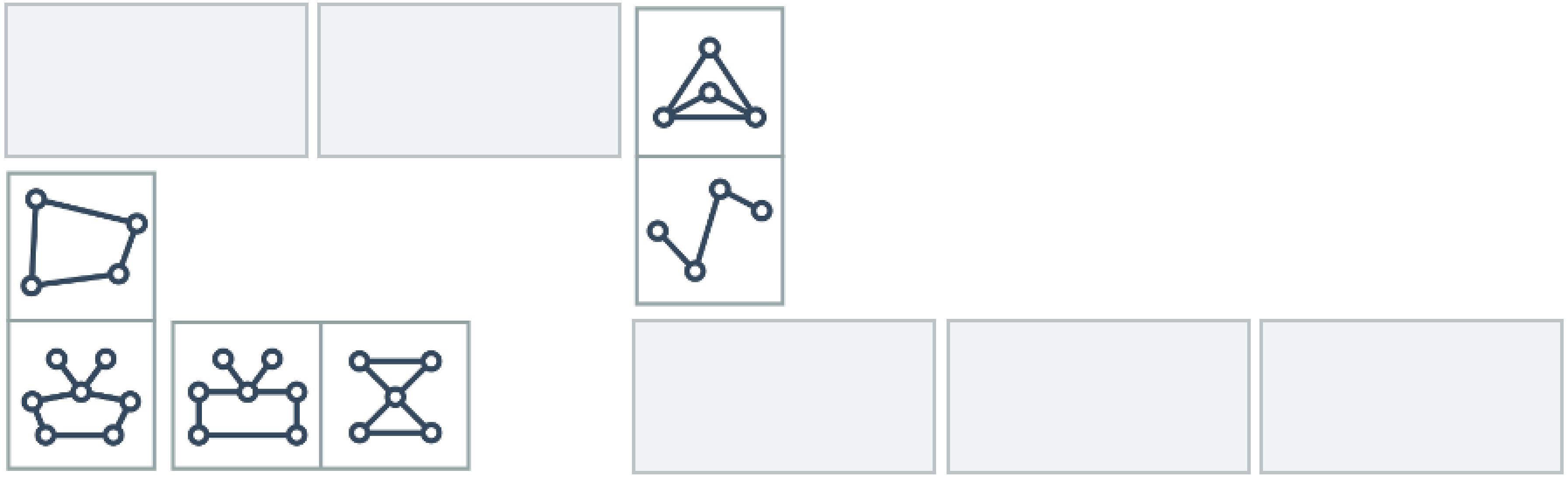


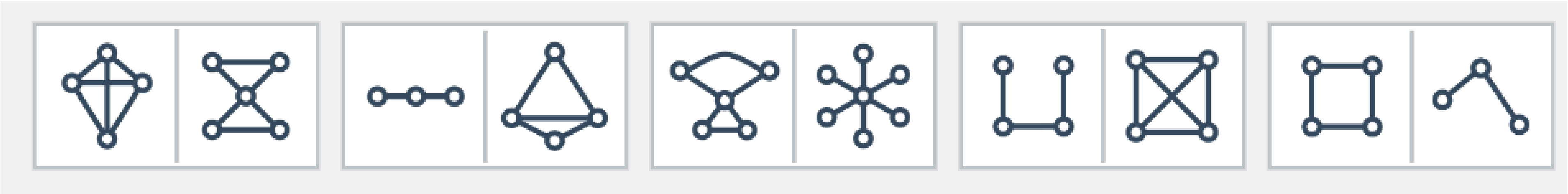


ІЗОМОРФНІ ГРАФИ



Два графа G1(V1, E1) і G2(V2, E2) називаються ізоморфними, якщо між множинами їх вершин існує бієкція (взаємно однозначне відображення) між їх множинами вершин, яка зберігає суміжність. Якщо ребра графа орієнтовані, то їх напрямок в ізоморфних графах повинні співпадати. Ізоморфізм графів є відношення еквівалентності. Для того, щоб граф G1 був ізоморфним графу G2, необхідно і достатньо існування такої підстановки, яка б встановлювала взаємно однозначну відповідність між вершинами графа, а також між їх ребрами.





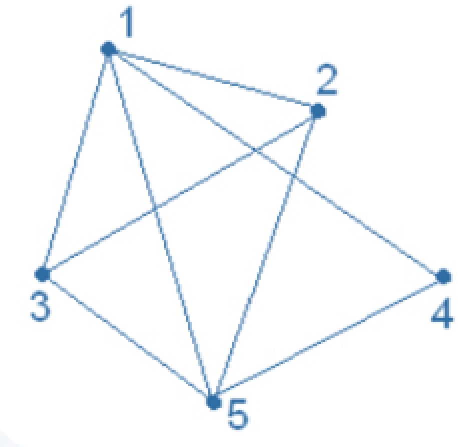
СПОСОБИ ЗАДАННЯ ГРАФІВ

1. Матриця суміжності

Квадратна матриця, де елемент на перетині i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо між вершинами i та j існує ребро, і 0 в іншому випадку.

Приклад

Для заданого графа скласти матрицю суміжності



	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1
5	1	1	1	1	0

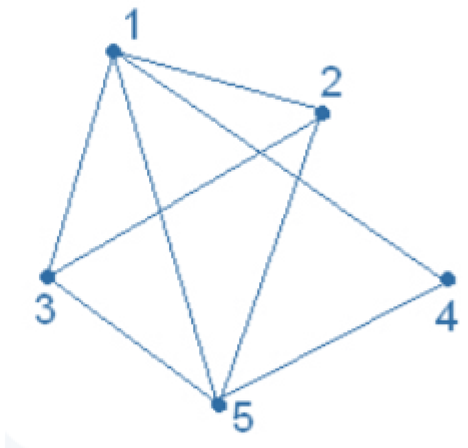
СПОСОБИ ЗАДАННЯ ГРАФІВ

2. Список суміжності

Кожній вершині ставиться у відповідність список вершин, з якими вона з'єднана ребром.

Приклад

Для заданого графа скласти список суміжності



Вершина	Суміжні вершини
1	2, 3, 4, 5
2	1, 3, 5
3	1, 2, 5
4	1, 5
5	1, 2, 3, 4

СПОСОБИ ЗАДАННЯ ГРАФІВ

3. Списком ребер

Кожному ребру ставиться у відповідність інцидентні йому вершини

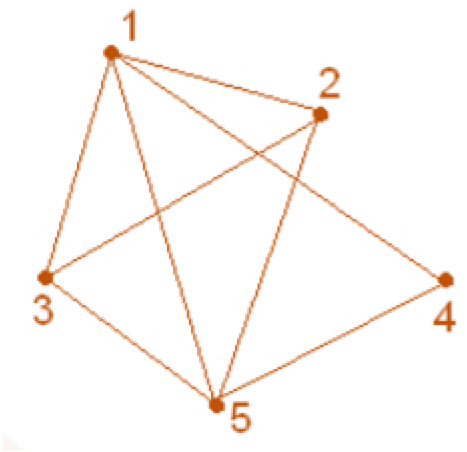
Приклад

Для заданого графа скласти список ребер

{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)}

5. Графічне представлення

Візуальне зображення графа, де вершини зображуються точками, а ребра – лініями.



СПОСОБИ ЗАДАННЯ ГРАФІВ

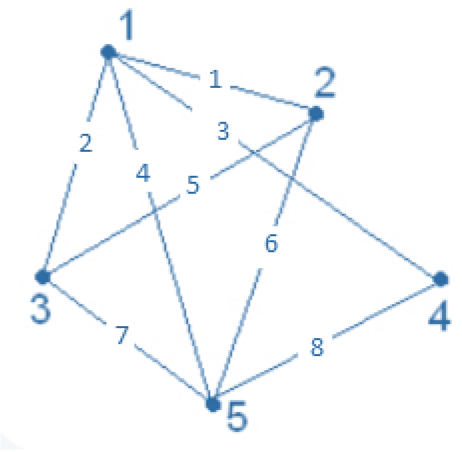
6. Матриця інцидентності

Матриця, що показує, які ребра інцидентні (тобто з'єднані) з кожною вершиною.

Створюється матриця, де рядки відповідають вершинам, а стовпці – ребрам. На перетині рядка і стовпця ставиться 1, якщо вершина інцидентна ребру (тобто належить ребру), і 0 в іншому випадку.

Приклад

Скласти матрицю інцидентності для заданого графа



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	1	1	1

ПРИКЛАД

Розглянемо основні способи завдання графів на прикладі графа G = (V, E), де:
V = {x1, x2, x3, x4, x5} - множина вершин
E = {{x1, x2}, {x2, x3}, {x3, x4}, {x4, x5}} - множина ребер

1. Матриця суміжності

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	0	1	0	0	0
x2	1	0	1	0	0
x3	0	1	0	1	0
x4	0	0	1	0	1
x5	0	0	0	1	0

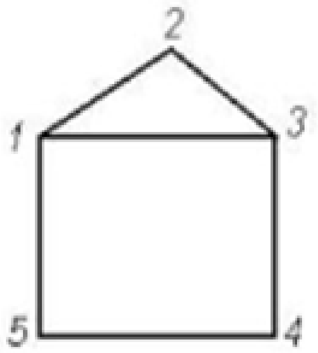
2. Матриця інцидентності

	{x1,x2}	{x2,x3}	{x3,x4}	{x4,x5}
x1	1	0	0	0
x2	1	1	0	0
x3	0	1	1	0
x4	0	0	1	1
x5	0	0	0	1

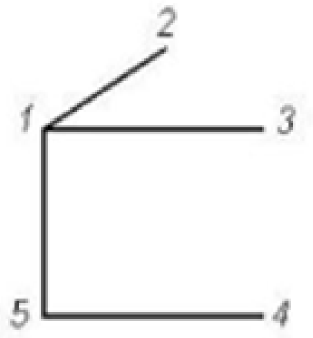
3. Список суміжності

x1: x2
x2: x1, x3
x3: x2, x4
x4: x3, x5
x5: x4

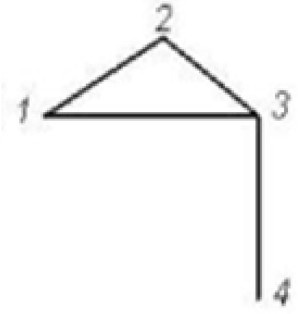
ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ



Доповненям графа G = (V, E) називається граф G' = (V, E') множиною вершин якого є множина E' ={e ∈VxV:e ∉E}. Іншими словами *доповнення* до графа — це такий граф, ребра якого разом з заданим утворюють повний граф.



Частковим називається граф, ребра якого є *підмножиною заданого графа* і множина вершин якого збігається з множиною вершин заданого графа



Підграфом називається граф, вершинами якого є підмножина вершин заданого графа, а ребрами — усі ребра, обидва кінці яких інцидентні цим вершинам

ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

Додавання/видалення вершин та ребер. Найпростіші операції, що дозволяють змінювати структуру графа.

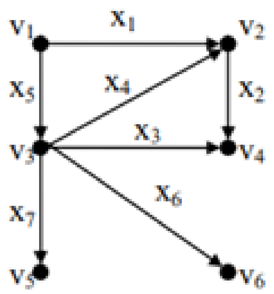
Об’єднанням графів G1 і G2, за умови , що графи не мають спільних вершин і ребер (тобто множини їх вершин і ребер не перетинаються $V1 \cap V2 = \emptyset$, $E1 \cap E2 = \emptyset$), то їхнє об'єднання $G = G1 \cup G2$ визначається наступним чином:

- $V = V1 \cup V2$, всі вершини з обох графів входять і в новий
- $E = E1 \cup E2$, всі ребра з обох графів входять і до нового графа.

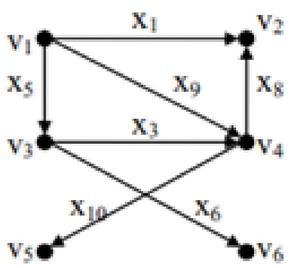
ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

Перетином графів G1 і G2 позначається як G1∩G2, називається граф G4 = (V1∩V2, X1∩X2), множина вершин якого складається лише з тих вершин, які є одночасно в G1 і G2 , а множина ребер складається з тих ребер, які одночасно є і в G1 і в G2.

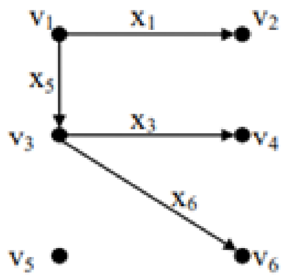
Приклад



G_1



G_2



G1∩G2

ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

Кільцева сума двох графів G1 і G2, позначається як G1⊕G2, являє собою граф G3, породжений на множині ребер E1 ⊕ E2. Іншими словами, граф G3 не має ізольованих вершин і складається тільки з ребер, присутніх або в G1 або G2, але не в обох графах одночасно.

Кільцева сума - це граф, який отримуємо, об'єднавши графи і видаливши спільні ребра.

Множина вершин: V1 U V2

Множина ребер: (E1 U E2) \ (E1 ∩ E2)

ОБЧИСЛЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФА

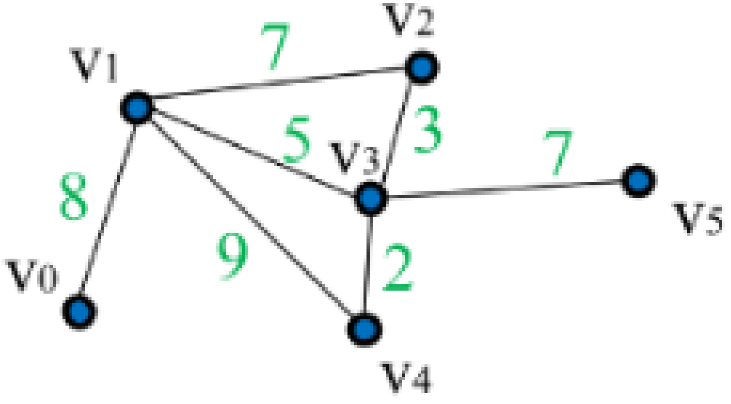
Діаметром графа – називається величина d(G) = max *d*(x, y), де максимум береться за всіма можливими парами вершин графа.

Приклад

Знайти діаметр заданого графа

1. Побудувати матрицю відстаней для графа
2. Визначити суму

	V0	V1	V2	V3	V4	V5
V0	0	8	-	-	-	-
V1	8	0	7	5	9	-
V2	-	7	0	3	-	-
V3	-	5	3	0	2	7
V4	-	9	-	2	0	-
V5	-	-	7	-	-	0



Отже, d = 29

МАРШРУТИ, ЛАНЦЮГИ, ЦИКЛИ

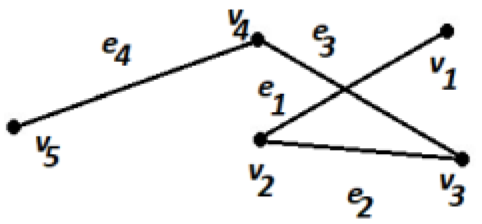
Скінченна послідовність суміжних ребер графа називається маршрутом. Кожне ребро - маршрут.

Число ребер у маршруті називається довжиною цього маршруту.

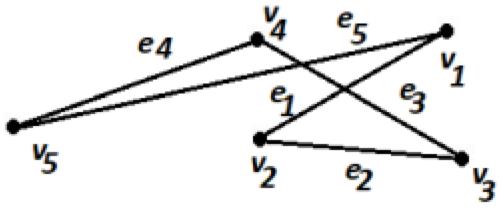
Маршрут, у якого всі ребра різні, називається ланцюгом.
Ланцюг, у якого кінцеві вершини співпадають, називається циклом.

МАРШРУТИ, ЛАНЦЮГИ, ЦИКЛИ

Простий цикл – це цикл, у якому всі вершини, окрім першої та останньої, є різні.
Ланцюг, у якого усі вершини різні, називається простим.



простий ланцюг

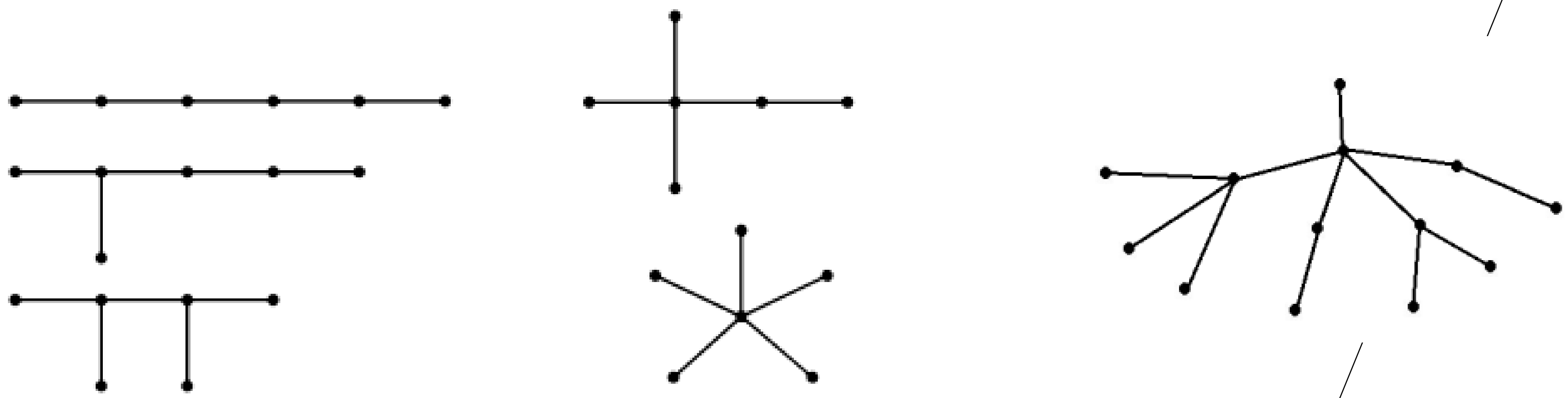


простий цикл

Відстань d(u,v) між будь-якими двома вершинами u і v зв'язного графа – це найкоротший маршрут, який дорівнює кількості ребер у маршруті. Для простого графу відстань від вершини u до вершини v і навпаки від вершини v до вершини є тотожними

ДЕРЕВА

Дерево G=(V,E) це зв’язний ациклічний (без циклів) граф. З того, що граф G – зв’язний, витікає, що між будь-якими його вершинами є маршрут типу $v_1e_1v_2e_2\dots e_nv_n$. Однак, оскільки граф G – ациклічний, то він завжди простий.



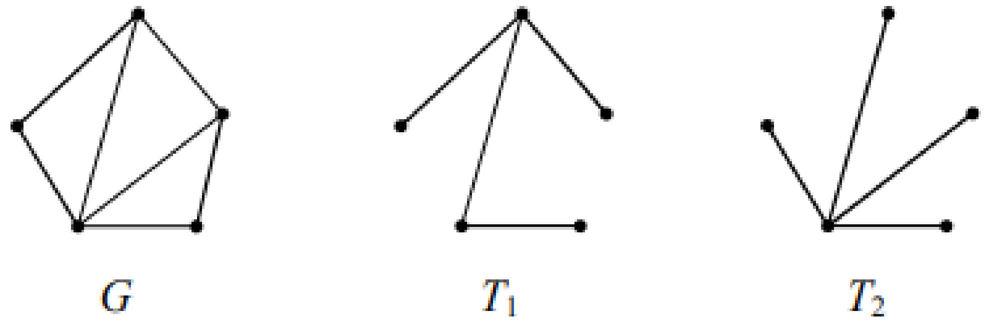
ДЕРЕВА

Вилучання з довільного зв'язного графа всіх циклових ребер дає в наслідок дерево T = (X′, U′) таке, що:

1) X = X ′ , тобто множина вершин дерева T збігається з множиною вершин графа G;

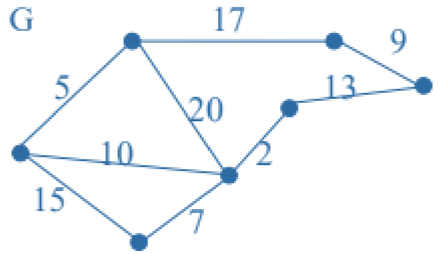
2) U ⊆U ′ , тобто кожне ребро дерева є водночас ребром графа G.

Кожне дерево T, яке задовольняє умовам 1) та 2) називається кістяковим (остовним) деревом графа G.



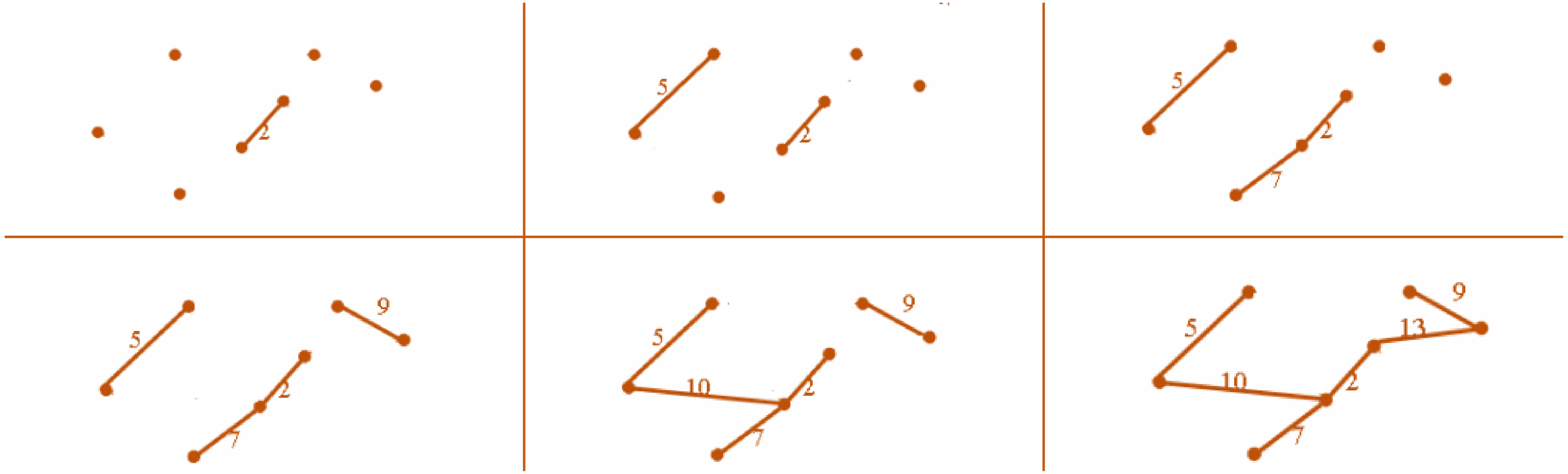
АЛГОРИТМ КРУСКАЛА

Побудова остовного дерева мінімальної вартості алгоритмом Крускала починається з графа T = (V, ∅), який складається з тільки з n вершин графа G і який не має ребер



Приклад

Побудувати остовне дерево для заданого графа

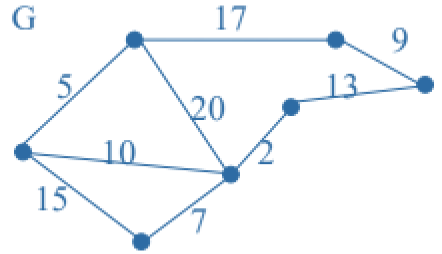


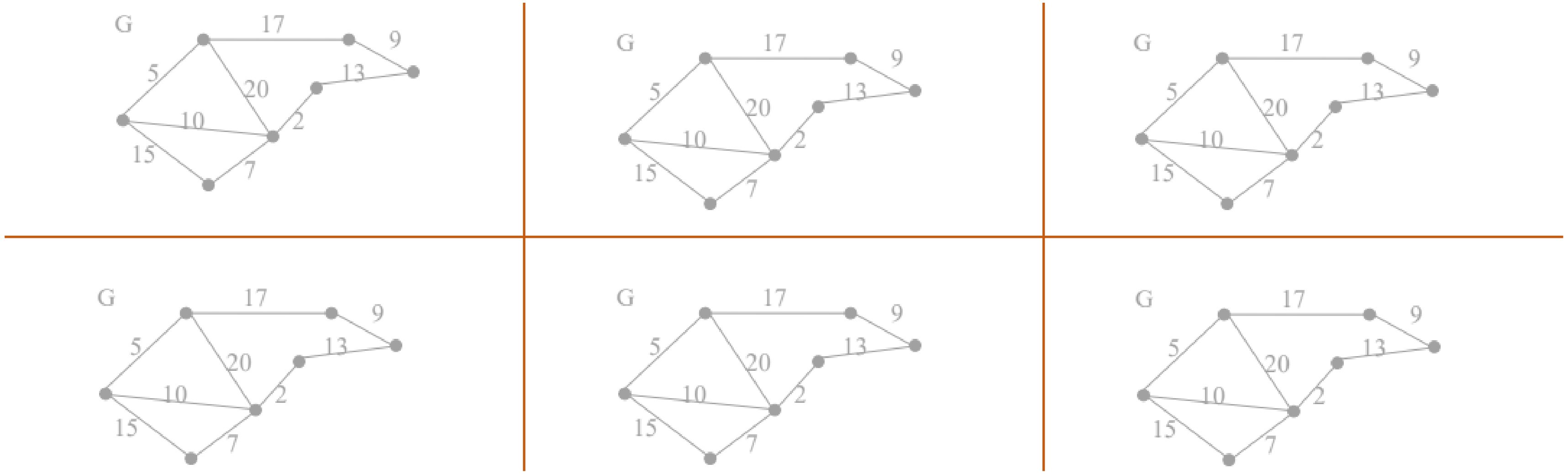
АЛГОРИТМ ПРІМА

Алгоритм Пріма відноситься до групи жадних алгоритмів. На кожному кроці додається ребро найменшої ваги, що з'єднує вершини компоненти з рештою вершин. Процес продовжується до тих пір, поки число ребер не стане рівним n-1 (n – кількість вершин).

Приклад

Побудувати остовне дерево для заданого графа





ПРИКЛАДИ

ПРИКЛАД

Дано:
G1:
V1 = {x1, x2, x3, x4, x5}
E1 = {{x1, x2}, {x2, x3}, {x3, x4}, {x4, x5}}
G2:
V2 = {x1, x2, x4, x5, x6}
E2 = {{x1, x2}, {x1, x4}, {x4, x5}, {x4, x6}}

1. **Доповнення до графу G1**

Доповнення графу - це граф, який має ті самі вершини, що й вихідний граф, але ребра проведено між усіма парами вершин, які не були з'єднані в оригінальному графі.

Результат: (x1, x3), (x1, x4), (x1, x5), (x2, x4), (x2, x5), (x3, x5).

•)

ПРИКЛАД

2. Об'єднання графів G1 та G2

Об'єднання графів - це новий граф, який містить усі вершини і всі ребра обох вихідних графів. Якщо якась вершина або ребро присутні в обох графах, то в об'єднанні вона буде присутня тільки один раз.

G1 ∪ **G2:**

V2 = {x1, x2, x3, x4, x5, x6}
E2 = {{x1, x2}, {x1, x4}, {x2, x3}, {x3, x4}, {x4, x5}, {x4, x6}}

•)

ПРИКЛАД

3. Розщеплення вершини x4 у другому графі G2

- Додаємо нову вершину x4'.
- З'єднуємо x4 і x4' ребром.
- Перерозподіляємо ребра, що інцидентні x4, між x4’ і x4’’.

4. Виділення підграфу A і стягнення A в G1

Вибираємо підграф A (наприклад, {x1, x2, x3}), створюємо нову вершину, з'єднуємо її з усіма вершинами, що були сусідами вершин підграфу A, і видаляємо вершини підграфу A.

Отримаємо новий граф з меншою кількістю вершин, де нова вершина замінює підграф A.

THANK YOU